Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

A. Unterberger
J. Unterberger

Opérateurs pseudo-différentiels

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1970-1971), exp. nº 3, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1970-1971____A3_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77
(633)

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 0 - 1 9 7 1

OPERATEURS PSEUDO-DIFFERENTIELS

par A. et J. UNTERBERGER

Exposé N° 3

14 Octobre 1970

§ 0. INTRODUCTION

Considérons un opérateur différentiel $P(x,D)$ sur $\mathbb{R}^n$, d'ordre m. à coefficients C^∞ :

$$P(x,D) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\, D^\alpha .$$

On peut écrire :

$$(1) \qquad P(x,D)\,u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} p(x,\xi)\,\hat{u}(\xi)\, e^{2i\pi x\xi}\, d\xi ,$$

où $\hat{u}$ désigne la transformée de Fourier de la fonction $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, où $x\xi$ dénote le produit scalaire des vecteurs x et ξ de $\mathbb{R}^n$ et où la fonction $p(x,\xi) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\,\xi^\alpha$, polynôme en ξ, est appelée le symbole de l'opérateur $P(x,D)$.

On est alors tenté de définir par la formule (1) des opérateurs plus généraux associés à des fonctions ou "symboles" $p(x,\xi)$ qui ne sont plus nécessairement des polynômes en ξ. Ces nouveaux opérateurs sont appelés opérateurs pseudo-différentiels.

Il est bien sûr nécessaire d'imposer certaines restrictions aux symboles $p(x,\xi)$ pour que l'égalité de définition (1) prenne un sens.

L'ensemble des conditions imposées aux symboles est toujours en partie arbitraire, et dépend d'ailleurs des auteurs : la classe de symboles que nous allons utiliser est loin d'être la plus vaste considérée à ce jour, mais suffit pour beaucoup d'applications. D'ailleurs, à l'heure actuelle, les généralisations les plus fructueuses ne partent pas d'un affaiblissement des conditions imposées à $p(x,\xi)$, mais d'une correction de la formule (1) elle-même.

Cette série d'exposés décrira la classe d'opérateurs pseudo-différentiels envisagée, montrera dans quels espaces ces derniers opèrent, comment ils se composent et comment ils se transforment par changement de coordonnées. D'autres résultats pourront y trouver place sur demande.

Notations : Nous adoptons les notations du livre de L. Schwartz pour les espaces de distributions.

Si α est un multi-indice, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, nous posons

$$D_x^\alpha = \left(\frac{1}{2i\pi}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \ldots \left(\frac{1}{2i\pi}\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} ,$$

$$\partial_x^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \ldots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} ,$$

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} \quad \text{avec} \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n ,$$

$$\alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_n! \quad \text{et} \quad |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n .$$

§ 1. ESPACES DE SOBOLEV. DEFINITION D'UNE CLASSE D'OPERATEURS PSEUDO-DIFFERENTIELS.

Soient X un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension n et Ξ son dual ; $|x|^2$ et dx désigneront une forme quadratique et une mesure de Lebesgue sur X, $|\xi|^2$ et $d\xi$ la forme et la mesure associées sur Ξ.

Les dérivations D_x^α et ∂_ξ^β seront prises par rapport à des bases duales de X et Ξ.

Espaces de Sobolev H^s :

Soit s un nombre réel. $H^s(X)$ est l'espace des distributions $T \in \mathcal{S}'(X)$ dont la transformée de Fourier $\hat{T}$ est une fonction satisfaisant

$$\int_\Xi (1 + |\xi|^2)^s \, |\hat{T}(\xi)|^2 \, d\xi < +\infty ,$$

Cet espace est muni de la topologie définie par la norme

$$\|T\|_s = \|(1+|\xi|^2)^{s/2}\,\hat{T}(\xi)\|_{L^2(\Xi)} \quad ;$$

ni l'espace ni sa topologie ne dépendent du choix de la forme quadratique $|\xi|^2$. Si l'on fixe une forme quadratique $|\xi|^2$, $H^s(X)$ devient un espace de Hilbert, le produit scalaire étant défini par

$$(T \mid U)_s = \int_{\Xi} (1+|\xi|^2)^s\,\hat{T}(\xi)\,\bar{\hat{U}}(\xi)\,d\xi \ .$$

<u>Exemple</u> : La transformée de Fourier de δ étant 1, δ appartient à $H^s(X)$ pour tout $s < -\frac{n}{2}$ et $\|\delta\|_s = \int_{\Xi} (1+|\xi|^2)^s\,d\xi$.

Il est clair que <u>$H^s(X) \subset H^t(X)$ si $s \geq t$</u>, et l'inclusion est de norme 1 : évidemment $H^0(X) = L^2(X)$, et pour tout s positif on a $H^s(X) \subset L^2(X)$.

De plus, la forme bilinéaire

$$\int T\,U\,dx = \int \hat{T}\,\bar{\hat{U}}\,d\xi = \int (1+|\xi|^2)^{s/2}\,\hat{T}(\xi)\,(1+|\xi|^2)^{-s/2}\,\bar{\hat{U}}(\xi)\,d\xi$$

sur $H^s(X) \times H^{-s}(X)$ permet d'identifier $H^{-s}(X)$ au dual de $H^s(X)$.

<u>L'opérateur $D_x^\alpha : H^s(X) \to H^{s-|\alpha|}(X)$ est continu pour tout s</u>. En particulier, si $T \in H^k(X)$ pour un certain entier $k \geq 0$, les dérivées $D_x^\alpha T$ d'ordre $|\alpha| \leq k$ appartiennent à $L^2(X)$, et cette propriété caractérise $H^k(X)$.

On peut aussi caractériser $H^{-k}(X)$ comme l'espace des sommes de la forme $\sum_{|\alpha| \leq k} D^\alpha T_\alpha$, où $T_\alpha \in L^2(X)$ pour tout α.

D'autre part, <u>la multiplication par un élément $\varphi \in \mathcal{S}(X)$ est un opérateur continu de $H^s(X)$ dans $H^s(X)$ pour tout s</u> : la démonstration de ce résultat résulte de l'inégalité de Young :

$$\|f * g\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^1}\,\|g\|_{L^2} \quad \text{si} \quad f \in L^1(X) \quad \text{et} \quad g \in L^2(X) \quad ,$$

et de l'inégalité de Peetre :

$$(1+|\xi|^2)^s \leq 2^{|s|}(1+|\xi-\eta|^2)^s(1+|\eta|^2)^{|s|} \quad \text{pour tout } s$$

que l'on obtient aisément si l'on remarque que

$$(1+|\xi|^2) = 1+|\eta|^2 - 2\eta(\eta-\xi) + |\eta-\xi|^2 \leq 2(1+|\eta-\xi|^2)(1+|\eta|^2) \quad .$$

<u>Preuve</u> :

$$|(\hat{\varphi}*\hat{T})(\xi)|(1+|\xi|^2)^{s/2} \leq 2^{|s|/2}\int_{\Xi}(1+|\xi-\eta|^2)^{|s|/2}|\hat{\varphi}(\xi-\eta)|(1+|\eta|^2)^{s/2}|\hat{T}(\eta)|\,d\eta$$

et puisque $(1+|\xi|^2)^{|s|/2}|\hat{\varphi}(\xi)| \in L^1(\Xi)$, on a

$$\|\varphi T\|_s = \|(1+|\xi|^2)^{s/2}(\hat{\varphi}*\hat{T})(\xi)\|_{L^2} \leq C\|(1+|\eta|^2)^{s/2}\,\hat{T}(\eta)\|_{L^2} = C\|T\|_s \quad ,$$

où C est une constante ne dépendant que de φ et de s.

<u>Remarque</u> : On déduit des deux derniers résultats que l'opérateur différentiel

$$\sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\,D_x^\alpha \quad , \quad a_\alpha \in \mathcal{S}(X) \quad ,$$

est continu de $H^s(X)$ dans $H^{s-m}(X)$.

<u>Proposition (I.1)</u> : <u>$\mathcal{S}(X)$ est dense dans $H^s(X)$ pour tout s réel</u>.

<u>Preuve</u> : Il est évident que $\mathcal{S}(X)$ est contenu dans $H^s(X)$; pour montrer qu'il y a densité, choisissons $T \in H^s(X)$ et $\varepsilon > 0$: $(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{T}(\xi)$ appartient à $L^2(\Xi)$; comme $\mathcal{S}(X)$ est dense dans $L^2(X)$, on peut trouver $\varphi \in \mathcal{S}(\Xi)$ telle que

$$\|\varphi(\xi) - (1+|\xi|^2)^{s/2}\,\hat{T}(\xi)\|_{L^2} < \varepsilon \quad ;$$

soit Φ la transformée de Fourier inverse de $(1+|\xi|^2)^{-s/2}\varphi(\xi)$, alors

$$\|\Phi - T\|_s < \varepsilon \quad .$$

ce qui prouve la proposition.

<u>Corollaire</u> : $\mathcal{D}(X)$ est dense dans chaque $H^s(X)$.

Ceci est évident puisque $\mathcal{D}(X)$ est dense dans $\mathcal{S}(X)$.

Par exemple, si $f \in \mathcal{D}(X)$ et $\int_X f(x)dx = 1$, la suite $f_k(x) = k^n f(kx)$ converge vers δ dans $H^s(X)$ pour $s < \frac{-n}{2}$.

<u>Proposition (I.2)</u> : <u>Si $T \in H^s(X)$ avec</u> $s > \frac{n}{2}$, <u>alors T est une fonction continue et bornée</u>.

<u>Preuve</u> : Il suffit de montrer que $\hat{T}$ est intégrable.
Puisque $T \in H^s(X)$ et $s > \frac{n}{2}$, $(1+|\xi|^2)^{s/2}\,\hat{T}(\xi)$ et $(1+|\xi|^2)^{-s/2}$ appartiennent à $L^2(\Xi)$; en utilisant alors l'inégalité de Schwarz :

$$\int_\Xi |\hat{T}(\xi)|d\xi = \int_\Xi (1+|\xi|^2)^{-s/2}(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{T}(\xi)d\xi \leq C\,\|\delta\|_{-s}\,\|T\|_s < +\infty$$

(C étant une constante >0), ce qui démontre le résultat.

<u>Proposition (I.3)</u> : <u>La multiplication par un élément $\mathcal{S}(X)$ est un opérateur compact de $H^s(X)$ dans $H^t(X)$ pour tout $t < s$.</u>

<u>Preuve</u> : Soit $\{T_k\}$ une suite bornée d'éléments de $H^s(X)$; nous allons montrer qu'on peut trouver une sous-suite $\{\varphi\, T_{k_l}\}$ de la suite $\{\varphi\, T_k\}$ qui converge dans $H^t(X)$.

Posons $f_k = \widehat{\varphi\, T_k}$. En se servant d'une inégalité précédemment établie, on obtient

$$(1+|\xi|^2)^{s/2}\;|f_k(\xi)| \leq 2^{|s|/2}\,\|\varphi\|_{|s|}\,\|T_k\|_s \quad ,$$

et de même

$$(1+|\xi|^2)^{s/2}\ |D_j f_k(\xi)| \leq 2^{|s|/2} \|x_j \varphi\|_{|s|} \|T_k\|_s \quad .$$

La suite $\{f_k\}$ est donc équicontinue et il existe une sous-suite $\{f_{k_l}\}$ qui converge vers une certaine fonction f uniformément sur tout compact.

On voit facilement que $\hat{f}$ appartient à $H^s(X)$: il suffit alors de montrer que $\{\hat{f}_{k_l}\}$ converge vers $\hat{f}$ dans $H^t(X)$, autrement dit que l'intégrale

$$\int (1+|\xi|^2)^t\ |f_{k_l}(\xi) - f(\xi)|^2 \, d\xi$$

tend vers 0.

Le tout est de montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A > 0$ tel que, pour tout l, on ait :

$$\int_{|\xi|>A} (1+|\xi|^2)^t\ |f_{k_l}(\xi)|^2 \, d\xi < \varepsilon \ :$$

or ceci résulte de ce que $\int (1+|\xi|^2)^s\ |f_{k_l}(\xi)|^2 \, d\xi$ est bornée indépendamment de l et que s est supérieur à t.

<u>Corollaire</u> : <u>L'injection canonique de</u> $H^s_K(X)$ <u>est compacte si</u> $t < s$ <u>et</u> K <u>est compact</u>.

<u>Définition d'une classe d'opérateurs pseudo-différentiels</u> :

<u>Définition (I.1)</u> : <u>Soit m un nombre réel. $\mathcal{S}(X \times \Xi\, ;\, m)$ désigne l'espace des fonctions a sur $X \times \Xi$ à valeurs complexes, de classe C^∞, telles que</u>

$$\forall\ p, q \in \mathbb{N}^n, \quad \forall\ M \in \mathbb{N}, \quad \exists\ C > 0 \quad \text{telle que}$$

$$(1+|x|^2)^M\ |D^p_x\, \partial^q_\xi\, a(x,\xi)| \leq C(1+|\xi|^2)^{\frac{m-|q|}{2}} \quad .$$

Cette définition ne dépend pas du choix de la forme quadratique $|\xi|^2$ et des bases (duales) sur X et Ξ.

Il est clair que $\mathcal{S}(X\times\Xi\,;m_1)\subset\mathcal{S}(X\times\Xi\,;m_2)$ si $m_1\leq m_2$.

Définition (I.2) : Si $a\in\mathcal{S}(X\times\Xi\,;m)$, $Op(a)$ est l'opérateur défini sur $\mathcal{S}(X)$ par la formule

$$[Op(a)(u)](x) = \int_{\Xi} a(x,\xi)\,\hat{u}(\xi)e^{2i\pi x\xi}\,d\xi \quad .$$

Il est facile de montrer que $Op(a)u\in\mathcal{S}(X)$ si $u\in\mathcal{S}(X)$. (Remarquons que l'intégrale ci-dessus est absolument convergente et bornée indépendamment de x ; de plus, il en est de même après un nombre quelconque de dérivations sous le signe d'intégration et de multiplications par des polynômes en x).

Proposition (I.4) : Op(a) est un opérateur continu dans $\mathcal{S}(X)$.

Preuve : On peut supposer ici que l'ordre m de Op(a) est un entier positif.

On doit montrer que, pour toute semi-norme $N_1=\sup|(1+|x|^2)^k D_x^p\cdot|$, on peut trouver une constante C et une semi-norme $N_2=\sup|(1+|x|^2)^l P(D)\cdot|$ telles que

$$N_1(Op(a)u)\leq C\,N_2(u)\quad\text{pour tout}\quad u\in\mathcal{S}(X).$$

(Ici, P(D) est un opérateur différentiel à coefficients constants).

On peut écrire

$$(1+|x|^2)^k D_x^p\,Op(a)(u)(x) = (1+|x|^2)^k\int_{\Xi} D_x^p(a(x,\xi)e^{2i\pi x\xi})\,\hat{u}(\xi)\,d\xi$$

$$=\sum_{q\leq p}\frac{p!}{q!(p-q)!}\int_{\Xi}(1+|x|^2)^k D_x^q a(x,\xi)\,D_x^{p-q}e^{2i\pi x\xi}\,\hat{u}(\xi)\,d\xi$$

$$=\sum_{q\leq p}\frac{p!}{q!(p-q)!}\,A_q(u)(x)\qquad ,$$

avec $A_q(u)(x) = \int_\Xi (1+|x|^2)^k D_x^q\, q(x,\xi)\, \xi^{p-q}\, \hat{u}(\xi)\, e^{2i\pi x\xi}\, d\xi$.

Posons

$$f(x,\xi) = (1+|\xi|^2)^{-m-n}(1+|x|^2)^k D_x^q\, a(x,\xi) \quad .$$

Alors $f(x,\xi)$ est sommable par rapport à ξ et sa transformée de Fourier par rapport à ξ (notée $\hat{f}^2(x,.)$) est continue et bornée.

$$\begin{aligned} A_q(u)(x) &= \int_\Xi f(x,\xi)(1+|\xi|^2)^{m+n}\, \xi^{p-q}\, \hat{u}(\xi)\, e^{2i\pi x\xi}\, d\xi \\ &= \int_\Xi f(x,\xi)\, \mathfrak{F}[(1-\frac{\Delta}{4\pi^2})^{m+n}\, D^{p-q} u](\xi)\, e^{2i\pi x\xi}\, d\xi \\ &= \int_X \hat{f}^2(x,y-x)\, (1+|y|^2)^n\, (1-\frac{\Delta}{4\pi^2})^{m+n}\, D^{p-q}\, u(y)\, \frac{dy}{(1+|y|^2)^n} \,. \end{aligned}$$

Si l'on pose

$$P(D) = (1-\frac{\Delta}{4\pi^2})^{m+n}\, D^{p-q}$$

on pose

$$\begin{aligned} \sup_x |A_q(u)(x)| &\le \sup_{x,y} |f^2(x,y-x)| \sup_y |(1+|y|^2)^n P(D)\, u(y)| \int_X \frac{dz}{(1+|z|^2)^n} \\ &\le C \sup_y |(1+|y|^2)^n P(D)\, u(y)| \end{aligned}$$

où C est une constante, ce qui prouve la proposition.

<u>Remarque I.1</u> : Calculons la transformée de Fourier de Op(a)(u) :

$$\begin{aligned} \widehat{Op(a)(u)}\,(\xi) &= \int_X e^{-2i\pi x\xi} (\int_\Xi a(x,\zeta)\, \hat{u}(\zeta)\, e^{2i\pi x\zeta} d\zeta)\, dx \\ &= \int_\Xi \hat{u}(\zeta)(\int_X a(x,\zeta) e^{-2i\pi x(\xi-\zeta)} dx) d\zeta = \int_\Xi \hat{a}^1(\xi-\zeta,\zeta)\, \hat{u}(\zeta)\, d\zeta \quad , \end{aligned}$$

où $\hat{a}^1(.,\zeta)$ est la transformée de Fourier de $a(x,\zeta)$ par rapport à x.

Cette formule sera très utile dans la suite.

Remarque I.2 : En écrivant

$$\begin{aligned} Op(a)(u)(x) &= \int_\Xi a(x,\xi)\left(\int_X u(y)\, e^{-2i\pi\xi(y-x)}\, dy\right) d\xi \\ &= \int_X \check{a}^2(x,x-y)\, \varphi(y)\, dy \quad , \end{aligned}$$

on obtient le noyau $\check{a}^2(x,x-y)$ de l'opérateur Op(a).

Ce noyau est une distribution qui n'est pas une fonction en général : on verra plus loin qu'il coïncide avec une fonction C^∞ dans le complémentaire de la diagonale $y=x$.

Lorsque $a(x,\xi)$ est, pour $|\xi|$ assez grand, une fonction homogène en ξ de degré 0, on obtient essentiellement un opérateur intégral singulier "classique".

Théorème (I.1) : Si $a \in \mathcal{S}(X\times\Xi\,;m)$, Op(a) s'étend, pour tout s, en un opérateur continu de $H^s(X)$ dans $H^{s-m}(X)$.

Ce théorème est une conséquence immédiate des deux lemmes qui suivent :

Lemme (I.1) : La transformation de Fourier par rapport à la première variable envoie $\mathcal{S}(X\times\Xi\,;m)$ dans $\mathcal{S}(\Xi\times\Xi\,;m)$.

Preuve : En effet, $(1+|\eta|^2)^M D_1^p\, \partial_2^q\, \hat{a}^1(\eta\ \xi) = \mathfrak{F}_x[(1-\frac{\Delta_x}{4\pi^2})^M x^p\, \partial_2^q\, a(x,\xi)](\eta)$.
où D_1^p (resp ∂_2^q) est une dérivation par rapport à la 1ère (resp. seconde) variable, et puisque $(1-\frac{\Delta_x}{4\pi^2})^M x^p\, \partial_2^q\, a(x,\xi) \in \mathcal{S}(X\times\Xi\,;m-|q|)$:

$$(1+|x|^2)^n \left|(1-\frac{\Delta_x}{4\pi^2})^M x^p\, \partial_2^q\, a(x,\xi)\right| \le C_1(1+|\xi|^2)^{\frac{m-|q|}{2}} \quad ;$$

Δ_x est ici le Laplacien sur X et C_1 est une constante.

Finalement, on a

$$|(1+|\eta|^2)^M D_1^p \partial_2^q \hat{a}^1(\eta,\xi)| \leq |\int_X (1-\frac{\Delta_x}{4\pi^2})^M x^p \partial_2^q a(x,\xi)(1+|x|^2)^n \frac{dx}{(1+|x|^2)^n}|$$

$$\leq C_1(1+|\xi|^2)^{\frac{m-|q|}{2}} \int_X \frac{dx}{(1+|x|^2)^n} \leq C(1+|\xi|^2)^{\frac{m-|q|}{2}} ,$$

C étant une constante.

Lemme (I.2) : Soient m un nombre réel et F une fonction mesurable sur $X \times \Xi$ à valeurs complexes telle que

$$\forall M \in \mathbb{N},\ \exists C>0 \text{ telle que } |F(\eta,\xi)| \leq C(1+|\eta|^2)^{-M}(1+|\xi|^2)^{\frac{m}{2}}$$

presque partout.
Alors l'opérateur A défini pour $u \in \mathcal{S}(X)$ par la formule

$$\widehat{Au}(\eta) = \int_\Xi F(\eta-\xi,\xi)\,\hat{u}(\xi)\,d\xi$$

s'étend, pour tout s, en un opérateur continu de $H^s(X)$ dans $H^{s-m}(X)$.

Preuve : En utilisant l'inégalité de Peetre, on obtient

$$(1+|\eta|^2)^{\frac{s-m}{2}} |\int F(\eta-\xi,\xi)\,\hat{u}(\xi)\,d\xi| \leq 2^{\frac{|s-m|}{2}} \int (1+|\eta-\xi|^2)^{\frac{|s-m|}{2}-M}(1+|\xi|^2)^{s/2}|\hat{u}(\xi)|\,d\xi,$$

et, grâce à l'inégalité de Young :

$$\|Au\|_{s-m} \leq 2^{\frac{|s-m|}{2}} \|(1+|\eta-\xi|^2)^{\frac{|s-m|}{2}-M}\|_{L^1(\Xi)} \|u\|_s .$$

Définition (I.3) : On appelera opérateur d'ordre $\leq m$ tout opérateur linéaire $A : \mathcal{S}(X) \to \mathcal{S}'(X)$ s'étendant pour tout s en un opérateur continu de $H^s(X)$ dans $H^{s-m}(X)$; un opérateur d'ordre $\leq m$ pour tout m réel sera appelé opérateur d'ordre $-\infty$.

Remarque (I.3) : Une conséquence du théorème (I.1) est que si a et b appartiennent à $\mathcal{S}(X \times \Xi, m)$ et s'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$a(x,\xi) = b(x,\xi) \quad \text{pour} \quad |\xi| > C \quad .$$

alors $Op(a) - Op(b)$ est un opérateur d'ordre $-\infty$.

Remarque (I.4) : Les symboles $a(x,\xi)$ que nous avons considérés jusqu'à présent possèdent par rapport à x des propriétés de décroissance qui ont facilité l'usage de la transformation de Fourier : cependant celles-ci nous empêchent de considérer comme opérateurs pseudo-différentiels d'autres opérateurs différentiels que ceux dont les coefficients sont dans $\mathcal{S}(X)$. Cette restriction n'est pas bien grave vu l'usage local qu'on fait en général des opérateurs pseudo-différentiels, il est cependant agréable de se permettre dans la théorie l'emploi des opérateurs différentiels à coefficients constants et de certains opérateurs de convolution : cette extension est l'objet de la définition suivante :

Définition (I.4) :

1) $\mathcal{E}(\Xi;m)$ est l'espace des fonctions b de classe C^∞ sur Ξ à valeurs complexes telles que

$$\forall\, q \in \mathbb{N}^n \,,\ \exists\, C > 0 \ \text{ telle que } \ |\partial_\xi^q b(\xi)| \leq C(1+|\xi|^2)^{\frac{m-|q|}{2}}$$

2) S^m est la somme directe de $\mathcal{S}(X \times \Xi; m)$ et de $\mathcal{E}(\Xi; m)$, identifiée à un espace de fonctions sur $X \times \Xi$.

3) Si $a \in \mathcal{S}(X \times \Xi; m)$ et $b \in \mathcal{E}(\Xi; m)$, alors $Op(a+b)$ est la somme de $Op(a)$ et de $Op(b)$, où $Op(b)$ est défini par

$$\widehat{Op(b)u}(\xi) = b(\xi)\,\hat{u}(\xi) \ .$$

Le théorème (I.1) s'étend très facilement au cas où $a(x,\xi)$ appartient à S^m.

<u>Exemple (I.1)</u> : L'opérateur $\mathrm{Op}[(1+|\xi|^2)^{m/2}]$ définit, pour tout s, un isomorphisme de $H^s(X)$ sur $H^{s-m}(X)$.

<u>Exemple (I.2)</u> : Si $u \in H^{-\infty}(X) = \bigcup_{t\in\mathbb{R}} H^t(X)$ et $\Delta u \in H^s(X)$, alors $u \in H^{s+1}(X)$. En effet, posons $q(\xi) = -\frac{1}{\pi^2}\, \alpha(\xi)\,|\xi|^{-2}$, où α est une fonction de classe C^∞ sur Ξ, égale à 0 dans un voisinage de 0 et à 1 en dehors d'un compact (α est utilisée pour tuer la singularité de $|\xi|^{-2}$).
Soit $Q = \mathrm{Op}(q)$; alors $Q\Delta = \mathrm{Op}(\alpha(\xi))$ d'après l'associativité du produit de convolution, d'où il résulte que $Q\Delta - 1$ est d'ordre $-\infty$: on obtient le résultat souhaité puisque Q est un opérateur d'ordre -2.