Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

M. S. Baouendi
C. Goulaouic

Problèmes d'analyticité pour des opérateurs différentiels dégénérés ; applications

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1970-1971), exp. n^{o} 7, p. 1-18
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1970-1971____A7_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77

(633)

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 0 - 1 9 7 1

PROBLEMES D'ANALYTICITE POUR DES OPERATEURS DIFFERENTIELS DEGENERES ; APPLICATIONS

par M. S. BAOUENDI et C. GOULAOUIC

Exposé N° 7 18 Novembre 1970

Etant donné un opérateur différentiel $\mathcal{A}$ à coefficients analytiques dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, on peut se poser les problèmes suivants (entre autres ...) :

a) Hypoellipticité analytique. On veut savoir si les hypothèses : $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\mathcal{A}u$ analytique dans $\Omega' \subset \Omega$, impliquent u analytique dans Ω'.

b) Analyticité des solutions des problèmes aux limites, à données analytiques, associés à $\mathcal{A}$ dans un ouvert Ω_1 tel que $\overline{\Omega_1} \subset \Omega$,

c) Caractérisation des fonctions analytiques par les itérés de $\mathcal{A}$.

d) Existence et unicité locales pour le problème de Cauchy (théorème de Cauchy-Kovalewsky et d'Holmgren).

Parmi les résultats classiques sur ces problèmes, on peut signaler :

- Pour le problème de l'hypoellipticité analytique, le théorème de Petrowsky pour les opérateurs elliptiques (cf. aussi des résultats de Trèves).
- Le théorème de Morrey et Nirenberg (cf. [5]) pour le cas des problèmes aux limites.
- La caractérisation des fonctions analytiques sur un ouvert (ou sur une variété sans bord) par les itérés d'opérateurs elliptiques (theorème de Kotake et Narasimhan, 1962), la caractérisation des fonctions analytiques ou de Gevrey sur $\overline{\Omega_1}$, Ω_1 étant un ouvert régulier, par Lions et Magènes.
- Pour les problèmes de Cauchy, les résultats les plus classiques sont relatifs à des "surfaces initiales" non caractéristiques.

On se propose de regarder ces problèmes sur deux classes d'opérateurs dégénérés, afin de mettre en évidence la diversité des conclusions .. de plus les classes considérées, qui sont en un certain sens des généralisations à un ouvert de $\mathbb{R}^n$ de l'opérateur de Legendre $\frac{d}{dn}(1-x^2)\frac{d}{dx}$ sur $(-1, +1)$ permettent d'obtenir quelques applications (approximation des fonctions analytiques, interpolation entre des espaces de fonctions C^∞ sur une variété à bord, problèmes aux limites dans les classes de Gevrey ...). Il n'est pas possible ici de faire toujours le détail des calculs, aussi se contentera-t-on souvent de donner la méthode suivie et les étapes essentielles.

On fera successivement :

A - <u>Etude de l'analyticité pour une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés</u> : On aura une réponse positive pour le problème a) mais négative pour le problème c).

B - <u>Théorème sur les itérés d'opérateurs elliptiques dégénérés</u> : On aura ici une famille d'opérateurs (peu différente de celle précédemment étudiée) pour lesquels on pourra donner une réponse affirmative au problème c).

C - <u>Applications</u> : Elles reposent essentiellement sur le théorème des itérés précédemment démontré.

A - ETUDE DE L'ANALYTICITE POUR UNE CLASSE D'OPERATEURS ELLIPTIQUES DEGENERES

§ 1. INTRODUCTION

Nous utiliserons les notations :

Pour $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, on note $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$,

$\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$

$\alpha \leq \beta$ si $\alpha_k \leq \beta_k$ pour tout $k \in \{1,\dots,n\}$, et alors

$\binom{\alpha}{\beta} = \binom{\alpha_1}{\beta_1} \dots \binom{\alpha_n}{\beta_n}$.

$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$ avec $D_k = -i \frac{\partial}{\partial x_k}$.

1) Rappels de résultats sur des problèmes elliptiques dégénérés [1].

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ (♦) et Φ une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que :

$$\begin{aligned} \Omega &= \{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ \Phi(x) > 0\} \\ \partial\Omega &= \{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ \Phi(x) = 0\} \qquad (1.1) \\ d\Phi(x) &\neq 0 \quad \text{pour } x \in \partial\Omega . \end{aligned}$$

On note $\mathcal{V} = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega) \ ; \ \Phi^{\frac{1}{2}} D^\alpha u \in L^2(\Omega)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| \leq 1\}$, muni de son produit scalaire naturel. On sait que $\mathcal{V}$ est un espace normal de distributions contenu dans $L^2(\Omega)$. On considère une forme intégro-

(♦) On pourra supposer $n \geq 2$, le cas $n = 1$ étant beaucoup plus simple (et se traite immédiatement par les inégalités de Hardy).

différentielle[(♦)] :

$$a(u,v) = \sum_{\substack{|\alpha|\leq 1\\ |\beta|\leq 1}} \int_\Omega a_{\alpha\beta}(x)\, \Phi(x)\, D^\alpha u(x)\, \overline{D^\beta v(x)}\, dx \tag{1.2}$$

et on suppose que les coefficients $a_{\alpha\beta}$ sont de classe C^∞ sur $\overline{\Omega}$ et que la forme a est $\mathcal{V}$-coercive (c'est-à-dire qu'il existe une constante $\lambda > 0$ telle que l'on ait pour tout $u \in \mathcal{V}$, $\mathrm{Re}\; a(u,u) \geq \lambda \|u\|^2_{\mathcal{V}}$) .

On note $\mathcal{A}$ l'opérateur différentiel associé à la forme a :

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}(x,D) = \sum_{\substack{|\alpha|\leq 1\\ |\beta|\leq 1}} D^\beta a_{\alpha\beta}\, \Phi\, D^\alpha \quad . \tag{1.3}$$

On sait (cf. [1] ou [2]) que pour tout g dans $L^2(\Omega)$, il existe u unique vérifiant

$$\begin{cases} u \in \mathcal{V} \\ \mathcal{A}u = g \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega) \end{cases} \tag{1.4}$$

et on a, avec une constante c indépendante de g,

$$\|\Phi u\|_{H^2(\Omega)} \leq c\, \|g\|_{L^2(\Omega)}$$

et on sait aussi que si g est dans $C^\infty(\overline{\Omega})$, alors u est aussi dans $C^\infty(\overline{\Omega})$.

Exemple : On prend pour Ω la boule unité de $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire

---

(♦) On considère un problème variationnel pour fixer les idées et parce que la régularité d'un tel problème est connue (cf. [1]), mais la méthode vaut pour des problèmes non variationnels pourvu que l'on connaisse des résultats de régularité suffisants (voir travaux à paraître de Bolley et Camus).

$\{x \mid x \in \mathbb{R}^n$ et $r^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2 < 1\}$, et pour opérateur

$$\mathcal{A} = \sum_{i=1}^{n} D_i (1 - r^2) D_i + (1 - r^2).$$

2) Enoncé des résultats essentiels et méthode.

Nous allons démontrer les résultats :

Théorème 1.1 : Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $\overline{\Omega}$ et supposons que la fonction Φ et les coefficients de l'opérateur $\mathcal{A}$ soient analytiques sur $\mathcal{O}$. Alors toute fonction $u \in \mathcal{V}$ telle que $\mathcal{A}u$ soit analytique sur $\mathcal{O}$ est aussi analytique sur $\mathcal{O}$.

Comme cas particulier, nous avons bien sûr l'analyticité globale, en prenant $\mathcal{O} = \overline{\Omega}$ dans le théorème ci-dessus.

La méthode de démonstration nous permet d'obtenir aussi le

Théorème 1.2 : Si la fonction Φ et les coefficients de l'opérateur $\mathcal{A}$ sont analytiques sur $\overline{\Omega}$, les fonctions propres de l'opérateur sont analytiques sur $\overline{\Omega}$.

Remarque 1.1 : Ces énoncés restent valables si on remplace partout "analytique" par "de classe G_s $(s \geq 1)$", avec les mêmes démonstrations, mais pour gagner un peu de clarté, on se contentera ici du cas analytique (cf. [2]).

Remarque 1.2 : Les méthodes de démonstrations étant toutes locales, on vérifie facilement que l'on obtient des énoncés analogues en remplaçant $\overline{\Omega}$ par une variété à bord convenable.

Schéma de la méthode : La méthode suivie ici est inspirée de Morrey et Nirenberg [5] (qui est utilisable aussi bien pour des problèmes d'analyticité à l'intérieur, que pour des problèmes de régularité au bord pour des problèmes aux limites) ; l'idée consiste à obtenir d'abord des majorations des dérivées presque tangentielles en utilisant une technique d'ouverts emboîtés ; puis on obtient (toujours par récurrence) une estimation de toutes les dérivées. En fait, nous allons appliquer cette méthode ici pour obtenir des estimations et l'analyticité de $\mathfrak{F}u$, ce qui nécessite un usage important des inégalités de Hardy ; de là, on déduit l'analyticité de u. (Signalons que cette méthode est un peu particulière, due à la forme de l'opérateur, et qu'il faudra procéder différemment pour la classe d'opérateurs étudiée la prochaine fois).

Commençons par rappeler quelques résultats sur les inégalités de Hardy et les fonctions analytiques.

3) Inégalités de Hardy.

On considère une fonction h assez régulière (par exemple C^∞) de $[0,\infty[$ dans $\mathbb{C}$ (ou dans un espace de Banach) ; on peut écrire (avec $\partial_t = \frac{d}{dt}$) :

$$h(t) = \frac{1}{t}\int_0^t (\partial_\sigma \sigma h(\sigma))\, d\sigma \tag{1.6}$$

d'ou

$$\partial^k h(t) = \frac{1}{t^{k+1}} \int_0^t \sigma^k\, \partial^{k+1}(\sigma h(\sigma))\, d\sigma \tag{1.7}$$

et on en déduit, si $D^{k+1} th \in L^2(0,\infty)$,

$$\left\{\begin{aligned} & \|D^k h\|_{L^2(0,\infty)} \le H_k \, \|D^{k+1}\, th(t)\|_{L^2(0,\infty)} , \text{ avec} \\ & H_k = \frac{2}{2^{k+1}} \quad \text{pour } k \in \mathbb{N} . \end{aligned}\right. \tag{1.8}$$

Cette inégalité étant aussi valable sur $(0,T)$ au lieu de $(0,\infty)$.

4) Remarques sur les fonctions analytiques.

On utilisera la caractérisation suivante des fonctions analytiques sur $\overline{\omega}$, ω étant un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$: pour que u soit analytique sur $\overline{\omega}$, $(u \in \mathfrak{A}(\overline{\omega}))$, il faut et il suffit qu'il existe une constante $L > 0$ telle que l'on ait

$$\|D^\alpha u\|_{L^2(\omega)} \leq L^{|\alpha|+1} |\alpha|! \quad \text{pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^n ,$$

(avec la possibilité de remplacer $L^2(\omega)$ par $L^\infty(\omega)$, ou bien $|\alpha|!$ par $\alpha!$).

Enfin, remarquons que si la fonction $(x,y) \mapsto u(x,y)$ est une fonction C^∞ de $\overline{\omega}$ dans $\mathbb{C}$, avec $\overline{\omega} \subset \overline{\mathbb{R}^n_+}$, et que yu est analytique, alors u est analytique sur $\overline{\omega}$.

Nous adopterons le plan suivant :

2. Notations et inégalités de régularité locale
3. Majoration des dérivées presque tangentielles
4. Majoration de toutes les dérivées
5. Remarques : - dégénérescence à l'intérieur
   - contre-exemples.

§ 2. NOTATIONS ET INEGALITES DE REGULARITE LOCALE

On veut étudier l'analyticité de u sur un voisinage d'un point de $\partial\Omega$ où la fonction Φ et les coefficients de $\mathcal{A}$ sont analytiques (l'analyticité à l'intérieur étant classique, cf. [3] par exemple).

Par un changement analytique de coordonnées, on peut se ramener au cas :

$$\begin{aligned} Au = D_y y\, D_y u + \sum_{|\mu|=2} b_\mu D_x^\mu yu + \sum_{|\mu|\leq 1} c_\mu D_x^\mu D_y yu \\ + \sum_{|\mu|\leq 1} d_\mu D_x^\mu u = g , \end{aligned} \tag{2.1}$$

avec tous les coefficients b_μ, c_μ, d_μ et g analytiques sur un ouvert Ω' de $\overline{\mathbb{R}^n_+}$ (on conserve les mêmes notations u, g pour l'étude dans Ω et dans $\mathbb{R}^n_+$ après localisation et on note A l'opérateur déduit de $\mathcal{A}$ par la localisation).

De l'inégalité (1.5) on déduit en particulier, après localisation, qu'il existe une constante $C > 0$ telle que l'on ait pour tout $u \in \mathcal{D}(\Omega')$:

$$\|y\, u\|_{H^2(\mathbb{R}^n_+)} \leq C_o \|A\, u\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} \tag{2.2}$$

($H^m(\Omega)$ désigne de façon générale l'espace de Sobolev $\{u \in \mathcal{D}'(\Omega) \; ; \; D^\alpha u \in L^2(\Omega)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| \leq m\}$).

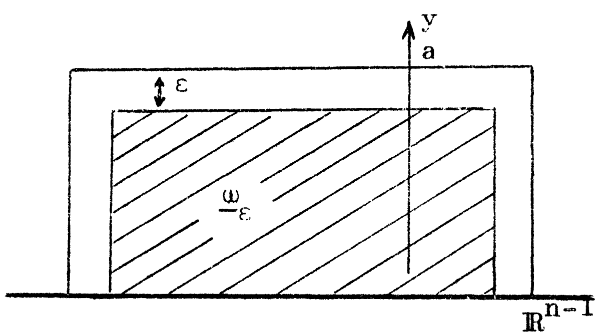
<u>Introduisons quelques notations</u> :

En désignant par ω un cylindre ouvert de $\mathbb{R}^n$ de la forme $\omega_x \times]0,a[$ avec ω_x ouvert de $\mathbb{R}^{n-1}$, on note :

$\overline{\omega}$ la fermeture de ω dans $\mathbb{R}^n$,

$\underline{\omega}$ l'ensemble $\omega_x \times [0,a[$.

Pour tout $\varepsilon \in [0,a]$, on note



$$\underline{\omega}_\varepsilon = \{(x,y) \in \underline{\omega} \; ; \; y < a-\varepsilon \text{ et } d(x,\partial\omega_x) > \varepsilon\}.$$

Pour une fonction $v \in L^2(\underline{\omega}_\varepsilon)$, on notera :

$$N_\varepsilon(v) = \|v\|_{L^2(\underline{\omega}_\varepsilon)} .$$

On démontre le lemme général suivant :

<u>Lemme 2.1</u> : Il existe une constante $C_1 > 0$ (qui ne dépend que de ω et de la borne supérieure sur ω des coefficients de l'opérateur A) telle que l'on ait pour tous ε, ε_1 strictement positifs et tout $v \in H^2(\omega)$ et tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$ de longueur $|\alpha| \leq 2$

$$\varepsilon^{|\alpha|} N_{\varepsilon+\varepsilon_1}(D^\alpha yv) \leq C_1 \{\varepsilon^2 N_{\varepsilon_1}(Av) + \varepsilon \sum_{|\beta|=1} N_{\varepsilon_1}(D^\beta yv) + N_{\varepsilon_1}(yv)\} .$$

Démonstration : Il suffit de considérer le cas $|\alpha| = 2$, les cas $|\alpha| < 2$ étant évidents.
La démonstration se fait en appliquant l'inégalité (2.2) à une fonction $u = \phi v$ où ϕ est choisie dans $\mathcal{D}(\underline{\omega}_{\varepsilon_1})$, valant 1 sur $\underline{\omega}_{\varepsilon+\varepsilon_1}$, et telle que $\|D^\gamma \phi\|_{L^\infty(\omega)} \leq C_2 \varepsilon^{-|\gamma|}$ pour tout $\gamma \in \mathbb{N}^n$ avec C_2 indépendant de ε, ε_1, γ.

§ 3. MAJORATION DES DERIVEES PRESQUE TANGENTIELLES

On garde les notations et les hypothèses du paragraphe 2.
Le résultat essentiel de ce paragraphe est le suivant :

Lemme 3.1 : Soient K un compact contenu dans $\underline{\omega}$ et u une fonction C^∞ sur $\underline{\omega}$ telle que Au soit analytique sur un voisinage de K. Il existe une constante $C > 0$ telle que l'on ait :

$$\|D^\alpha yu\|_{L^2(K)} \leq C^{|\alpha|+1}(|\alpha|!) \quad \text{pour tout } \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$$

$$\text{tel que} \quad 0 \leq \alpha_n \leq 2.$$

On part de la relation (2.1) que l'on dérive par rapport à x ; on obtient :

$$A(D_x^\alpha u) = D_x^\alpha(Au) + Q_\alpha u \quad , \quad \text{avec} \tag{3.1}$$

$$Q_\alpha u = \sum_{|\mu|=2} [b_\mu D_x^\mu, D_x^\alpha] yu + \sum_{|\mu|\leq 1} [c_\mu D_x^\mu, D_x^\alpha] D_y yu + \sum_{|\mu|\leq 1} [d_\mu D_x^\mu, D_x^\alpha] u .$$

On trouve dans $Q_\alpha u$ des termes de la forme :

$$U_1 = \sum_{|\beta|\geq 1} \binom{\alpha}{\beta} D_x^\beta b_\mu \, D_x^{\alpha-\beta+\mu} yu \qquad \text{avec} \quad |\mu| = 2$$

$$U_2 = \sum_{|\beta|\geq 1} \binom{\alpha}{\beta} D_x^\beta c_\mu \, D_x^{\alpha-\beta+\mu} D_y yu \qquad \text{avec} \quad |\mu| \leq 1$$

$$U_3 = \sum_{|\beta|\geq 1} \binom{\alpha}{\beta} D_x^\beta d_\mu \, D_x^{\alpha-\beta+\mu} u \qquad \text{avec} \quad |\mu| \leq 1 .$$

On utilise maintenant le lemme 2.1 où l'on remplace v par $D_x^\alpha \mathbf{u}$; on obtient pour tout $\nu \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\nu| = 2$:

$$N_{\varepsilon+\varepsilon_1}(D_x^\alpha D^\nu yu) \leq C_1 \{N_{\varepsilon_1}(D_x^\alpha Au) + N_{\varepsilon_1}(Q_\alpha u) + \varepsilon^{-1} \sum_{|\mu|=1} N_{\varepsilon_1}(D_x^\alpha D^\mu yu) + \varepsilon^{-2} N_{\varepsilon_1}(D_x^\alpha yu)\}.$$

Majorons $N_{\varepsilon_1}(Q_\alpha u)$:

On remarque que la majoration d'un terme de la forme U_3 se ramène par l'inégalité de Hardy à celle obtenue pour un terme de la forme U_2. On obtient :

$$N_{\varepsilon_1}(Q_\alpha u) \leq 2 \sum_{\substack{\mu \in \mathbb{N}^n \\ |\mu| \leq 2 \\ \mu_n = 0 \text{ ou } 1}} \sum_{|\beta| \geq 1} \binom{\alpha}{\beta} \|D_x^\beta h_\mu\|_{L^\infty(\omega)} N_{\varepsilon_1}(D_x^{\alpha-\beta} D^\mu yu)$$

où h_μ est le coefficient d'indice correspondant dans A.

On utilise l'hypothèse d'analyticité des coefficients de A sous la forme :

(3.4) <u>Il existe une constante</u> $L > 0$ <u>telle que l'on ait</u>

$$\sup_{h_\mu} \|D^\gamma h_\mu\|_{L^\infty(\omega)} \leq L^{|\gamma|+1}(\gamma!) \leq L^{|\gamma|+1}(|\gamma|!) \ \underline{\text{pour tout}}\ \gamma\ \underline{\text{dans}}\ \mathbb{R}^n,$$

<u>le</u> sup <u>portant sur tous les coefficients de</u> A.

Des relations (3.2), (3.3) et (3.4) on déduit finalement :

$$\left| \begin{array}{l} N_{\varepsilon+\varepsilon_1}(D_x^\alpha D^\nu yu) \leq C_1 \{N_{\varepsilon_1}(D_x^\alpha Au) + \varepsilon^{-1} \sum_{|\mu|=1} N_{\varepsilon_1}(D_x^\alpha D^\mu yu) + \varepsilon^{-2} N_{\varepsilon_1}(D_x^\alpha yu) \\ \qquad + 2 \sum_{\substack{|\mu| \leq 2 \\ \mu_n \leq 1}} \sum_{|\beta| \geq 1} \binom{\alpha}{\beta} L^{|\beta|+1}(|\beta|!) N_{\varepsilon_1}(D_x^{\alpha-\beta} D^\mu yu)\} \\ \text{pour tout } \nu \in \mathbb{N}^n \text{ tel que } |\nu| = 2. \end{array} \right. \quad (3.5)$$

De cette inégalité (3.5) on déduit le résultat [(♦)].

<u>Lemme 3.2</u> : On suppose la fonction Au analytique dans $\bar{\omega}$; alors on peut trouver une constante $M>0$ telle que l'on ait pour tout $\varepsilon>0$ et pour tout $\gamma \in \mathbb{N}^n$ tel que $\gamma_n \leq 2$:

$$N_{|\gamma|\varepsilon}(D^\gamma yu) \leq M^{|\gamma|+1}\,\varepsilon^{-|\gamma|} \quad . \tag{3.6}$$

<u>Démonstration</u> : On fait une récurrence sur $|\gamma|$; la relation (3.6) est évidemment valable pour $|\gamma|$ borné avec un choix convenable de la constante M. On suppose que M est choisie pour que (2.6) soit valable pour $|\gamma| \leq j$ et on détermine les conditions pour que cette même constante soit aussi valable pour $|\gamma| = j+1$.

On utilise (3.5) avec $\varepsilon_1 = j\varepsilon$ et $|\alpha| = |\gamma| - 2 = j-1$.

On a :

$$N_{(j+1)\varepsilon}(D^\gamma yu) \leq C_1\{N_{j\varepsilon}(D_x^\alpha Au) + \varepsilon^{-1}\sum_{|\mu|=1} N_{j\varepsilon}(D_x^\alpha D^\mu yu) + \varepsilon^{-2}N_{j\varepsilon}(D_x^\alpha yu) + 2\sum_{\substack{|\mu|\leq 2\\ \mu_n\leq 1}}\ \sum_{|\beta|\geq 1}\binom{\alpha}{\beta} L^{|\beta|+1}(|\beta|!)\,N_{j\varepsilon}(D_x^{\alpha-\beta}D^\mu yu)\} \ . \tag{3.7}$$

On vérifie que la récurrence peut s'appliquer, car le membre de droite ne contient des dérivations de yu que d'ordre $\leq j$, et pour $k<j$ on a toujours $N_{j\varepsilon} \leq N_{k\varepsilon}$.

On note N le nombre de coefficients de l'opérateur A ; on utilise l'analyticité de Au sous la forme : Il existe une constante (que l'on peut choisir être L comme dans (3.4)) telle que l'on ait :

$$N_{j\varepsilon}(D^\alpha Au) \leq L^{|\alpha|+1}(|\alpha|!) \quad \text{pour tout} \quad \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ et } j \in \mathbb{N} \ . \tag{3.8}$$

(♦) Pour des raisons techniques, on peut supposer $a \leq 1$ dans la définition de ω, donc $N_{j\varepsilon}(\,.\,)$ est toujours nul pour $j\varepsilon \geq 1$.

On obtient :

$$N_{(j+1)\varepsilon}(D^{\gamma}yu) \le C_1\{L^j((j-1)!) + \varepsilon^{-1} N M^{j+1} \varepsilon^{-j} + \varepsilon^{-2} M^j \varepsilon^{(-j+1)}$$
$$+ 2 \sum_{|\beta|\ge 1} \binom{\alpha}{\beta} L^{|\beta|+1}(|\beta|!) N M^{j+2-|\beta|} \varepsilon^{-(j+1-|\beta|)}\} .$$

Pour avoir $N_{(j+1)\varepsilon}(D^{\gamma}yu) \le M^{j+2} \varepsilon^{-(j+1)}$, il suffit d'avoir :

$$C_1\{L^j M^{-j-2}((j-1)!) \varepsilon^{(j+1)} + N M^{-1} + M^{-2}$$
$$+ 2 \sum_{|\beta|\ge 1} \binom{\alpha}{\beta} (|\beta|!) N L^{|\beta|+1} M^{-|\beta|} \varepsilon^{|\beta|}\} \le 1 . \tag{3.9}$$

On remarque que sous la condition $j\varepsilon \le 1$, on peut majorer le premier terme de cette somme par

$$C_1 L^j M^{-j-2}((j-1)!) \varepsilon^{(j+1)} (j\varepsilon)^{-(j+1)} = C_1 \left(\frac{L}{M}\right)^j M^{-2}((j-1)!) j^{-(j+1)} .$$

On peut donc choisir M assez grand (par rapport à L) pour avoir la somme des trois premiers termes de (3.9) majorée par $\frac{1}{2}$.

En remarquant que l'on a :

$$\binom{\alpha}{\beta} \le \binom{|\alpha|}{|\beta|} \text{ et } (|\alpha|(|\alpha|-1) \ldots (|\alpha| - |\beta|+1)\varepsilon^{|\beta|}) \le 1 \text{ pour } j\varepsilon \le 1,$$

on obtient :

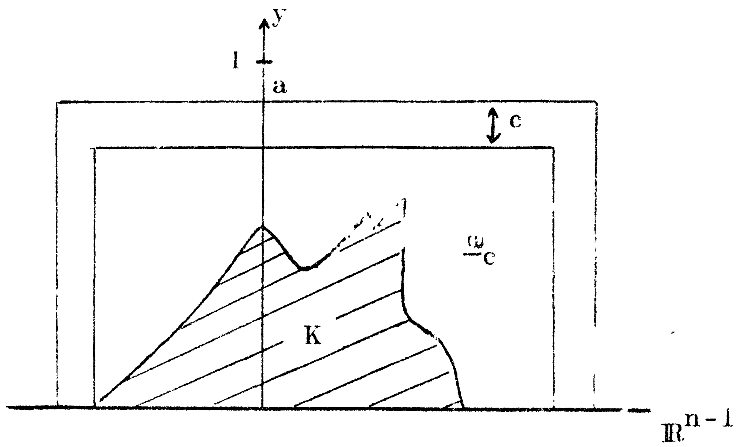
$$2C_1 \sum_{|\beta|\ge 1} \binom{\alpha}{\beta} (|\beta|!) N L^{|\beta|+1} M^{-|\beta|} \varepsilon^{|\beta|} \le 2C_1 N L \sum_{|\beta|\ge 1} \left(\frac{L}{M}\right)^{|\beta|}$$

que l'on peut toujours rendre $\le \frac{1}{2}$ pourvu que M soit assez grand.

Le lemme 3.2 est donc démontré.

Le lemme 3.2 entraîne le lemme 3.1, en effet :

Etant donné K, il existe $c > 0$ tel que l'on ait $K \subset \underline{\omega}_c$.



On utilise le lemme 3.2 avec $\varepsilon = \frac{c}{|\gamma|}$; ce qui donne :

$$N_c(D^\gamma yu) \le M^{|\gamma|+1} c^{-|\gamma|} |\gamma|^{|\gamma|}$$

ce qui implique l'existence d'une constante $C > 0$ telle que l'on ait :

$$N_c(D^\gamma yu) \le C^{|\gamma|+1}(|\gamma|!) \quad \text{pour} \quad \gamma \in \mathbb{N}^n \quad \text{avec} \quad \gamma_n \le 2.$$

§ 4. MAJORATION DE TOUTES LES DERIVEES ET CONCLUSIONS

Sous le hypothèses du lemme 3.1, on démontre le résultat suivant

Lemme 4.1 : Il existe deux constantes M_1 et M_2 strictement positives telles que l'on ait pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, ($\alpha = (\alpha', k)$ avec $\alpha' \in \mathbb{N}^{n-1}$) :

$$\|D^\alpha yu\|_{L^2(K)} \le M_1^{|\alpha'|+1} M_2^{k+1} (|\alpha|!) \quad (\bullet) \quad . \tag{4.1}$$

$(\bullet)$ Toutes les normes utilisées dans ce paragraphe étant dans $L^2(K)$ nous omettrons désormais de l'indiquer.

Démonstration : On remarque d'abord que l'on est amené à introduire deux constantes a priori distinctes pour des raisons techniques dans la démonstration par récurrence.

On démontre ce lemme par récurrence sur k ; d'après le lemme 3.1, on sait que l'on peut vérifier l'inégalité (4.1) pour $k \leq 2$. Supposons que l'on ait trouvé des constantes M_1, M_2 qui conviennent jusqu'à l'ordre k et montrons que, si le choix est convenable, indépendamment de k, elles conviennent aussi à l'ordre k+1.

On récrit (2.1) sous la forme :

$$D_y y D_y u = Au - \sum_{|\mu|=2} b_\mu D_x^\mu yu - \sum_{|\mu|\leq 1} c_\mu D_x^\mu D_y yu - \sum_{|\mu|\leq 1} d_\mu D_x^\mu u \quad .$$

On applique aux deux membres l'opérateur de dérivation $D_x^\alpha D_y^{k-1}$; on obtient :

$$\left|\begin{array}{ll} D_x^\alpha D_y^k y D_y u = D_x^\alpha D_y^{k-1} Au - \sum\limits_{|\mu|=2} U_\mu - \sum\limits_{|\mu|\leq 1} V_\mu - \sum\limits_{|\mu|\leq 1} W_\mu & \\ \text{avec} \qquad U_\mu = D_x^\alpha D_y^{k-1} b_\mu D_x^\mu yu & \\ \qquad\qquad V_\mu = D_x^\alpha D_y^{k-1} c_\mu D_x^\mu D_y yu & \\ \qquad\qquad W_\mu = D_x^\alpha D_y^{k-1} d_\mu D_x^\mu u \ . & \end{array}\right. \tag{4.2}$$

On a d'abord :

$$D_\mu^\alpha D_y^k y D_y u = D_x^\alpha D_y^{k-1} yu + D_n^\alpha D_y^k u$$

$$\|D_x^\alpha D_y^{k+1} yu\| \leq \|D_x^\alpha D_y^k y D_y u\| + \|D_x^\alpha D_y^k u\| \ ,$$

et en utilisant l'inégalité de Hardy (1.8), on obtient, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$:

$$\|D_x^\alpha D_y^{k-1} yu\| \leq 2\|D_x^\alpha D_y^k y D_y u\| \quad . \tag{4.3}$$

Par ailleurs, on a :

$$U_\mu = \sum_{\substack{|\beta|\geq 0\\ j\geq 0}} \binom{\alpha}{\beta}\binom{k-1}{j} D_x^\beta D_y^j b_\mu D_x^{\alpha-\beta+\mu} D_y^{k-j-1} yu \quad , \quad \text{avec} \quad |\mu| = 2$$

$$V_\mu = \sum_{\substack{|\beta|\geq 0\\ j\geq 0}} \binom{\alpha}{\beta}\binom{k-1}{j} D_x^\beta D_y^j c_\mu D_x^{\alpha-\beta+\mu} D_y^{k-j} yu \quad , \quad \text{avec} \quad |\mu| \leq 1$$

$$W_\mu = \sum_{\substack{|\beta|\geq 0\\ j\geq 0}} \binom{\alpha}{\beta}\binom{k-1}{j} D_x^\beta D_y^j d_\mu D_x^{\alpha-\beta+\mu} D_y^{k-1-1} u \quad , \quad \text{avec} \quad |\mu| \leq 1 \quad .$$

On pourra majorer $\|U_\mu\|$, $\|V_\mu\|$ et $\|W_\mu\|$ en utilisant l'hypothese de récurrence et en remarquant que la majoration de $\|W_\mu\|$ se ramène (en utilisant encore l'inégalité de Hardy (1.8) sur $\|D_x^{\alpha-\beta+\mu} D_y^{k-j-1} u\|$) aux mêmes calculs que pour la majoration des termes de la forme $\|V_\mu\|$.

On a :

$$\|U_\mu\| \leq \sum_{\substack{|\beta|\geq 0\\ j\geq 0}} \binom{\alpha}{\beta}\binom{k-1}{j} L^{|\beta|+j+1}(|\beta|!)(j!)\, M_1^{|\alpha-\beta+\mu|+1} M_2^{k-j}((|\alpha-\beta|+k-j+1)!)$$

$$\leq M_1^{|\alpha|+1} M_2^{k+2}((|\alpha|+k+1)!) \sum_{\substack{|\beta|\geq 0\\ j\geq 0}} L\left(\frac{M_1}{M_2}\right)^2 \left(\frac{L}{M_1}\right)^{|\beta|} \left(\frac{L}{M_2}\right)^j$$

$$\left(\frac{|\alpha|!(k-1)!(|\alpha-\beta|+k-j-1)!}{|\alpha-\beta|!(k-j-1)!(|\alpha|+k+1)!}\right)$$

$$\leq M_1^{|\alpha|+1} M_2^{k+2}((|\alpha|+k+1)!)\, L\left(\frac{M_1}{M_2}\right)^2 \Big(\sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}^{n-1}\\ |\beta|\geq 0}} \left(\frac{L}{M_1}\right)^{|\beta|}\Big)\Big(\sum_{j\geq 0}\left(\frac{L}{M_2}\right)^j\Big) \quad .$$

De même, on obtient les majorations :

$$\|V_\mu\| \leq M_1^{|\alpha|+1} M_2^{k+2}((|\alpha|+k+1!)\, L\left(\frac{M_1}{M_2}\right) \Big(\sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}^{n-1}\\ |\beta|\geq 0}} \left(\frac{L}{M_1}\right)^{|\beta|}\Big)\Big(\sum_{j\geq 0}\left(\frac{L}{M_2}\right)^j\Big).$$

$$\|W_\mu\| \leq M_1^{|\alpha|+1} M_2^{k+2}((|\alpha|+k+1)!)\, 2L\left(\frac{M_1}{M_2}\right) \Big(\sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}^{n-1}\\ |\beta|\geq 0}} \left(\frac{L}{M_1}\right)^{|\beta|}\Big)\Big(\sum_{j\geq 0}\left(\frac{L}{M_2}\right)^j\Big) \quad .$$

On peut choisir déjà M_1 et M_2 assez grands pour avoir :

$$\Big(\sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}^{n-1}\\|\beta|\geq 0}} \big(\frac{L}{M_1}\big)^{|\beta|}\Big)\Big(\sum_{j\geq 0} \big(\frac{L}{M_2}\big)^{j}\Big) \leq 2 \quad . \tag{4.4}$$

On a alors (compte tenu de (4.2) et (4.3)) :

$$\frac{1}{2}\,\|D_x^\alpha D_y^{k+1} yu\| \leq \|D_x^\alpha D_y^{k-1} Au\| + M_1^{|\alpha|+1} M_2^{k+2}((|\alpha|+k+1)!)\,\{NL\big(\frac{M_1}{M_2}\big)^2 + 3NL\big(\frac{M_1}{M_2}\big)\} \tag{4.5}$$

En utilisant l'hypothèse d'analyticité de Au (cf. (3.8)), on vérifie que l'on obtient :

$$\|D_x^\alpha D_y^{k+1} u\| \leq M_1^{|\alpha|+1} M_2^{k+2}((|\alpha|+k+1)!)$$

pourvu que l'on ait :

$$\frac{L^{|\alpha|+k}}{M_1^{|\alpha|+1}\; M_2^{k+2}} + NL\big(\frac{M_1}{M_2}\big)\;\big(3+\frac{M_1}{M_2}\big) \leq \frac{1}{2} \quad , \tag{4.6}$$

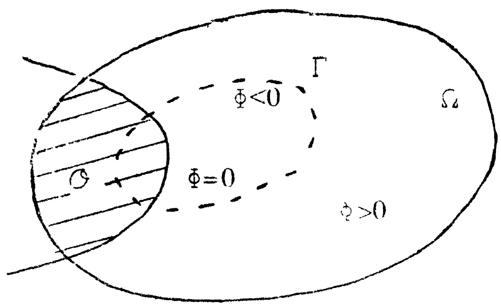
ce qui est toujours réalisable en choisissant M_1, assez grand par rapport à L et M_2 assez grand par rapport à M_1.

Le lemme 4.1 est donc démontré, et il implique que la fonction yu est analytique sur K, donc la fonction u est analytique sur K.

La démonstration du théorème 1 est terminée ; pour obtenir le théorème 2, il suffit de remarquer que les estimations sont les mêmes si on remplace (3.1) par $A(D_x^\alpha u) = D_x^\alpha(\lambda u) + Q_\alpha u$ avec λ analytique.

§ 5. REMARQUES

1) Dégérescence à l'intérieur.



On considère un opérateur de la forme (1.3) dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, Φ étant une fonction C^∞ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

(5.1) $\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \Phi(x) = 0\}$ est une hypersurface $\Gamma \subset \Omega$ et on a $d\Phi(x) \neq 0$ pour tout $x \in \Gamma$.

Dans ce cas l'opérateur $\mathcal{A}$ est elliptique (non dégénéré) de part et d'autre de Γ dans Ω, mais dégénère sur Γ et a un signe différent de part et d'autre de Γ. Cet opérateur n'est pas hypoelliptique au sens usuel cependant on montre, par la méthode ci-dessus, le résultat :

Théorème 5.1 : Soit $\mathcal{O}$ un ouvert contenu dans Ω et supposons que les coefficients de $\mathcal{A}$ et Φ soient analytiques dans $\mathcal{O}$.

Soit u une fonction C^∞ dans $\mathcal{O}$ telle que $\mathcal{A}u$ soit analytique dans $\mathcal{O}$; alors u est elle-même analytique dans $\mathcal{O}$.

2) Contre-exemples.

Par un argument de [4], on montre que si $D_t^2 + \mathcal{A}$ a la propriété d'analyticité locale dans $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}$, $\mathcal{A}$ a la propriété suivante :

(5.1) Si u est $C^\infty(\bar{\Omega})$ et vérifie $\|\mathcal{A}^k u\|_{L^2(\Omega)} \leq C^{k+1}\, 2k!$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, alors u est analytique dans $\bar{\Omega}$.

Il suffit pour cela de considérer la fonction

$$W(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty} t^{2m} \frac{\mathcal{A}^m u(x)}{2m!}$$

et de remarquer que l'on a :
$$\begin{cases} D_t^2 W + \mathcal{A} W = 0 \\ W(x,0) = u(x). \end{cases}$$

Pour l'opérateur $\mathcal{A} = \sum_{i=1}^{2} D_1(1-r^2)D_i + (1-r^2)$, la propriété (5.1) est fausse (contre-exemple qui nous a été signalé par L. Boutet de Monvel) : il suffit de remarquer que sur les fonctions holomorphes dans le disque unité ouvert, $\mathcal{A}$ se réduit à un opérateur du 1er ordre.

On en déduit donc la non-analyticité locale pour l'opérateur $D_t^2 + \mathcal{A}$ qui est aussi un opérateur elliptique apparemment "moins dégénéré" que $\mathcal{A}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M.S. Baouendi et C. Goualouic : Régularité et théorie spectrale pour une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés, Arch. for Rat. Mec. and Anal. Vol.34 N°5 (1969) p. 361-379.

[2] M.S.Baouendi et C. Goulaouic : Etude de l'analyticité et de la régularité Gevrey pour une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés, Ann. E.N.S. Paris (à paraître).

[3] L. Hörmander : Linear partial differential operators, Springer (1963).

[4] J.L. Lions et E. Magènes : Problèmes aux limites non homogènes, t. 1 et 3 (Dunod) Paris 1968-1970.

[5] C.B. Morrey et L. Nirenberg : C.P.A.M. 10 (1957) p. 271-290.