Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

M. S. Baouendi
C. Goulaouic

Problèmes d'analyticité pour des opérateurs différentiels dégénérés ; applications (suite)

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1970-1971), exp. nº 8, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1970-1971____A8_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77
(633)

SEMINAIRE GOULAOUIC-SCHWARTZ 1970-1971

PROBLEMES D'ANALYTICITE POUR DES OPERATEURS DIFFERENTIELS DEGENERES ; APPLICATIONS (Suite)

par M. S. BAOUENDI et C. GOULAOUIC

Exposé N° 8

25 Novembre 1970

B - THEOREME SUR LES ITERES D'OPERATEURS ELLIPTIQUES DEGENERES

§ 1. NOTATIONS ET HYPOTHESES.

On considère un ouvert Ω borné de $\mathbb{R}^n$ tel que $\overline{\Omega}$ soit une variété à bord analytique réelle.

Soit $\mathcal{A}$ un opérateur différentiel d'ordre 2, à coefficients analytiques sur $\overline{\Omega}$ [(•)], elliptique dans Ω, dégénérant au bord. On fait l'hypothèse :

(1.1) $\mathcal{A}$ est un isomorphisme de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ sur lui-même.

On suppose aussi qu'au voisinage d'un point du bord l'opérateur s'écrit avec les coordonnées locales (x,y) ($(x,y) \in V$ voisinage de 0 dans $\overline{\mathbb{R}^n_+}$, y étant la variable normale) sous la forme :

(1.2) $$A = D_y \, y \, D_y + \sum_{|\mu| \leq 2} b_\mu D_x^\mu + \sum_{|\mu| \leq 1} c_\mu D_x^\mu \, y \, D_y \; .$$

On suppose, de plus, qu'il existe une constante C telle que, pour tout $u \in \mathcal{D}(V)$:

(1.3) $$\|y\,u\|_{H^2(\mathbb{R}^n_+)} + \sum_{|\alpha| \leq 2} \|D_x^\alpha u\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} \leq C \, \|A\,u\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} \; .$$

Exemples : 1) On prend Ω = disque unité de $\mathbb{R}^2$.

$$\mathcal{A} = - \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i} (1-r^2) \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

en posant $\begin{cases} x_1 = r \cos\theta \\ x_2 = r \sin\theta \; . \end{cases}$

(•) Les coefficients de $\mathcal{A}$ et la variété $\overline{\Omega}$ peuvent être, dans certains énoncés, supposés seulement de classe Gevrey sur $\overline{\Omega}$. On laisse la vérification au lecteur !

2) On considère dans Ω :

$$\mathcal{A} = \sum_{\substack{|\alpha|\leq 1\\ |\beta|\leq 1}} D^\beta a_{\alpha_\beta}\, \varphi\, D^\alpha + \sum_{1\leq k,j\leq n} \Lambda^*_{k,j}\, \Lambda_{k,j}$$

où φ est une fonction analytique équivalente à la distance au bord de Ω, les fonctions a_{α_β} sont analytiques dans $\overline{\Omega}$ et vérifient :

$$\operatorname{Re} \sum_{|\beta|=|\alpha|=1} a_{\alpha_\beta}\, \xi^\alpha\, \overline{\xi^\beta} \geq C\, |\xi|^2 \quad (C>0)$$

et

$$\Lambda_{k,j} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_k} D_j - \frac{\partial\varphi}{\partial x_j} D_k \ .$$

Notons que les champs de vecteurs $\Lambda_{k,j}$ sont tangents à $\partial\Omega$.

On ne montre pas ici que les opérateurs $\mathcal{A}$ des exemples 1) et 2) vérifient les hypothèses (1.1), (1.2) et (1.3) (Cf. travaux de Bolley et Camus, à paraître, [2] et [4]).

§ 2. REGULARITE.

Nous avons :

Théorème 2.1 : Soient s un nombre réel ≥ 1 et u une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\overline{\omega}$ vérifiant :

il existe L telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $\alpha \in \mathbb{N}^{n-1}$, on ait

$$(2.1) \qquad \|D^\alpha_x D^k_y A u\|_{L^2(\omega)} \leq L^{|\alpha|+k+1} \frac{[(|\alpha|+2k)!]^s}{k!} \ .$$

Alors, pour tout compact K de ω, il existe une constante M telle que l'on ait, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $\alpha \in \mathbb{N}^{n-1}$:

$$(2.2) \qquad \|D^\alpha_x D^k_y u\|_{L^2(K)} \leq M^{|\alpha|+k+1} \frac{[(|\alpha|+2k)!]^s}{k!} \ .$$

Voici deux corollaires du théorème 2.1.

Corollaire 1 : Si $u \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ et $\mathcal{A}u$ est analytique dans $\bar{\Omega}$, alors u est aussi analytique dans $\bar{\Omega}$.

Il suffit pour le voir, de prendre $s = 1$.

Corollaire 2 : Soit $u \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

a) u est analytique dans $\bar{\Omega}$.

b) Il existe une constante K telle que l'on ait pour tout $i \in \mathbb{N}$.

(2.3) $$\|\mathcal{A}^i u\|_{L^2(\Omega)} \leq K^{i+1}(2i!).$$

En effet a) implique b) puisque $\mathcal{A}$ est un opérateur différentiel d'ordre 2 à coefficients analytiques dans $\bar{\Omega}$.

Pour montrer que b) implique a), on note, comme dans [3]

$$W(x,t) = \sum_{i=0}^{\infty} t^{2i} \frac{(\mathcal{A}^i u)}{2i!}(x)$$

et on remarque que l'on a

(2.4) $$(D_t^2 + \mathcal{A})\, W(x,t) = 0 \quad \text{dans } \bar{\Omega} \times]-\varepsilon, +\varepsilon[\; .$$

Comme $D_t^2 + \mathcal{A}$ est de la même forme que $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{R} \times \Omega$, on déduit de (2.4) et du théorème 2.1 avec $s = 1$, l'analyticité de W, donc de $u(x) = W(x,0)$.

Remarque 2.1 : La méthode précédente ne permet malheureusement pas de caractériser les fonctions $u \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ et vérifiant :

$$\|\mathcal{A}^i u\|_{L^2(\Omega)} \leq K^{i+1}(2i!)^s \qquad (s \text{ réel} > 1)\,.$$

Nous utiliserons une méthode différente (et plus compliquée) pour le faire dans le paragraphe 3.

Esquisse de la démonstration du théorème 2.1 :
(pour la démonstration complète voir [1])

1) Par une méthode d'ouverts emboîtés (voir A, § 3), on démontre d'abord :

(2.5) $$\|D_x^\alpha T u\|_{L^2(K)} \leq M^{|\alpha|+3}\,[(|\alpha|+2)!]^s$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^{n-1}$, où T est l'un des opérateurs différentiels d'ordre 2 suivants :

$$D_x^\mu \text{ pour } |\mu| = 2\ ,\ D_x^\mu D_y\, y \text{ pour } |\mu| = 1\ ,\ D_y\, y\, D_y\ .$$

2) On démontre maintenant (par récurrence sur k) qu'il existe deux constantes M_1 et M_2 vérifiant pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^{n-1}$ et tout $k \in \mathbb{N}$:

(2.6) $$\|D_x^\alpha D_y^k\, y\, u\|_{L^2(K)} \leq M_1^{|\alpha|+1}\, M_2^k\, \frac{[(|\alpha|+2k)!]^s}{k!}\ .$$

La relation (2.2) résulte alors facilement de (2.6). Pour donner une idée de la preuve de (2.6), on prend l'écriture simplifiée suivante de A :

(2.7) $$Au = D_y\, y\, D_y u + D_x^2 u \qquad \text{(2 variables x et y, n = 2).}$$

La relation (2.6) est vérifiée avec des constantes M_1 et M_2 pour $k = 0$, 1 et 2. On la suppose vérifiée jusqu'à l'ordre $k+1$ et on démontre qu'elle est aussi vérifiée pour $k+2$ (si M_1 et M_2 sont assez grandes indépendamment de k). On applique, pour cela, l'opérateur $D_x^\alpha D_y^k$ à l'équation (2.7). On obtient :

(2.8) $$\|D_x^\alpha D_y^{k+2}\, y\, u\| = \|D_x^\alpha D_y^{k+1} u\| + \|D_x^\alpha D_y^k Au\| + \|D_x^{\alpha+2} D_y^k u\|\ .$$

On utilise maintenant les deux inégalités suivantes (inégalités de Hardy) :

$$\|D_x^\alpha D_y^{k+1} u\| \le \frac{2}{2k+3} \|D_x^\alpha D_y^{k+2} y u\|$$

$$\le \frac{1}{2} \|D_x^\alpha D_y^{k+2} y u\| \qquad (k \ge 1)$$

$$\|D_x^{\alpha+2} D_y^k u\| \le \frac{2}{2k+1} \|D_x^{\alpha+2} D_y^{k+1} y u\| .$$

On obtient alors à partir de (2.8)

$$\|D_x^\alpha D_y^{k+2} y u\| \le 2\left(\|D_x^\alpha D_y^k A u\| + \frac{2}{2k+1} \|D_x^{\alpha+2} D_y^{k+1} y u\|\right) . \tag{2.9}$$

On utilise maintenant l'hypothèse (2.1) et la relation (2.6) vraie jusqu'à l'ordre $k+1$ par hypothèse de récurrence, il vient :

$$\|D_x^\alpha D_y^{k+2} y u\| \le M_1^{\alpha+1} M_2^{k+2} \frac{[(\alpha+2k+4)!]^s}{(k+2)!} \times$$

$$\left\{\left(\frac{M}{M_1}\right)^{\alpha+1} \left(\frac{M}{M_2}\right)^k \frac{1}{M_2^2} \frac{2(k+2)(k+1)}{[(\alpha+2k+4)\ \dots\ (\alpha+2k+1)]^s} + \frac{M_1^2}{M_2} \frac{4(k+2)}{2k+1}\right\} .$$

Il suffit donc pour avoir $\{\ \ \} \le 1$ de supposer

$$M_1 \ge M \quad , \quad M_2 \ge M \quad , \quad \frac{1}{M_2^2} \ge \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad 8\frac{M_1^2}{M_2} \le \frac{1}{2} \quad .$$

§ 3. THEOREME DES ITERES DE $\mathcal{A}$.

On introduit la notation :

$$R_k = \begin{cases} (D_y\, y\, D_y)^p & \text{si} \quad k = 2p \\ y\, D_y\, (D_y\, y\, D_y)^p & \text{si} \quad k = 2p+1 \end{cases} .$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N}$ on a

$$R_k \, R_{2p} = R_{k+2p}$$

$$[R_k, y D_y] = [R_k, R_1] = \{\tfrac{1}{2}\} R_k \tag{3.1}$$

où $\{\frac{1}{2}\}$ est la partie entière de $\frac{k}{2}$.

On a alors le théorème suivant :

Théorème 3.1 : Soit s un nombre réel ≥ 1. On se donne une fonction $u \in \mathcal{D}(\overline{\omega})$ vérifiant la condition suivante : il existe une constante C telle que pour tout $i \in \mathbb{N}$, on ait

$$\|A^i u\|_{L^2(\omega)} \leq C^{i+1}(2i!)^s \; . \tag{3.2}$$

Alors, pour tout compact K de $\underline{\omega}$, il existe une constante M, vérifiant, pour $\alpha \in \mathbb{N}^{n-1}$ et tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\|D_x^\alpha R_k \, u\|_{L^2(K)} \leq M^{|\alpha|+k+1}[(|\alpha|+k)!]^s \; . \tag{3.3}$$

Avant de donner une esquisse de la démonstration du théorème 3.1, donnons-en quelques conséquences. Commençons par la

Définition 3.1 : On désigne par $\mathcal{a}_s(\overline{\Omega})$ l'espace des fonctions $u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \cap G_s(\Omega)$ et vérifiant la relation (3.3) sur toute carte locale voisinage d'un point du bord de Ω.

On a alors

Proposition 3.1 : 1) $\mathcal{a}_s(\overline{\Omega})$ est un $G_s(\overline{\Omega})$ module.

2) On a alors les inclusions

$$G_s(\overline{\Omega}) \subset \mathcal{a}_s(\overline{\Omega}) \subset G_{2s-1}(\overline{\Omega})$$

(en particulier $\mathcal{A}_1(\overline{\Omega})$ = l'espace des fonctions analytiques sur $\overline{\Omega}$).

On donne ici la démonstration de 2).
On commence par démontrer par récurrence sur k que l'on a :

(3.4) $$R_{2k} D_y v(x,y) = \frac{1}{y^{k+1}} \int_0^y t^k \, R_{2(k+1)} \, v(x,t)\, dt$$

on en déduit (inégalité de Hardy) :

$$\| R_{2k} D_y v \|_{L^2(K)} \leq \frac{2}{2k+1} \| R_{2(k+1)} v \|_{L^2(K)} .$$

En réitérant (3.4), on trouve, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^{n-1}$ et tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\| D_y^k D_x^\alpha u \| \leq \frac{2^k}{k!} \| R_{2k} D_x^\alpha u \| .$$

Si u vérifie (3.3), elle vérifie donc aussi la relation

$$\| D_y^k D_x^\alpha u \| \leq (2M)^k \frac{[(|\alpha|+2k)!]^s}{k!}$$

ce qui démontre le 2) de la proposition.

<u>Théorème 3.2</u> : Soit $u \in \mathfrak{D}(\overline{\Omega})$. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

a) $u \in \mathcal{A}_s(\overline{\Omega})$

b) Il existe une constante K telle que l'on ait, pour tout $i \in \mathbb{N}$:

$$\| \mathcal{A}^i u \|_{L^2(\Omega)} \leq K^{i+1} (2i!)^s .$$

La démonstration de "a) implique b)" est laissée au lecteur. Le fait que "b) implique a)" résulte du théorème 3.1. (Pour $s = 1$, on retrouve le corollaire 2 du théorème 2.1).

<u>Esquisse de la démonstration du théorème 3.1</u> :
(La démonstration détaillée se trouve dans [1]).

1) On démontre d'abord la relation

$$\|D_x^\alpha T A^i u\|_{L^2(K)} \le M^{|\alpha|+2+1}(|\alpha|+2i+2)!^s \tag{3.5}$$

pour tout $i \in \mathbb{N}$ et out $\alpha \in \mathbb{N}^{n-1}$, où T est l'un des opérateurs D_x^μ pour $|\mu| = 2$, $D_x^\mu y D_y$ pour $|\mu| = 1$, $D_y y D_y$. On utilise pour cela une méthode "d'ouverts emboîtés", (voir A).

2) On démontre maintenant qu'il existe deux constantes K_1 et K_2 telles que l'on ait, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^{n-1}$, tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $i \in \mathbb{N}$

$$\|D_x^\alpha R_k A^i u\|_{L^2(K)} \le M_1^{|\alpha|+2i+1} M_2^k[(|\alpha|+k+2i)!]^s \quad . \tag{3.6}$$

La relation (3.3) résulte alors de (3.6).

Pour démontrer (3.6), on raisonne par récurrence sur k. La relation (3.5) montre que (3.6) est vraie pour $k = 0$, 1 et 2 (avec un certain choix de M_1 et M_2). On suppose que (3.6) est vraie jusqu'à l'ordre k+1, et on la démontre pour k+2. On applique alors l'opérateur $D_x^\alpha R_k$ à l'équation (1.2), il vient :

$$R_{k+2}D_x^\alpha A^i u = R_k D_x^\alpha A^{i+1}u - \sum_{|\mu|\le 2} R_k D_x^\alpha b_\mu D_x^\mu A^i u - \sum_{|\mu|\le 1} R_k D_x^\alpha c_\mu D_x^\mu A^i u \quad . \tag{3.7}$$

On a besoin d'une "formule de Leibnitz" pour les opérateurs R_k :

<u>Lemme 3.1</u> : Pour tout couple d'entiers m et k vérifiant

$$0 \le m \le k \quad ,$$

il existe un opérateur différentiel unique P_m^k de degré k-m et à coefficients polynômes en y, vérifiant pour tous f et g fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur $\overline{\omega}$:

$$R_k(f\,g) = \sum_{m=0}^{k} R_m(f)\; P_m^k(g) \quad . \tag{3.8}$$

En outre, si g est dans $G^s(\bar{\omega})$, il existe une constante L ne dépendant que de g telle que l'on ait, pour $\alpha \in \mathbb{N}^{n-1}$, k, j $\in \mathbb{N}$ $(j \le k)$;

$$\| P_j^k\, D_x^\alpha\, g \|_{L^\infty(\omega)} \le L^{|\alpha|+k-\ +1} [(|\alpha|+k-j)!]^s \quad . \tag{3.9}$$

Pour achever la démonstration du théorème 3.1', il suffit d'appliquer à (3.7) la formule de Leibnitz habituelle, ainsi que (3.8) et (3.9), et d'utiliser (3.6), vraie par hypothèse de récurrence jusqu'à l'ordre k+1.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. S. Baouendi et C. Goulaouic : Régularité analytique et itérés d'opérateurs elliptiques dégénérés ; applications. (A paraître).

[2] P. Bolley et J. Camus : Note C. R. Acad. Sc. (Octobre-Novembre 1970).

[3] J. L. Lions et E. Magènes : Problèmes aux limites non homogènes, t. 3 (Dunod) Paris.

[4] H. Triebel : Erzeugung des nuklearen lokalkonvexen Raumes $C^\infty(\bar{\Omega})$ durch einen elliptischen Differentialoperator zweiter Ordnung. Math. Ann. 177 (1968) p. 247-264.