M. S. BAOUENDI
C. GOULAOUIC

Problèmes d'analyticité pour des opérateurs différentiels dégénérés ; applications (fin)

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1970-1971), exp. n^o 9, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1970-1971____A9_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77
(633)

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 0 - 1 9 7 1

PROBLEMES D'ANALYTICITE POUR DES OPERATEURS DIFFERENTIELS DEGENERES ; APPLICATIONS (fin)

par M. S. BAOUENDI et C. GOULAOUIC

Exposé N° 9 2 Décembre 1970

C - APPLICATIONS

Ce sont essentiellement des conséquences du théorème B.3.2. sur les itérés d'un opérateur $\mathcal{A}$ dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ (cf. partie B).

On supposera les coefficients des opérateurs différentiels et $\partial\Omega$ analytiques ; le lecteur verra aisément que ces hypothèses peuvent parfois être affaiblies. Les démonstrations détaillées des résultats ci-dessous se trouvent dans [2].

§ 1. THEOREME D'ISOMORPHISMES.

1) Désormais on suppose de plus que cet opérateur $\mathcal{A}$ est auto-adjoint : comme l'injection de $D(\mathcal{A})$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte, le spectre de $\mathcal{A}$ est alors une suite (λ_j) de valeurs propres strictement positives, que l'on numérote dans l'ordre croissant, et qui tend vers l'infini avec j. On note (φ_j) une base orthonormée dans $L^2(\Omega)$ de fonctions propres de $\mathcal{A}$ associées aux (λ_j), et J l'application qui, à tout $f \in L^2(\Omega)$ fait correspondre la suite (f_j) de ses coefficients de Fourier sur la base (φ_j). On utilise la notation $l^2_{P(j)}$ (avec $P(j) > 0$) pour désigner l'espace "l^2 avec poids" :

$$\{(f_j) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \ ; \ \sum_{j=0}^{\infty} |f_j|^2 P(j) < \infty\} \text{ , muni de sa norme}$$

naturelle.

On a le résultat :

Proposition 1.1 :

1) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la restriction de J à $D(\mathcal{A}^k)$ est un isomorphisme de $D(\mathcal{A}^k)$ sur $l^2_{(\lambda_j)^{2k}}$.

2) La restriction de J à $\mathcal{a}_s(\overline{\Omega})$, pour $s \geq 1$, est un isomorphisme de cet espace sur $\varprojlim_{k \in \mathbb{N}} l^2_{(\lambda_j)^{2k}}$.

3) La restriction de J à $\mathcal{a}_s(\overline{\Omega})$, pour $s \geq 1$, est un isomorphisme de $\mathcal{a}_s(\overline{\Omega})$ sur $\varinjlim_{M>0} l^2_{(\exp((\frac{\lambda_j}{M})^{1/2s}))}$.

<u>Démonstration</u> : Le 1) est évident. Pour le 2), il suffit de remarquer que $C^\infty(\overline{\Omega}) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} D(\mathcal{A}^k)$. Montrons le 3). Pour que l'on ait $u \in \mathcal{a}_s(\overline{\Omega})$, il faut et il suffit qu'il existe $M > 0$; $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|\mathcal{L}t^k u\|^2_{L^2(\Omega)}}{M^{2k}(2k!)^s} < \infty$;

et on remarque qu'il existe deux constantes positives C_1 et C_2 telles que l'on ait pour tout λ_j :

$$C_1 \exp((\frac{\lambda_j}{M})^{1/2s}) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_j^{2k}}{M^{2k}(2k!)^s} \leq C_2 \exp((\frac{\lambda_j}{M})^{1/2s}) .$$

La proposition 1.1 montre qu'il est utile de connaître précisément le comportement de la suite (λ_j) quand $j \to \infty$.

<u>2) Théorie spectrale de l'opérateur $\mathcal{A}$</u>

On démontre le résultat :

<u>Proposition 1.2</u> : La suite (λ_j) des valeurs propres de $\mathcal{A}$ vérifie :

$$\lambda_j \sim K\, j^{2/n} \quad \text{quand} \quad j \to \infty ,$$

où K est une constante positive calculable à partir du symbole de l'opérateur $\mathcal{A}$.

On remarque que le comportement de (λ_j) est le même que dans le cas d'un problème elliptique.

<u>Démonstration de la proposition 1.2</u> :

On renvoie à [1], [2] pour les détails ; l'idée utilisée consiste à étudier le noyau de Green $G_t(x,y)$ de l'opérateur $\mathcal{A}^{2m} + tI$ (avec $m > \frac{n}{2}$). En comparant ce noyau à la solution élémentaire de l'opérateur figé en

$x \in \Omega$, on trouve :

$$(1.1) \qquad \forall\, x \in \Omega\ , \quad \lim_{t \to \infty} t^{1-\frac{n}{4m}}\, G_t(x,x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d\xi}{1+\mathcal{A}_o^{2m}(x,\xi)} = 1(x)$$

(où $\mathcal{A}_o(x,\xi)$ est la partie homogène d'ordre 2 en ξ de $\mathcal{A}(x,\xi)$).

On montre ensuite que l'on a, pour tout $x \in \Omega$,

$$(1.2) \qquad G_t(x,x) = \sup_{u \in D(\mathcal{A}^m)} \frac{|u(x)|^2}{\|\mathcal{A}^m_u\|^2_{L^2(\Omega)} + t\,\|u\|^2_{L^2(\Omega)}}$$

et qu'il existe une constante $C > 0$ telle que l'on ait pour tout $u \in D(\mathcal{A}^m)$ et pour tout $t > 0$,

$$(1.3) \qquad t^{1-\frac{n}{4m}}\, \|\varphi\, u^2\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\, (\|\mathcal{A}^m u\|_{L^2(\Omega)} + t\,\|u\|_{L^2(\Omega)})\ .$$

Les relations (1.2) et (1.3) montrent que l'on a, pour tout $x \in \Omega$, $t^{1-n/4m}\, G_t(x,x) \leq C\, \varphi(x)^{-1/2}$; par le théorème de Lebesgue, on déduit alors de (1.1) :

$$\lim_{t \to \infty} t^{1-n/4m} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^{2m}+t} \right) = \lim_{t \to \infty} \left(t^{1-n/4m} \int_\Omega G_t(x,x)\,dx \right) = \int_\Omega 1(x)\,dx\ .$$

En utilisant un théorème taubérien, on en déduit la proposition 1.2.

3) Conclusion

Des propositions 1.1 et 1.2 on déduit le résultat :

Théorème 1.1 : La restriction de l'application J est un isomorphisme de $D(\mathcal{A}^k)$ sur $l^2_{j^{4k/n}}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, de $C^\infty(\overline{\Omega})$ sur l'espace $\mathcal{S}$ des suites à décroissance rapide, de $\mathcal{G}_s(\overline{\Omega})$ sur $\varinjlim_{M>0} (l^2_{\exp((\frac{j}{M})^{1/sn})})$ pour $s \geq 1$.

4) Résultats d'approximation

On considère seulement le cas où Ω est la boule unité de $\mathbb{R}^n$ (ceci est susceptible d'être généralisé ...) ; pour $k \in \mathbb{N}$ et $f \in L^2(\Omega)$, on note $d_k(f,\mathcal{P})$ la distance dans $L^2(\Omega)$ de f au sous-espace engendré par les polynômes de degré $\leq k$; on a le résultat :

Théorème 1.2 :

1) Pour que la fonction f soit dans $C^\infty(\bar\Omega)$ il faut et il suffit que la suite $(d_k(f,\mathcal{P})$ soit à décroissance rapide.

2) Pour que f soit dans $\mathcal{O}_s(\bar\Omega)$ (avec $s \geq 1$) il faut et il suffit qu'il existe deux constantes C, $M > 0$, telles que l'on ait, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$d_k(f,\mathcal{P}) \leq C \exp(-M k^{\frac{1}{s}}) \quad .$$

Ceci donne en particulier le cas des fonctions analytiques sur $\bar\Omega$, mais on n'obtient aucune caractérisation analogue pour les éléments de $G_s(\bar\Omega)$.

Démonstration du théorème 1.2 :

On utilise le théorème d'isomorphisme 1.1 pour un opérateur $\mathcal{A}$ de la forme

$$\sum_{i=1}^{n} D_i(1-r^2)D_i + 1 + \sum_{1\leq i,j\leq n}(x_i D_j - x_j D_i)^2 \quad \left(\text{avec } r^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) ,$$

dont les fonctions propres sont des polynômes.

§ 2. INTERPOLATION.

1) Rappels

(Les résultats utilisés ici sont démontrés dans [3]). Pour tout $\alpha \in \,]0,1]$, on sait construire par une méthode de norme fonctionnelle un foncteur d'interpolation Φ_α qui vérifie

$$\Phi_\alpha[l^2 \,,\, l^2_{\exp(j)}] = l^2_{\exp(j^\alpha)} \quad .$$

Par une méthode de prolongement par $\varprojlim$ et $\varinjlim$, on en déduit, pour $1 \leq s_o < s < \infty$, un foncteur d'interpolation $\tilde{\Phi}_\beta$, qui vérifie en particulier

$$\tilde{\Phi}_\beta\,[\varprojlim_{k \in \mathbb{N}} l^2_{j^k} \,,\, \varinjlim_{M>0} l^2_{\exp((\frac{j}{M})^{1/s_o n})}] = \varinjlim_{M>0} l^2_{\exp((\frac{j}{M})^{1/sn})} \quad . \tag{2.1}$$

2) Application

Le théorème 1.1 et l'égalité (2.1) impliquent :

<u>Théorème 2.1</u> : Etant donnés $1 \leq s_o < s < \infty$, on sait construire un foncteur d'interpolation $\tilde{\Phi}_\beta$ tel que :

$$\tilde{\Phi}_\beta\,[C^\infty(\bar{\Omega}) \,,\, \mathcal{A}_{s_o}(\bar{\Omega})] = \mathcal{A}_s(\bar{\Omega}) \quad .$$

En particulier, les espaces $\mathcal{A}_s(\bar{\Omega})$ apparaissent comme espaces d'interpolation entre l'espace $C^\infty(\bar{\Omega})$ et l'espace $\mathcal{A}(\bar{\Omega})$; on sait déjà que pour $s > 1$, l'espace $G_s(\bar{\Omega})$ n'est pas d'interpolation entre $C^\infty(\bar{\Omega})$ et $\mathcal{A}(\bar{\Omega})$.

L'égalité (2.1) et les résultats connus sur l'opérateur de Laplace-Beltrani sur une variété Γ analytique compacte <u>sans bord</u>, impliquent aussi :

$$\tilde{\Phi}_\beta\,[C^\infty(\Gamma) \,,\, G_{s_o}(\Gamma)] = G_s(\Gamma) \quad . \tag{2.2}$$

§ 3. PROBLEMES AUX LIMITES.

1) Résultats obtenus pour les opérateurs dégénérés.

On désigne par $\mathcal{A}$ un opérateur de la classe étudiée au paragraphe B et par $\mathcal{L}$ un opérateur de la classe étudiée au paragraphe A. On a le résultat :

Proposition 3.1 : L'opérateur $\mathcal{A}$ est un isomorphisme

1) de $C^\infty(\overline{\Omega})$ sur $C^\infty(\overline{\Omega})$,
2) de $\mathcal{a}_s(\overline{\Omega})$ sur $\mathcal{a}_s(\overline{\Omega})$ pour tout $s \geq 1$,
3) de l'espace de "Gevrey dissymétrique" d'ordre s sur lui-même (cf. partie B), pour tout $s \geq 1$.

L'opérateur $\mathcal{L}$ est un isomorphisme

4) de $C^\infty(\overline{\Omega})$ sur $C^\infty(\overline{\Omega})$,
5) de $G_s(\overline{\Omega})$ sur $G_s(\overline{\Omega})$, pour $s \geq 1$,
6) de $\mathcal{a}_s(\overline{\Omega})$ sur $\mathcal{a}_s(\overline{\Omega})$, pour $s \geq 1$.

Seul le dernier résultat 6) n'a pas encore été démontré ; il résulte par interpolation de 4) et de 5) (pour $s = 1$).

2) Problèmes aux limites elliptiques

On se contente ici d'énoncer les résultats pour le problème de Dirichlet pour le laplacien dans Ω, mais ceci est évidemment valable pour un problème elliptique général.

On sait (cf. [4]) que l'application (Δ, γ_0), où γ est la trace sur $\partial\Omega$, est un isomorphisme de $C^\infty(\overline{\Omega})$ sur $C^\infty(\overline{\Omega}) \times C^\infty(\Gamma)$, et de $\mathcal{a}(\overline{\Omega})$ sur $\mathcal{a}(\overline{\Omega}) \times \mathcal{a}(\Gamma)$. Le théorème 2.1 et la relation (2.2) impliquent alors le résultat :

Théorème 3.1 : L'application (Δ, γ_0) est un isomorphisme de $\mathcal{a}_s(\overline{\Omega})$ sur $\mathcal{a}_s(\overline{\Omega}) \times G_s(\Gamma)$, pour tout $s \geq 1$.

En fait, dans [1], on obtient directement le théorème d'isomorphisme avec $G_s(\overline{\Omega})$ au lieu de $\mathcal{O}_s(\overline{\Omega})$. On peut retrouver ici le résultat par interpolation à partir des cas C^∞ et analytique (avec des hypothèses de régularité un peu plus restrictives) ; on démontre d'abord :

<u>Lemme 3.1</u> : Soit $u \in \mathcal{O}_s(\overline{\Omega})$ tel que $\Delta u \in G_s(\overline{\Omega})$; alors on a aussi $u \in G_s(\overline{\Omega})$.

La démonstration fait dans chaque carte locale au voisinage de $\partial\Omega$ et par récurrence sur l'ordre des dérivations "normales".

Le lemme 3.1 et le théorème 3.1 impliquent le résultat :

<u>Corollaire 1</u> : L'application (Δ, γ) est un isomorphisme de $G_s(\overline{\Omega})$ sur $G_s(\overline{\Omega}) \times G_s(\Gamma)$.

En particulier γ_0 est un isomorphisme de $C^\infty(\overline{\Omega})_\Delta$ (resp. $\mathcal{O}_s(\overline{\Omega})_\Delta = G_s(\overline{\Omega})_\Delta$) sur $C^\infty(\Gamma)$ (resp. $G_s(\Gamma)$), où E_Δ désigne $\{u \in E \;;\; \Delta u = 0 \text{ dans } \Omega\}$.

<u>Remarque</u> : Les résultats ci-dessus (approximation interpolation ...) montrent que les espaces $\mathcal{O}_s(\overline{\Omega})$ apparaissent assez naturellement sur une variété à bord régulière, qu'ils y jouent un rôle analogue à celui des espaces G_s sur une variété sans bord, et qu'ils sont en un certain sens "meilleurs" que les espaces $G_s(\overline{\Omega})$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. S. Baouendi et C. Goulaouic : Arch. for Rat. Mec. and Anal. vol. 34 n°5 (1969) p. 361-179.

[2] M. S. Baouendi et C. Goulaouic : Régularité analytique et itérés d'opérateurs elliptiques dégénérés ; applications. (A paraître).

[3] C. Goulaouic : Interpolation entre espaces vectoriels topologiques, Ann. Inst. Fourier (1968).

[4] J. L. Lions et E. Magènes : Problèmes aux limites non homogènes. t. 3 (Dunod) Paris.