Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

B. Malgrange

# Sur les points singuliers des équations différentielles

*Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)* (1971-1972), exp. n° 20, p. 1-13

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1971-1972____A20_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77
(633)

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 1 - 1 9 7 2

# SUR LES POINTS SINGULIERS DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES

par B. MALGRANGE

Exposé N° XX

8 Mars 1972

## INTRODUCTION

La théorie classique des points singuliers, et notamment la définition des points singuliers réguliers a été récemment étendue à plusieurs variables par les géomètres (Katz, Deligne, etc... voir Deligne [1]). Cette extension devrait être prochainement utile en analyse, si l'on en croit un travail récent de Bernstein [1]; il faut noter à ce propos que, contrairement à l'algèbre qui ne semble rencontrer jusqu'ici que des singularités régulières, l'analyse rencontre effectivement le cas irrégulier (par exemple, en relation avec la solution élémentaire de l'équation de la chaleur).

Les considérations précédentes ne sont pas abordées directement dans ces exposés mais on peut admettre qu'elles leur servent de motivation. Il s'agit simplement ici d'aider à une clarification complète de la situation en dimension un. Le point sur lequel nous porterons d'abord notre attention est le suivant : obtenir une bonne mesure de l'irrégularité d'un point singulier, "bonne" voulant dire ici invariante par toutes les transformations raisonnables. Il se trouve qu'une telle mesure s'introduit naturellement à partir de la comparaison solutions holomorphes-solutions formelles ou aussi à partir de la comparaison solutions méromorphes-solutions à singularité essentielle. Aussi partirons nous de là, en laissant pour le prochain exposé une étude "purement algébrique" de l'irrégularité.

## § 1. COMPARAISON SERIES FORMELLES-SERIES CONVERGENTES (cf. Malgrange [1])

On pose $\mathcal{O} = \mathbb{C}\{x\}$, les séries convergentes d'une variable = les germes de fonction holomorphe en $0 \in \mathbb{C}$ ; $\hat{\mathcal{O}} = \mathbb{C}[[x]]$ les séries formelles à une variable; enfin $K$ et $\hat{K}$ désignent respectivement le corps des fractions de $\mathcal{O}$ et celui de $\hat{\mathcal{O}}$ (en particulier, $K$ est le corps des germes en 0 de fonctions méromorphes). Pour $f \in \hat{K}$, on peut écrire $f = \sum_{-\infty}^{+\infty} f_p x^p$, $f_p \in \mathbb{C}$, les $f_p$ étant nuls pour $p < p_0$; on note $v(f)$ le plus grand $p_0$ possédant cette propriété.

Considérons un opérateur différentiel $D = \sum_0^m a_p \frac{d^p}{dx^p}$, avec $a_p \in \mathcal{O}$ $(a \le p \le m)$, et $a_m \neq 0$. On a d'abord le résultat suivant

<u>Proposition 1.1</u> : <u>L'application $D : \mathcal{O} \to \mathcal{O}$ est à indice; son indice noté $\chi(D,\mathcal{O})$ est égal</u> a $m-v(a_m)$.

Rappelons qu'une application linéaire $u : E \to F$ ($E,F$, espaces vectoriels sur $\mathbb{C}$) est dite "à indice" si son noyau et son conoyau sont de dimension finie; l'indice de $u$, qu'on notera $\chi(u)$ (ou $\chi(u;E,F)$ ou toute autre notation analogue) est par définition le nombre dim ker $u$- dim coker $u$.

<u>Démonstration</u> : Soit $\Delta_r \subset \mathbb{C}$ $(r > 0)$ le disque fermé : $|x| \le r$. Pour $p$ entier $\geq 0$, on note $B^p(\Delta_r)$ l'espace des fonctions sur $\Delta_r$ à valeurs complexes, de classe $\mathcal{C}^p$, et holomorphes sur $\mathring{\Delta}_r$; c'est un sous-espace fermé de $\mathcal{C}^p(\Delta_r)$, ce dernier espace étant muni d'une quelconque des normes équivalentes usuelles.

Choisissons $r$ assez petit pour que les $a_p$ soient holomorphes au voisinage de $\Delta_r$, et pour que $a_m$ ne s'annule pas dans $\Delta_r - \{0\}$.

<u>Lemme 1.2</u> : <u>L'application</u> $D : B^m(\Delta_r) \to B^o(\Delta_r)$ <u>est à indice, et son indice est égal</u> à $m-v(a_m)$.

En effet, écrivons $D = a_m \frac{d^m}{dx^m} + D'$; comme $D'$ est de degré $\leq m-1$, le théorème d'Ascoli montre que l'application $D' : B^m(\Delta_r) \to B^o(\Delta_r)$ est compacte. D'après les théorèmes connus de perturbation des opérateurs à indice, il suffit donc d'établir le résultat pour $D$ remplacé par $a_m \frac{d^m}{dx^m}$; cela se fait immédiatement en factorisant cette dernière application par

$$B^m(\Delta_r) \xrightarrow{\frac{d}{dx}} B^{m-1}(\Delta_r) \xrightarrow{\frac{d}{dx}} \cdots \xrightarrow{\frac{d}{dx}} B^o(\Delta_r) \xrightarrow{a_m} B^o(\Delta_r)$$

et en utilisant l'additivité de l'indice par composition.

La proposition se déduit aussitôt du lemme précédent, en utilisant le fait que $\mathcal{O}$ est la limite inductive des $B^p(\Delta_r)$, pour $r \longrightarrow 0$.

Passons maintenant au cas des séries formelles.

<u>Proposition 1.3</u> : <u>L'application</u> $D : \hat{\mathcal{O}} \to \hat{\mathcal{O}}$ <u>est à indice</u>, <u>et l'on a</u>

$$\chi(D,\hat{\mathcal{O}}) = \sup\,[p - v(a_p)]$$

Posons en effet $n = \sup\,[p - v(a_p)]$, on a $v(a_p) \geq p - n$, avec égalité pour certaines valeurs de $p$, disons $p \in P$: pour tout $p$, on a $a_p = x^{p-n} b_p$, avec $b_p \in \mathcal{O}$, et $b_p(0) \neq 0$ pour $p \in P$.

Soit $k$ un entier $\geq n$: on a

$$a_p \frac{d^p}{dx^p} x^k = k(k-1)\ldots(k-p+1) b_p(0) x^{k-n} + (\text{termes d'ordre} > k-n)$$

d'où $Dx^k = \sum_{p \in P} k(k-1)\ldots(k-p+1) b_p(0) x^{k-n} + (\text{termes d'ordre} > k-n)$

pour $k$ assez grand, disons $k \geq k_o$ le coefficient de $x^{k-n}$ dans l'expression précédente est $\neq 0$, puisque c'est un polynôme en $k$ dont le terme dominant $b_q(0)k^q$ ($q = \sup P$) est non nul.

On déduit de là, par un calcul de récurrence sur les coefficients que pour $k \geq k_0$ et $g \subset \hat{\mathcal{O}}$ donné, avec $v(g) \geq k - n$, il existe un unique $f \in \hat{\mathcal{O}}$ vérifiant $v(f) \geq k$, $Df = g$; autrement dit. en désignant par $\hat{\mathfrak{m}}$ l'idéal maximal de $\hat{\mathcal{O}}$, on a un isomorphisme

$$D : \hat{\mathfrak{m}}^k \xrightarrow{\sim} \hat{\mathfrak{m}}^{k-n} \qquad (k \geq k_0)$$

La proposition résulte immédiatement de là, par exemple par un argument de suite exacte.

Considérons maintenant la suite exacte $0 \to \mathcal{O} \to \hat{\mathcal{O}} \to \hat{\mathcal{O}}/\mathcal{O} \to 0$. en appliquant D à chacun des 3 facteurs, on trouve une suite exacte de complexes; d'où une suite exacte de cohomologie.

$$0 \to \ker(D,\mathcal{O}) \to \ker(D,\hat{\mathcal{O}}) \to \ker(D,\hat{\mathcal{O}}/_{\mathcal{O}}) \to \operatorname{coker}(D,\mathcal{O}) \to \operatorname{coker}(D,\hat{\mathcal{O}}) \to \operatorname{coker}(D,\hat{\mathcal{O}}/_{\mathcal{O}}) \to 0$$

Le troisième et le sixième terme de cette suite exacte donnent donc les obstructions pour que les flèches $\ker(D.\mathcal{O}) \to \ker(D,\hat{\mathcal{O}})$ et $\operatorname{coker}(D,\mathcal{O}) \to \operatorname{coker}(D,\hat{\mathcal{O}})$ soient des isomorphismes. Le théorème de comparaison est alors le suivant

<u>Théorème 1.4</u> : On a 1) $\operatorname{coker}(D,\hat{\mathcal{O}}/_{\mathcal{O}}) = 0$

2) $\dim \ker\ (D,\hat{\mathcal{O}}/_{\mathcal{O}}) = \sup[p-v(a_p)] - m + v(a_m)$

L'assertion 1) signifie que, pour tout $f \in \hat{\mathcal{O}}$, il existe $g \in \hat{\mathcal{O}}$ et $h \in \mathcal{O}$ avec $f = Dg + h$; or, la démonstration de la proposition 1.3 montre qu'il suffit de prendre un h tel qu'on ait $v(f - h) \geq k_0 - n$; par exemple il suffit de prendre pour h la somme des termes de degré $<k_0 - n$ de f.

L'assertion 2) résulte alors immédiatement des propositions 1.1 et 1.3; d'où le théorème.

Pour qu'on ait $\ker\ (D,\hat{\mathcal{O}}/_{\mathcal{O}}) = 0$, et par conséquent, pour que les flèches $\ker\ (D,\mathcal{O}) \to \ker(D,\hat{\mathcal{O}})$ et $\operatorname{coker}(D,\mathcal{O}) \to \operatorname{coker}(D,\hat{\mathcal{O}})$ soient toutes deux bijectives, il faut et il suffit qu'on ait $m - v(a_m) = \sup [p - v(a_p)]$, autrement dit qu'on ait, pour tout p, $v(a_p) \geq v(a_m) + p - m$. Or c'est précisément la définition classique des points singuliers réguliers. Cela nous conduit à la définition suivante

<u>Définition 1.5</u> : <u>On appelle</u> "<u>irrégularité de D</u> (en 0)" <u>le nombre</u> $i(D) = \sup [p - v(a_p)] - [m - v(a_m)]$.

Un exemple classique (Euler) de point singulier irrégulier est le suivant : on prend $Df = x^2 \frac{df}{dx} - f$; posant $f_o = \sum_{n\geq 0} n!x^{n+1}$, on a

$Df = -x$; on a ici $i(D) = 1$, donc la classe de $f_o$ modulo $\mathcal{O}$ est une base de ker $(D, \hat{\mathcal{O}}/_{\mathcal{O}})$.

<u>Remarque 4.6</u> : La proposition 1.1 montre en particulier qu'on a dim ker $(D,\mathcal{O}) \geq m - v(a_m)$, ce qui est un théorème classique de Perron.

<u>Remarque 1.7</u> : Soit $\Omega$ un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, et soit $D = \sum_0^m a_p \frac{d^p}{dx^p}$

un opérateur différentiel à coefficients dans $\mathcal{H}(\Omega)$, l'espace des fonctions holomorphes dans $\Omega$. Supposons qu'on ait $b^1 = \dim H^1(\Omega, \mathbb{C}) < +\infty$ et que le nombre $v(a_m,\Omega)$ des zéros de $a_m$ dans $\Omega$ (compté chacun avec son ordre) soit fini. On a alors le résultat suivant : l'application $D : \mathcal{H}(\Omega) \to \mathcal{H}(\Omega)$ est à indice, et l'on a $\chi(D,\mathcal{H}(\Omega)) = m(1-b^1) - v(a_m,\Omega)$.

Cela peut se voir par exemple d'une manière analogue à la proposition 1.1 en approchant $\Omega$ par une suite convenable de compacts $K_i$ à bord régulier et en étudiant l'application $D : \mathcal{B}^m(K_i) \to \mathcal{B}^o(K_i)$.

On peut aussi opérer ainsi : soit Z l'ensemble des zéros de $a_m$, et posons $\Omega^* = \Omega - Z$; sur $\Omega^*$, la suite de faisceaux

$$0 \to \ker (D,\mathcal{H}) \to \mathcal{H} \xrightarrow{D} \mathcal{H} \to 0$$

est exacte et ker $(D,\mathcal{H})$ est localement isomorphe à $\mathbb{C}^m$ (théorème d'existence et d'unicité usuel); par suite l'application $D : \mathcal{H}(\Omega_*) \to \mathcal{H}(\Omega_*)$ a pour indice $m(1 - b_*^1)$, $b_*^1 = \dim H^1(\Omega^*, \mathbb{C})$.

D'autre part, pour chaque $a \in Z$, soit $\Delta_a$ un disque ouvert centré en a, avec $\Delta_a \in \Omega$, $\Delta_a \cap \Delta_b = \emptyset$ si $a \neq b$. Comme $H^1(\Omega, \mathcal{H}) = 0$, on a

$$\mathcal{H}(\Omega^*)/\mathcal{H}(\Omega) \simeq \bigoplus_{a \in \Delta_a} \mathcal{H}(\Delta_a^*)/\mathcal{H}(\Delta_a), \text{ avec } \Delta_a^* = \Delta_a - \{a\}.$$

On a $\chi(D, \mathcal{H}(\Delta_a^*)) = 0$ par le raisonnement précédent, et $\chi(D, \mathcal{H}(\Delta_a)) = m - v(a_m, a)$ ( par passage à la limite projective, à partir de 1.9.) On conclut alors en utilisant la suite exacte

$$0 \to \mathcal{H}(\Omega) \to \mathcal{H}(\Omega^*) \to \mathcal{H}(\Omega^*)/\mathcal{H}(\Omega) \to 0.$$

## § 2. AUTRES THEOREMES DE COMPARAISON

Nous reprenons les hypothèses de la proposition 1.1.

<u>Theorème 2.1</u> :

a) <u>L'application</u> $D : K \to K$ <u>est à indice et l'on a</u> $\chi(D,K) = -i(D)$

b) <u>L'application</u> $D : \hat{K} \to \hat{K}$ <u>est à indice , et l'on a</u> $\chi(D,\hat{K}) = 0$

c) <u>On a</u> coker $(D,\hat{K}/K) = 0$ <u>et dim</u> ker $(D,\hat{K}/K) = i(D)$.

L'assertion c) résulte de 1.4 et de l'isomorphisme naturel $\hat{\mathcal{O}}/_{\mathcal{O}} \simeq \hat{K}/_K$.

Les assertions a) et b) vont résulter du lemme suivant :

<u>Lemme 2.2</u> : <u>L'application</u> $D : K/_{\mathcal{O}} \to K/_{\mathcal{O}}$ <u>a pour indice</u> $-\sup[p - v(a_p)]$.

Désignons en effet par $HK_{-p}$ l'ensemble des éléments f de K, avec $v(f) \geq -p$ un calcul analogue à celui de la proposition 1.3 fait avec les puissances négatives de x montre qu'on a, avec $n = \sup\,[p - v(a_p)]$ :

$DK_{-p} \subset K_{-p-n}$ , et que, pour p assez grand, l'application $D : K/K_{-p} \to K/K_{-p-n}$ est un isomorphisme. Le lemme en résulte immédiatement. L'assertion a) résulte alors de 1.1 et 2.2 en utilisant la suite exacte $0 \to \mathcal{O} \to K \to K/_{\mathcal{O}} \to 0$; l'assertion b) résulte de manière analogue de 1.3 et 2.2, et de l'isomorphisme $K/_{\mathcal{O}} \simeq \hat{K}/_{\hat{\mathcal{O}}}$.

Soit $S_n$ l'espace des fonctions holomorphes dans la couronne $0 < |x| < r$, et $S = \bigcup_{r>0} S_r$. On a le résultat suivant (cf Deligne [1], prop. II.6.20)

<u>Théorème 2.3</u> : <u>Même énoncé</u> que 2.1 <u>avec</u> $\hat{K}$ <u>remplacé par</u> S.

L'assertion a) coïncide avec celle de 2.1. D'autre part, il résulte de la remarque 1.7 que r assez petit, on a $\chi(D,S_r) = 0$; le fait qu'on ait $\chi(D,S) = 0$ s'en déduit par passage à la limite inductive.

Pour démontrer l'assertion coker $(D,S/K) = 0$, il suffit de démontrer ceci : désignons par $K_r$ le sous-espace de $S_r$ formé des fonctions méromorphes en 0; alors, pour r assez petit, on a $S_r = D\,S_r + K_r$ or cela résulte du fait que $K_r$ est dense dans $S_r$ (muni de sa topologie usuelle de Fréchet) et de ce que $D\,S_r$ est de codimension finie dans $S_r$, donc fermé d'après un lemme classique.

L'assertion "dim ker$(D.S/K) = i(D)$" se démontre alors en utilisant les précédentes et la suite exacte de cohomologie, comme l'assertion 1.4.2; d'où le théorème.

Par exemple, si $Df = x^2 \frac{df}{dx} - f$, une base de ker$(D,S/K)$ est $f_1 = e^{-1/x}$; comme $f_1$ provient d'un élément de ker $(D,S)$ l'application coker $(D,K) \to$ coker$(D,S)$ est ici bijective.

## § 3. EXTENSION AUX SYSTEMES

Il sera commode ici de prendre les systèmes d'abord sous la forme $F \to x\frac{dF}{dx} - MF$, $F \in K^m$ (ou $\hat{K}^m$, ou $S^m$), $M$ matrice carrée à coefficients dans $K$ [on écrira : $M \in \mathrm{End}\,(K^m)$].

Soit $A \in Gl(m,K)$, i.e. $A \in \mathrm{End}(K^m)$, $A$ inversible, la transformation $F = AG$ transforme $D$ en $D'$ avec $D'G = x\frac{dG}{dx} - NG$, $N = A^{-1}MA - xA^{-1}\frac{dA}{dx}$

Rappelons le résultat suivant (voir Deligne [1] lemme II.1.3).

__Théorème 3.1__ : __Il existe $A \in Gl(m,K)$ tel que $N$ ait la forme suivante__

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ \lambda_0 & \cdots & \cdots & \lambda_{m-2} & \lambda_{m-1} \end{pmatrix}$$

Soit alors $\Delta$ l'opérateur différentiel défini par

$$\Delta f = \partial^m f - \lambda_{m-1}\,\partial^{m-1} f \ldots - \lambda_o f, \quad \text{avec } \partial = x\frac{d}{dx},$$

il est immédiat que $D'$ est "équivalent" à $\Delta$ et, de façon plus précise, qu'on a le résultat suivant :

Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{\ \Delta\ } & K \\ {\scriptstyle u}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle v} \\ K^m & \xrightarrow{\ D'\ } & K^n \end{array}$$

avec $u(f) = (f_o, \ldots, f_{m-1})$, $v(g) = (0, \ldots, 0, g)$; alors ce diagramme induit un isomorphisme entre le noyau de $\Delta$ et le noyau de $D'$ d'une part, le conoyau de $\Delta$ et le conoyau de $D'$ d'autre part; le même résultat est encore vrai avec $K$ remplacé par $\hat{K}$, de $S$, etc...

Définissons alors l'inégalité de $\Delta$ par la formule $i(\Delta) = i(x^k\Delta)$, $k$ un entier tel que $x^k\Delta$ soit à coefficients holomorphes. Cela ne dépend visiblement pas de $k$, et on laisse le lecteur en vérifier la formule suivante

3.2 $$i(\Delta) = \sup\ (0, \sup - v(\lambda_p))$$

Définissons ensuite l'inégalité de $D$ par $i(D) = i(\Delta)$. Les théorèmes 2.1 et 2.3 entraînent immédiatement le résultat suivant

Théorème 3.3 : a) L'application $D : K^m \to K^m$ est à indice et l'on a $\chi(D, K) = -i(D)$

b) L'application $D : \hat{K}^m \to \hat{K}^m$ est à indice et l'on a $\chi(D,\hat{K}) = 0$

c) On a coker $(D,\hat{K}^m/K^m) = 0$ et dim ker $(D,\hat{K}^m/K^m) = i(D)$

d) Mêmes énoncés avec $\hat{K}$ remplacé par $S$.

Ce théorème montre en particulier, que $i(D)$ ne dépend que de $D$, et non pas du choix de $A$ dans 3.1; nous donnerons une démonstration algébrique de ce résultat dans le prochain exposé.

Rappelons maintenant que, suivant une définition classique, l'origine est un point singulier régulier de $D$ s'il existe un $A \in Gl(m,K)$ tel que $N = A^{-1}MA - xA^{-1}\frac{dA}{dx}$ n'ait pas de pôle. Cela est classiquement équivalent à la propriété suivante : n'importe quelle détermination d'une (ou de toute) matrice fondamentale de $P$ est à croissance polynomiale en $\frac{1}{x}$ au voisinage de 0; ceci équivaut encore au fait qu'on a $P = Q\exp(C \log z)$, avec $Q$ à coefficients méromorphes, i.e. $Q \in Gl(m,K)$.

<u>Proposition 3.4</u> : <u>Pour que</u> 0 <u>soit un point singulier régulier</u> de D <u>il faut et il suffit qu'on ait</u> $i(D) = 0$.

Supposons qu'on ait $i(D) = 0$, et soit A comme au théorème 3.1 alors $i(\Delta)' = 0$, donc, d'après la formule 3.2, les $\lambda_p$ n'ont pas de pôle; donc N n'a pas de pôle.

Pour démontrer la réciproque, nous utiliserons le lemme suivant.

<u>Lemme 3.5</u> : <u>Supposons que</u> M <u>n'ait pas de pôle; alors l'application</u> $D : \hat{\mathcal{O}}^m \to \hat{\mathcal{O}}^m$ <u>est d'indice nul.</u>

La démonstration est analogue à celle de la proposition 1.3 Soit $F_k$ un vecteur de $\mathbb{C}^m$; on a $D(F_k x^k) = [kI - M(0)]x^k$ + (termes de degré $> k$), pour k assez grand, disons $k \geq k_o$, $kI - M(0)$ est inversible de là, il résulte que l'application $D : \mathfrak{m}^k(\hat{\mathcal{O}}^m) \to \mathfrak{m}^k(\hat{\mathcal{O}}^m)$ est bijective pour $k \geq k_o$. Le lemme en résulte immédiatement.

Sous la même hypothèse que M n'ait pas de pôle, la proposition 3.6, ci-dessous, montre que $D : \mathcal{O}^m \to \mathcal{O}^m$ est encore d'indice nul; donc, l'indice de $D : \hat{\mathcal{O}}^m/\mathcal{O}^m \to \hat{\mathcal{O}}^m/\mathcal{O}^m$ est nul; en vertu de l'isomorphisme $\hat{\mathcal{O}}/\mathcal{O} \simeq \hat{K}/K$, le théorème 3.3 c) nous montre alors qu'on a $i(D) = 0$; d'où la proposition.

Par la suite, il sera nécessaire aussi d'envisager des systèmes sous la forme un peu plus générale suivante : H étant une matrice diagonale à coefficients entiers $(h_1, \ldots, h_m)$ on pose $DF = x^H F - MF$, avec $M \in \mathrm{End}(K^m)$. Par définition, on prendra $i(D) = i(x^{I-H}D)$, moyennant quoi le théorème 3.3 est encore vrai pour D.

On a aussi la proposition suivante.

<u>Proposition 3.6</u> : <u>Si M est sans pôle, et les</u> $h_i$ <u>positifs, alors</u> $D : \mathcal{O}^m \to \mathcal{O}^m$ <u>a pour indice</u> $(h_1 + \ldots + h_m - m)$ <u>et</u> $D : \hat{\mathcal{O}}^m \to \hat{\mathcal{O}}^m$ <u>a pour indice</u> $i(D) + (h_1 + \ldots + h_m - m)$.

La première assertion se démontre comme la proposition 1.1. La seconde résulte de là, du fait que le théorème 3.3 s'applique à D, et de l'isomorphisme $\hat{\mathcal{O}}/\mathcal{O} \simeq \hat{K}/K$. A noter aussi que, d'après la première assertion, on a dim ker $(D, \mathcal{O}^m) \geq h_1 + \ldots + h_m - m$ (théorème de Perron pour les systèmes).

## § 4. REMARQUES DIVERSES

### a) Equations dépendant d'un paramètre

La théorie des équations différentielles dépendant d'un paramètre présente de nombreuses difficultés. Nous donnerons seulement ici un énoncé simple, qui "relativise" la proposition 1.1, et cela sans chercher les hypothèses minimum nécessaires. Soit Z une variété analytique complexe connexe, et soit D l'opérateur différentiel "dépendant du paramètre $z \in Z$" : $D = \sum_0^m a_p \frac{d^p}{dx^p}$, $a_p \in \mathcal{H}(D \times Z)$, D le disque unité ouvert; supposons $a_m \neq 0$; soit $V \subset D \times Z$ l'ensemble des zéros de $a_m$, et supposons que la projection $V \to Z$ induite par la projection naturelle $\pi : D \times Z \to Z$ soit propre. Soit $\mathcal{K}$ le complexe $0 \to \mathcal{H}_{\Delta \times Z} \to \mathcal{H}_{\Delta \times Z} \to 0$ avec $\mathcal{H}_{\Delta \times Z}$ désignant le faisceau des fonctions holomorphes sur $\Delta \times Z$

<u>Proposition 4.1</u> : <u>Le complexe $\pi_* \mathcal{K}$ est à cohomologie $\mathcal{H}_Z$-cohérente.</u>
Autrement dit, les faisceaux associés aux préfaisceaux $U \to \ker(D, \mathcal{H}(\Delta \times U))$ et $U \to \operatorname{coker}(D, \mathcal{H}(\Delta \times U))$, U ouvert de Z, sont $\mathcal{H}_Z$-cohérents.
Esquissons la démonstration : on peut, en restreignant Z, supposer que V est contenu dans $\Delta_r \times Z$, avec $0 < r < 1$, $\Delta_r$ le disque fermé de rayon r; prenons r' vérifiant $r < r' < 1$. On démontre facilement, à l'aide du théorème d'existence, d'unicité, et de dépendance d'un paramètre pour les équations différentielles que le préfaisceau associé au faisceau $U \to \ker(D, \mathcal{H}(\Delta \times U))$ [resp. $U \mapsto \operatorname{coker}(D, \mathcal{H}(\Delta \times U))$] est isomorphe au noyau (resp. ou conoyau) du morphisme de faisceaux $\mathcal{H}_Z(B^m(\Delta_{r'})) \xrightarrow{D} \mathcal{H}_Z(B^0(\Delta_{r'}))$, ici, E étant un Banach, on note $\mathcal{H}_Z(E)$ le faisceau des fonctions holomorphes sur Z à valeurs dans E. Nous sommes alors ramenés à la situation classique de perturbation analytique d'un opérateur à indice dans des espaces de Banach; d'où le résultat.

On a aussi des énoncés analogues avec p.ex. Z espace analytique ou espace topologique séparé, ou variété différentielle (dans ces deux derniers cas, il faudrait remplacer l'énoncé, comme d'habitude en géométrie analytique relative, par un énoncé de pseudo-cohérence pour $R\,\pi_*(\mathcal{K})$; voir divers articles consacrés aux images directes en géométrie analytique : Kiehl, ou Forster-Knorr, à paraître aux Inventiones, ou la thèse de Houzel à paraître quelque part; nous n'entrerons pas dans les détails).

b) <u>Equations non-linéaires</u>

Soit $\Phi$ une fonction holomorphe sur $\Delta \times U$, $\Delta$ le disque unité ouvert, U un ouvert de $\mathbb{C}^{m+1}$; une solution de l'équation (E) : $\Phi\,(x,f,f',\ldots,f^{(m)}) = 0$ dans $\Delta$ est une fonction f holomorphe sur $\Delta$, telle que l'application $x \to (f(x),\ldots,f^{(m)}(x))$ soit à valeurs dans U, et telle qu'on ait identiquement $\Phi(x,f(x),\ldots,f^{(m)}(x)) = 0$. Nous nous proposons d'examiner très rapidement des questions du type suivant : dans quelle mesure peut-on "paramétrer naturellement" les solutions de (E) par les points d'un espace analytique (la notion de "paramétrage naturel" se définit ici, comme d'habitude dans ce genre de problèmes, par la représentabilité d'un foncteur facile à définir; nous laisserons le lecteur expliciter).

Nous examinerons seulement la possibilité de "paramétrer" les solutions voisines d'une solution $f_0$ donnée; par définition, les points singuliers (E) en $f_0$ sont les points singuliers de l'équation linéarisée en $f_0$, i.e. les points x vérifient $\frac{\partial\Phi}{\partial y_m}\,(x,f_0(x),\ldots,f_0^{(m)}(x)) = 0$. Nous supposerons que $f_0$ n'est pas une "intégrale singulière", c'est-à-dire qu'il existe des points non singuliers.

Soit d'abord r, avec $0 < r < 1$, tel que le cercle $\{|x| = r\}$ ne contienne pas de points singuliers. L'application qui à f fait correspondre $\Phi(x,f,\ldots,f^{(m)})$, qu'on notera $f \to \Psi(f)$ est alors une application analytique définie sur un voisinage de $f_0$ dans $B^m(\Delta_r)$, à valeurs dans $B^0(\Delta_r)$; comme l'application $\frac{\partial\Psi}{\partial f}(f_0)$ est à indice, d'après une variante de la proposition 1.1. des raisonnements connus montrent que l'espace analytique banachique $\Psi^{-1}(0)$ est, au voisinage de $f_o$, de dimension finie (cf. Douady [1]); cela paramètre l'ensemble des solutions de (E) dans $B^m(\Delta_r)$, voisines de $f_o$. Il est facile aussi de voir que la dimension $f_o$ du germe de cet ensemble est comprise entre m et l'indice de l'équation linéarisée

$$\frac{\partial\Psi}{\partial f}(f_o) : B^m(\Delta_r) \to B^o(\Delta_r)$$

et que ce dernier indice est égal à m - v, v le nombre des zéros dans $\Delta_r$ de $\frac{\partial\Phi}{\partial y_m}(x, f, \dots f^{(m)})$.

Soit maintenant r quelconque, avec $0 \leq r < 1$. Pour $r' > r$, assez voisin de r, le cercle $(x) = r'$ ne contiendra pas de points singuliers de (E) en $f_o$. On pourra alors faire la construction précédente, et obtenir un germe d'espace analytique; pour tous les r' assez voisins de r, ces germes coïncident, en vertu du résultat suivant; il existe $r_o > r$ possédant la propriété suivante : pour tout r', avec $r < r'_o < r_o$, on peut trouver $\varepsilon(r') > 0$ tel que toute f solution de (E) dans $\Delta_{r'}$, et vérifiant $\sup_{|x| < 1} | f(x) - f_o(x)| \leq \varepsilon(r')$ se prolonge en une solution de (E) dans $\overset{o}{\Delta}_{\overset{o}{1}}$ (Cela se déduit facilement des résultats sur la "dépendance des conditions initiales", dans le théorème d'existence et d'unicité). Cela nous définit un germe d'espace analytique paramétrant les solutions voisines de $f_o$ dans $\mathcal{H}(\Delta_r)$; en particulier, cela vaut pour r = 0, i.e. pour les solutions voisines de $f_o$ dans $\mathcal{O}$.

Il faut noter cependant que le résultat précédent n'est guère satisfaisant; d'une part, les solutions d'une équation différentielle non-linéaire ont en général des domaines d'existences variables, et non univalents, ce qui rend le problème considéré un peu artificiel. D'autre part, le germe qui vient d'être construit, est bien universel en $f_o$; mais il peut ne pas être universel aux points voisins, à cause de l'existence des singularités mobiles (par contre, s'il n'y a que des singularités fixes, on peut voir que ce canular ne se produit pas).