Séminaire Équations aux dérivées partielles – École Polytechnique

A. Unterberger

J. Unterberger

Opérateurs pseudo-différentiels (suite 1)

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1970-1971), exp. nº 4, p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1970-1971____A4_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77

(633)

SEMINAIRE GOULAOUIC-SCHWARTZ 1970-1971

OPERATEURS PSEUDO-DIFFERENTIELS (Suite 1)

par A. et J. UNTERBERGER

Exposé N° 4

21 Octobre 1970

§ 2. COMPOSITION - CARACTERE PSEUDO-LOCAL - TRANSPOSITION

Théorème (II.1) : Soient $a \in \mathcal{S}(X \times \Xi ; m_1)$ et $b \in \mathcal{S}(X \times \Xi ; m_2)$; posons $(a \# b)(x,\eta) = \int e^{2i\pi x\theta} a(x,\theta+\eta)\, \hat{b}^1(\theta,\eta)d\theta$. Alors $a \# b$ appartient à $\mathcal{S}(X \times \Xi ; m_1+m_2)$ et $(\mathrm{Op}\, a) \circ (\mathrm{Op}\, b) = \mathrm{Op}(a \# b)$.
De plus, pour tout entier $k \geq 1$,

$$a \# b - \sum_{0 \leq |r| \leq k-1} \frac{1}{r!} \partial_\xi^r a\, D_x^r b \quad \text{appartient à } \mathcal{S}(X \times \Xi ; m_1+m_2-k) .$$

Preuve : En effet

$$\widehat{(\mathrm{Op}\, a)_\circ(\mathrm{Op}\, b)u}(\xi) = \int \hat{a}^1(\xi-\zeta,\zeta)d\zeta \int \hat{b}^1(\zeta-\eta,\eta)\, \hat{u}(\eta)d\eta \quad .$$

En appliquant Fubini et en posant $\zeta = \eta + \theta$ cela s'écrit encore :

$$\int f(\xi-\eta,\eta)\, \hat{u}(\eta)\, d\eta$$

avec $$f(\xi,\eta) = \int \hat{a}^1(\xi-\theta,\ \eta-\theta)\ \hat{b}^1(\theta,\eta)\, d\theta = \widehat{(a \# b)}^1(\xi,\eta) .$$

Rappelons que la transformation de Fourier par rapport à la première variable est, pour tout m, un isomorphisme de $\mathcal{S}(X \times \Xi ; m)$ sur $\mathcal{S}(\Xi \times \Xi ; m)$.

On laisse au lecteur éventuel le soin de démontrer que $a \# b \in \mathcal{S}(X \times \Xi ; m_1+m_2)$ en utilisant deux fois l'inégalité de Peetre.

Pour obtenir le développement limité annoncé, posons

$$F(\xi,\eta) = \mathfrak{F}^1[a \# b - \sum_{0 \leq |r| \leq k-1} \frac{1}{r!} \partial_2^r a\, D_1^r b](\xi,\eta) \quad ,$$

où ∂_1^r (resp. ∂_2^r) signifient que l'on prend les dérivées d'un symbole par rapport à celles des coordonnées qui sont dans X (resp. Ξ) : cette notation permet de changer le nom des variables sans risquer de confusion.
Il s'agit de montrer que $F(\xi,\eta)$ appartient à $\mathcal{S}(\Xi \times \Xi ; m_1+m_2-k)$.

On peut écrire

$$F(\xi,\eta) = \int [\hat{a}^1(\xi-\theta,\eta+\theta) - \sum_{0\le|r|\le k-1} \frac{1}{r!}\, \theta^r \partial_2^r \hat{a}^1(\xi-\theta,\eta)]\hat{b}^1(\theta,\eta)d\theta \ .$$

Grâce à la formule de Taylor, le crochet se majore par

$$C\ |\theta|^k(1+|\eta+\lambda\theta|^2)^{(m_1-k)/2}(1+|\xi-\theta|^2)^{-M}$$

pour tout M, avec $0<\lambda<1$.
Comme, pour tout N, $|\hat{b}^1(\theta,\eta)| \le C(1+|\eta|^2)^{m_2/2}(1+|\theta|^2)^{-N}$, l'inégalité de Peetre appliquée deux fois permet d'écrire

$$|F(\xi,\eta)| \le C\int(1+|\theta|^2)^{-N+\frac{k}{2}+M+\frac{|m_1-k|}{2}}(1+|\eta|^2)^{(m_1+m_2-k)/2}(1+|\xi|^2)^{-M}d\theta$$

$$\le C(1+|\eta|^2)^{(m_1+m_2-k)/2}(1+|\xi|^2)^{-M} \ .$$

On voit aisément qu'une telle majoration vaut aussi pour une dérivée mixte d'ordre quelconque de F, ce qui démontre la théorème (II.1).

<u>Remarque (II.1)</u> : Le même développement asymptotique est valable lorsque a et b appartiennent à S^{m_1} et S^{m_2} respectivement, encore qu'il soit préférable de noter autrement, si l'on en a l'usage, l'expression "sans reste" de $a \# b$.

<u>Théorème (II.2)</u> ; (Caractère <u>pseudo-local</u> des opérateurs pseudo-différentiels) : <u>Soient $a\in S^m$ et $u\in \mathcal{E}'(X)$ de classe C^∞ dans un ouvert Ω de X. Alors Op(a)(u) est de classe C^∞ dans Ω</u>.

<u>Preuve</u> : Soient $\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$ et $u\in\mathcal{E}'(X)$: u appartient donc à un certain espace de Sobolev $H^s(X)$ et $Op(a)u\in H^{s-m}(X)$. D'après le formule de composition et le fait que φu est de classe C^∞ :

$$\varphi\, Op(a)(u) + \sum_{1\le|r|\le k-1} Op(\partial_\xi^r a\, D_x^r\varphi)u \in H^{s-m+k}(X),\quad \text{pour tout } k\ge 1 \ .$$

Par récurrence sur j, on démontre que

$$\varphi^j \operatorname{Op}(a)(u) + (-1)^{j+1} \Sigma \frac{1}{r^1! \ldots r^j!} \operatorname{Op}(\partial_\xi^{r^1+\ldots+r^j} a\, D^{r^1}\varphi \ldots D^{r^j}\varphi)(u)$$

appartient à $H^{s-m+k}(X)$ pour tout $k \geq 1$, la somme étant étendue à une partie $J_{j,k}$ de l'ensemble des j-uples ordonnés $(r^1,\ldots,r^j)$ de multi-indices satisfaisant toutes les inégalités

$$\begin{cases} |r^l| \geq 1 \quad , \quad l = 1,2,\ldots,j \; . \\ |r^1| + \ldots + |r^j| \leq k-1 \; . \end{cases}$$

Comme $J_{j,j}$ est vide pour tout j, il en résulte que $\varphi^j \operatorname{Op}(a)(u)$ appartient à $H^{s-m+j}(X)$: φ étant un élément arbitraire de $\mathcal{D}(\Omega)$, il s'ensuit que $\operatorname{Op}(a)(u)$ est de classe C^∞ dans Ω.

Autre preuve : Il est facile de montrer que $\check{a}^2(x,z)$ est une fonction C^∞ pour $z \neq 0$, autrement dit que le noyau de $\operatorname{Op}(a)$ est C^∞ dans le complémentaire de la diagonale : on conclut par un cas du théorème des noyaux de L. Schwartz.

Proposition (II.1) : Soit $a \in \mathcal{S}(X \times \Xi ; m)$; définissons a_* par

$$a_*(x,\eta) = \int e^{2i\pi x\zeta}\, \hat{a}^1(\zeta, \zeta+\eta)\, d\zeta \, .$$

Alors $a_* \in \mathcal{S}(X \times \Xi ; m)$ et de plus, pour tout $k \geq 1$,

$$a_*(x,\eta) - \sum_{0 \leq |r| \leq k-1} \frac{1}{r!}\, \partial_\eta^r D_x^r\, a(x,\eta) \text{ appartient à } \mathcal{S}(X \times \Xi ; m-k).$$

Si $b \in \mathcal{E}(\Xi ; m)$, on pose $b_* = b$, ce qui étend au cas où $a \in S^m$ la proposition, sans que l'on ait bien sûr rien de plus à démontrer.

Preuve : On laisse au lecteur le soin de montrer que a_* appartient à $\mathcal{S}(\Xi \times \Xi ; m)$ et d'écrire le développement de Taylor nécessaire ; les inégalités recherchées s'obtiendront à l'aide de l'inégalité de Peetre.

Remarque (II.2) : On a donc pourvu l'espace vectoriel $S^\infty = \bigcup_{m \in \mathbb{R}} S^m$ d'une part d'une structure d'algebre (associative) graduée au moyen de l'opération $\#$, d'autre part d'un endomorphisme $_*$.

Il est intéressant de remarquer que si $a(x,\xi) = \Sigma a_\alpha(x)\, \xi^\alpha$ est le symbole d'un opérateur différentiel, à savoir $\Sigma\, a_\alpha(x)\, D^\alpha.$, a_* n'est autre que le symbole de l'opérateur différentiel $\Sigma\, D^\alpha\,(a_\alpha.)$.

Il existe par ailleurs sur cette algèbre une involution $\vee$, définie par

$$\check{a}(x,\xi) = a(x,-\xi) .$$

Les endomorphismes $\vee$ et $_*$ ne commutent pas entre eux, mais chacun des deux endomorphismes $_*{}^\vee$ et $^\vee{}_*$ est involutif.

Proposition (II.2) : Soit $a \in S^m$. Le transposé ${}^tA$ de l'opérateur $A = \mathrm{Op}\,(a)$ (noter que ${}^tA$ est a priori bien défini en tant qu'opérateur de $\mathcal{S}'(X)$ dans $\mathcal{S}'(X)$) coïncide sur l'espace $\mathcal{S}(X)$ avec l'opérateur $\mathrm{Op}[(\check{a})_*]$.

Preuve : On obtient ce résultat grâce à la formule de Parseval qui donne lorsque u et v appartiennent à $\mathcal{S}(X)$ la formule

$$\int \widehat{{}^tA\,u}(\xi)\, \hat{v}(-\xi) d\xi = \int \hat{u}(-\eta)\, \widehat{Av}(\eta)\, d\eta$$

$$= \int \hat{u}(-\eta)\, d\eta \int \hat{a}^1(\eta-\zeta,\zeta)\ \hat{v}(\zeta)\, d\zeta .$$

D'où

$$\widehat{{}^tA\,u}(\xi) = \int \hat{a}^1(\eta+\xi,-\xi)\, \hat{u}(-\eta)\, d\eta ,$$

ou encore, après le changement de variable $\eta \mapsto -\eta$ et l'introduction du symbole $b = \check{a}$,

$$\widehat{{}^tA\,u}(\xi) = \int \hat{b}^1(\xi-\eta,\xi)\,\hat{u}(\eta)\,d\eta$$

$$= \int \hat{b}^1_*(\xi-\eta,\eta)\,\hat{u}(\eta)\,d\eta \quad ,$$

ce qui démontre la proposition.

<u>Corollaire</u> : <u>Soit $a \in S^m$: $Op(a)$ s'étend en un opérateur continu de $\mathcal{S}'(X)$ dans $\mathcal{S}'(X)$</u>.

On est alors en mesure de donner un sens à la formule suivante, qui montre comment un symbole a peut être reconstruit à partir de l'opérateur $A = Op(a)$:

$$a(x,\xi) = e^{-2i\pi x\xi} A(y \mapsto e^{2i\pi\xi y})(x) \quad .$$

<u>Remarque (II.2)</u> : Sur l'algèbre S^m, il existe encore une autre involution $-$, à savoir la conjugaison complexe : $-$ et $_*$ ne commutent pas entre eux, et les endomorphismes $-_*$ et $_*-$ sont involutifs.

Cela étant, si $a \in S^m$, l'adjoint de l'opérateur $Op(a)$ est l'opérateur $Op[(\bar{a})_*]$.

§ 3. TRANSFORMATION DES OPERATEURS PSEUDO-DIFFERENTIELS PAR CHANGEMENT DE COORDONNEES.

Rappelons la formule

$$\mathrm{Op}(a)(u)(x) = \int d\xi \int a(x,\xi)\, e^{-2i\pi\langle y-x,\xi\rangle} u(y)\, dy .$$

Il est utile (et essentiel pour la théorie du changement de coordonnées) de voir quels opérateurs on obtient si l'on remplace dans cette formule le symbole $a(x,\xi)$ par une fonction de trois variables $a(x,y,\xi)$: une telle fonction sera appelée un symbole-noyau.

L'objet de la proposition (III.1) sera de montrer que, moyennant certaines hypothèses sur $a(x,y,\xi)$, cette généralisation n'est qu'illusoire.

Appelons symbole-noyau d'ordre $\leq m$ toute fonction a à valeurs complexes et de classe C^∞ sur $X \times X \times \Xi$ satisfaisant la condition : $\forall$ p, q, $r \in \mathbf{N}^n$, $\forall$ M, $N \in \mathbf{N}$, $\exists$ $C > 0$ telle que

$$(1+|x|^2)^M (1+|y|^2)^N |D_x^p D_y^q \partial_\xi^r a(x,y,\xi)| \leq C(1+|\xi|^2)^{\frac{m-|r|}{2}} .$$

A un tel symbole-noyau on associe l'opérateur A défini par

$$A(u)(x) = \int d\xi \int a(x,y,\xi)\, e^{-2i\pi\langle y-x,\xi\rangle} u(y)\, dy .$$

<u>Proposition (III.1)</u> : <u>Soit A l'opérateur associé à un symbole-noyau $a(x,y,\xi)$ d'ordre $\leq m$. Posons</u>

$$b(x,\xi) = a_{*2,3}(x,x,\xi) = \int e^{2i\pi x\zeta}\, \hat{a}^2(x,\zeta,\zeta+\xi)\, d\zeta ,$$

<u>(l'opération $*$ pour les fonctions de deux variables a été définie au chapitre II : l'indice 2,3 signifie qu'elle s'effectue ici par rapport aux</u> variables y et ξ).

Alors :

1) $b(x,\xi) \in \mathcal{S}(X \times \Xi\,;\, m)$

2) $A = Op(b)$.

3) Pour tout $k \geq 1$,

$$b(x,\xi) - \sum_{0 \leq |r| \leq k-1} \frac{1}{r!}\, (D_2^r\, \partial_3^r\, a)(x,x,\xi)$$

appartient à $\mathcal{S}(X \times \Xi\,;\, m-k)$.

Preuve : Le premier point résulte de l'égalité

$$\hat{b}^1(\eta,\xi) \;=\; \int \hat{a}^{1,2}(\eta-\zeta\,,\zeta,\, \zeta+\xi)\, d\zeta$$

et d'applications répétées de l'inégalité de Peetre.

Le troisième point résulte du développement de Taylor

$$\hat{a}^2(x,\zeta,\zeta+\xi) \sim \Sigma\, \frac{1}{r!}\, (\partial_3^r\, \hat{a}^2(x,\zeta,\xi))\, \zeta^r \;.$$

Pour le second point, posons $y = x+z$ dans l'intégrale définissant Au :

$$(Au)(x) \;=\; \int d\xi \int a(x,x+z,\xi)\, e^{-2i\pi z\xi} u(x+z)\, dz$$

$$=\; \int d\xi \int \hat{a}^2(x,\xi-\zeta,\xi)\, e^{2i\pi x\xi}\, \hat{u}(\zeta)\, d\zeta \;.$$

L'intégrale double étant sommable, cela s'écrit encore

$$\int d\xi \int \hat{a}^2(x,\xi,\xi+\zeta)\, e^{2i\pi x(\xi+\zeta)}\, \hat{u}(\zeta)\, d\zeta$$

$$=\; \int b(x,\xi)\, e^{2i\pi x\zeta}\, \hat{u}(\zeta)\, d\zeta$$

avec $$b(x,\zeta) = \int \hat{a}^2(x,\xi,\xi+\zeta)\, e^{2i\pi x\xi}\, d\xi \quad ,$$

ce qui termine la preuve.

Soit Ω un ouvert de X et soit A un opérateur de $\mathcal{D}(X)$ dans $\mathcal{E}(X)$. Nous dirons que A a son support à gauche compact dans Ω s'il existe un compact $K \subset \Omega$ tel que, pour toute fonction $u \in \mathcal{D}(\Omega)$, le support de Au soit contenu dans K (noter sans y attacher d'importance que l'on ne suppose pas la même conclusion si u appartient à $\mathcal{D}(X)$).

Par exemple, appelons support en x d'un symbole $a(x,\xi)$ la projection sur X du support (dans $X \times \Xi$) de a : alors si a a son support en x contenu dans un compact de Ω, Op(a) a son support à gauche compact dans Ω , réciproquement, si tel est le cas, Op(a) coïncide sur $\mathcal{D}(\Omega)$ avec un opérateur Op(b), où b a son support en x compact dans Ω.

Cela étant, soit ϕ un difféomorphisme C^∞ d'un ouvert Ω de X sur un ouvert Ω_1 de X, et soit A un opérateur de $\mathcal{D}(X)$ dans $\mathcal{E}(X)$ ayant son support à gauche compact dans Ω_1 , de sorte que A opère de $\mathcal{D}(\Omega_1)$ dans $\mathcal{D}(\Omega_1)$.

Si $u \in \mathcal{D}(\Omega)$, $u \circ \phi^{-1} \in \mathcal{D}(\Omega_1)$, $A(u \circ \phi^{-1}) \in \mathcal{D}(\Omega_1)$ et $[A(u \circ \phi^{-1})] \circ \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. On peut donc définir, en tant qu'opérateur de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$, l'opérateur

$$B = [A(\cdot \circ \phi^{-1})] \circ \phi \quad ,$$

que l'on appelle transformé de A par le difféomorphisme ϕ et que l'on note $B = \phi^* A$.

<u>Théorème (III.1)</u> : <u>Soit ϕ un difféomorphisme C^∞ d'un ouvert Ω de X sur un ouvert Ω_1 de X et soit $a \in \mathcal{S}(X \times \Xi\,;\, m)$ ayant son support en x contenu dans un compact K de Ω_1.</u>

<u>Posons A = Op(a).</u>

<u>Il existe alors $b \in \mathcal{S}(X \times \Xi\,;\, m)$ ayant son support en x contenu dans le compact $\phi^{-1}(K) \subset \Omega$, telle que l'opérateur $\phi^* A$ - Op(b) opère continûment de $\mathcal{E}'(\Omega)$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ (c'est-à-dire ait un noyau C^∞).</u>

Preuve : Elle est basée sur une idée de Kuranishi.

Il existe un voisinage ouvert V de la diagonale de $\Omega\times\Omega$ et une fonction M de classe C^{∞} définie dans V et à valeurs dans le groupe linéaire de X tels que l'on ait, quel que soit $(x,y)\in V$, l'égalité

$$\psi(y) - \psi(x) = M(x,y)(y-x) \quad .$$

Par exemple, si l'on appelle J la différentielle de ψ, on peut écrire

$$\psi(y) - \psi(x) = \int_0^1 J((1-t)x + ty)(y-x)\,dt$$

lorsque x et y sont assez voisins, et l'on peut prendre $M(x,y) = \int_0^1 J((1-t)x + ty)dt$ en notant que $M(x,x) = J(x)$ et que M est donc inversible dans un voisinage de la diagonale.

Posons $B = \psi^{*}A$, et soit $u\in\mathfrak{D}(\Omega)$. Soient y et y^1 les points courants dans Ω et Ω_1 respectivement. On a

$$\begin{aligned} B\,u(x) &= \int a(\psi(x),\xi)d\xi \int e^{-2i\pi\langle y^1 - \psi(x),\xi\rangle} u(\psi^{-1}(y^1))\,dy^1 \\ &= \int a(\psi(x),\xi)d\xi \int e^{-2i\pi\langle\psi(y)-\psi(x),\xi\rangle} u(y)\,|\text{dét}\,J(y)|\,dy \,. \end{aligned}$$

Soit α une fonction de classe C^{∞} dans $\Omega\times\Omega$, à support contenu dans V, égale à 1 dans un voisinage de la diagonale et satisfaisant en outre la propriété suivante :
pour tout compact $K\subset\Omega$, il existe un compact $L\subset\Omega$ tel que les conditions $x\in K$ et $\alpha(x,y)\neq 0$ entraînent $y\in L$.

Comme l'opérateur B, transformé de A, est pseudo-local, B diffère par un opérateur à noyau C^{∞} de l'opérateur C défini par

$$Cu(x) = \int a(\psi(x).\xi)d\xi \int \alpha(x,y)\, e^{-2i\pi<\psi(y)-\psi(x),\xi>}u(y)|\text{dét}\, J(y)|dy$$

$$= \int a(\psi(x),\xi)d\xi \int \alpha(x,y)e^{-2i\pi<y-x,\,{}^tM(x,y)\xi>}u(y)|\text{dét}\, J(y)|dy \ .$$

On fait alors le changement de variable

$$\xi = ({}^tM(x,y))^{-1}\zeta \ .$$

Notons que cela pose certaine difficulté étant donné que l'intégrale double n'est pas sommable en général. On s'en tire, par exemple, en multipliant sous l'intégrale par une fonction $\beta_j(\xi)$ à support compact, la suite (β_j) tendant vers 1.

On obtient alors

$$Cu(x) = \int d\zeta \int a(\psi(x),{}^tM(x,y)^{-1}\zeta)\ |\text{dét}\, M(x,y)|^{-1}\ \alpha(x,y)\ \ldots$$

$$\ldots\ e^{-2i\pi<y-x,\zeta>}u(y)|\text{dét}\, J(y)|dy \ .$$

La proposition (III.1) permet alors de conclure, en remarquant que la fontion

$$b(x,y,\zeta) = a(\psi(x),{}^tM(x,y)^{-1}\zeta)|\text{dét}\, M(x,y)|^{-1}\ \alpha(x,y)|\text{dét}\, J(y)|$$

est un symbole-noyau d'ordre $\leq m$ (remarquer, pour établir ce point, que les supports de b en x <u>et en y</u> sont compacts, étant données les propriétés de la fonction α).

<u>Remarque (III.1)</u> : Si l'on veut se débarrasser du reste qui figure dans l'énoncé du théorème (III.1), c'est-à-dire l'écrire sous la forme Op(c), on peut le faire, tout au moins dans le cas où A est à bisupport compact : ce reste est en effet, dans ce cas, un opérateur dont le noyau est C^∞ et à bisupport compact, et se laisse définir sous la forme pseudo-différentielle.