

# SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

M. DERRIDJ

C. ZUILY

**Régularité  $C^\infty$  au bord d'une classe d'opérateurs dégénérés**

*Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1970-1971), exp. n° 2,*  
p. 1-13

[http://www.numdam.org/item?id=SEDP\\_1970-1971\\_\\_\\_\\_A2\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1970-1971____A2_0)

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)  
(École Polytechnique), 1970-1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDICIS 11-77  
(633)

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 0 - 1 9 7 1

REGULARITE  $C^\infty$  AU BORD D'UNE CLASSE D'OPERATEURS DEGENERES

-----

par M. DERRIDJ et C. ZUILY



§ I INTRODUCTION

Soient  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$  de frontière  $\Gamma$  régulière,  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  telle que  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n / \varphi(x) > 0\}$   $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n / \varphi(x) = 0\}$   $\varphi \neq 0$  sur  $\Gamma$ , et  $(X_1, X_2, \dots, X_r)$  une famille de champs de vecteurs dans  $\bar{\Omega}$  à coefficients réguliers.

Nous étudions dans ce travail la régularité à la frontière de l'opérateur  $A = \sum_{j=1}^r X_j^* (\varphi X_j) + c\varphi$  sous des hypothèses convenables sur les  $X_j$ . Il résulte de cette étude et d'un théorème de Hörmander que les solutions de l'équation  $Au = f$  sont dans  $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$  si  $f$  est dans  $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ .

La classe des opérateurs  $A$  pour lesquels ces résultats de régularité sont obtenus contient essentiellement celle étudiée dans [2] par M.M. M.S. Baouendi et C. Goulaouic, qui ont cependant des résultats plus précis que les nôtres.

§ II. NOTATIONS ET HYPOTHESES :

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$  de frontière  $\Gamma$  variété de classe  $C^\infty$  et de dimension  $n-1$ ,  $\Omega$  étant situé localement d'un même côté de  $\Gamma$ . Soit  $\varphi$  la fonction définie dans le paragraphe I.

Nous nous donnons  $r$  champs de vecteurs  $X_1, \dots, X_r$  dans  $\bar{\Omega}$  i.e des opérateurs différentiels homogènes du 1<sup>er</sup> ordre, sur lesquels nous faisons les hypothèses suivantes :

(H.1) Les coefficients des  $X_j$   $j = 1, \dots, r$  sont de classe  $C^\infty$  dans  $\bar{\Omega}$

(H.2) L'algèbre de Lie engendrée par les champs de vecteurs  $X_1, \dots, X_r$  est de rang  $n$  en tout point de  $\Omega$  (voir [4])

(H.3) En tout point  $x$  de  $\Gamma$  il existe  $i_x$   $1 \leq i_x \leq r$  tel que  $X_{i_x}$  soit transversal à  $\Gamma$  au point  $x$ .

Soit  $(\mathcal{O}, \theta)$  une carte locale d'un point de  $\Gamma$ . Nous notons  $\tilde{X}_j$  le transformé de  $X_j$  dans le demi-espace  $\mathbb{R}_+^n = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}^{n-1}, y > 0\}$ ,

$$B = \theta(\mathcal{O} \cap \Omega) \quad \gamma = \theta(\mathcal{O} \cap \Gamma)$$

$$(H.4) \quad \tilde{X}_j = a_j D_y + y^{k_j} T_j, \quad j = 1 \dots r \quad k_j \in \mathbb{N} \quad T_j = \sum_{k=1}^{n-1} c_{j,k}(x,y) D_{x_k}$$

(H.5) L'algèbre de Lie engendrée par  $T_1, \dots, T_r$  est de rang  $n-1$  en tout point de  $B \cup \gamma$ .

Remarques II.1 : Il résulte des hypothèses faites ci-dessus que dans chaque carte locale d'un point de la frontière, il existe  $j$  tel que :  $\tilde{X}_j = \alpha D_y \neq 0$  dans  $B \cup \gamma$ . D'autre part l'algèbre de Lie engendrée par  $(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_r)$  est de rang  $n$  en tout point de  $B \cup \gamma$ .

§ III. LEMME DE DENSITE

Nous allons maintenant donner quelques résultats de densité des fonctions régulières, qui nous seront utiles dans la suite. Nous nous plaçons dans le cadre général suivant :  $\Omega$  est un ouvert régulier de  $\mathbb{R}^n$  (borné ou non).  $P_1, P_2, \dots, P_k$  (resp.  $Q_1, \dots, Q_l$ ) des opérateurs différentiels homogènes du premier ordre à coefficients de classe  $C^\infty$  dans  $\mathbb{R}_+^n = \{(x,y) : x \in \mathbb{R}^{n-1}, y \geq 0\}$  (resp. dans  $\bar{\Omega}$ ). On pose :

$$\mathfrak{A}(\mathbb{R}_+^n) = \{u \in L^2(\mathbb{R}_+^n) / P_i u \in L^2(\mathbb{R}_+^n) \quad i = 1, \dots, k\}$$

$$\mathfrak{A}_0(\mathbb{R}_+^n) = \{u \in L^2(\mathbb{R}_+^n) / \sqrt{y} P_i u \in L^2(\mathbb{R}_+^n) \quad i = 1, \dots, k\}$$

$$\mathfrak{B}(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) / Q_i u \in L^2(\Omega) \quad i = 1, \dots, l\}$$

$$\mathfrak{B}_0(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) / \sqrt{\varphi} Q_i u \in L^2(\Omega) \quad i = 1, \dots, l\}$$

où  $\varphi$  est définie au § I. que l'on munit des structures hilbertiennes évidentes.

On a alors les :

Lemme III.1 :  $\mathfrak{D}(\mathbb{R}_+^n)$  (resp.  $\mathfrak{D}(\bar{\Omega})$ ) est dense dans  $\mathfrak{A}(\mathbb{R}_+^n)$  (resp. dans  $\mathfrak{B}(\Omega)$ )

Lemme III.2 : Si de plus nous supposons que  $P_1 = D_y$  (resp. En tout point  $X$  de  $\dot{\Gamma}$  un des  $Q_i$  est transversal à  $\Gamma^{(\diamond)}$ ) alors  $\mathfrak{D}(\mathbb{R}_+^n)$  est dense dans  $\mathfrak{U}_0(\mathbb{R}_+^n)$  (resp.  $\mathfrak{D}(\Omega)$  est dense dans  $\mathfrak{B}_0(\Omega)$ ).

Démonstration du lemme III.1 : Il est facile de voir que les fonctions de  $\mathfrak{U}(\mathbb{R}_+^n)$  à support compact dans  $\overline{\mathbb{R}_+^n}$  sont dense dans  $\mathfrak{U}(\mathbb{R}_+^n)$ . Ensuite si  $u \in \mathfrak{U}(\mathbb{R}_+^n) \cap \mathcal{E}'(\overline{\mathbb{R}_+^n})$  posons  $\tilde{u} = \begin{cases} u & \text{si } \in \overline{\mathbb{R}_+^n} \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$

Soit  $\rho_\varepsilon$  une suite régularisante avec  $\text{supp } \rho_\varepsilon \subset \mathbb{R}_-^n$ . La fonction  $u_\varepsilon = \tilde{u} * \rho_\varepsilon$  est une fonction de  $\mathfrak{D}(\overline{\mathbb{R}_+^n})$  qui, on va le voir, converge vers  $u$  dans  $\mathfrak{U}(\mathbb{R}_+^n)$ . Pour cela il suffit de démontrer que si  $P$  est un champ de vecteur,  $Pu_\varepsilon$  converge vers  $Pu$  dans  $L^2(\mathbb{R}_+^n)$ . Or

$$Pu_\varepsilon = \sum_{k=1}^{n-1} a_k \frac{\partial}{\partial x_k} [(\tilde{u} * \rho_\varepsilon) |_{\mathbb{R}_+^n}] = \left[ \sum_{k=1}^{n-1} a_k \frac{\partial}{\partial x_k} (\tilde{u} * \rho_\varepsilon) \right] |_{\mathbb{R}_+^n} =$$

$$\left[ \left( \sum_{k=1}^{n-1} a_k \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_k} * \rho_\varepsilon \right) \right] |_{\mathbb{R}_+^n + \mathbb{R}_\varepsilon} = \left[ \sum_{k=1}^{n-1} a_k \frac{\partial u}{\partial x_k} * \rho_\varepsilon \right] |_{\mathbb{R}_+^n} + [\mu * \rho_\varepsilon] |_{\mathbb{R}_+^n + \mathbb{R}_\varepsilon}$$

où  $\mu$  est une mesure portée par l'hyperplan  $x_n = 0$  donc  $(\mu * \rho_\varepsilon) |_{\mathbb{R}_+^n} = 0$ .

On a donc  $Pu_\varepsilon = \tilde{P}u * \rho_\varepsilon |_{\mathbb{R}_+^n + \mathbb{R}_\varepsilon}$  et il suffit donc de montrer que  $\tilde{P}u * \rho_\varepsilon$  tend vers zéro dans  $L^2(\mathbb{R}_+^n)$  ce qui résulte d'un lemme de Friedrichs (voir [5] chap I.). Pour montrer que  $\mathfrak{D}(\overline{\Omega})$  est dense  $\mathfrak{U}(\Omega)$  on localise et on se ramène à  $\mathbb{R}_+^n$ .

( $\diamond$ ) Ecrivons  $Q_i = \sum_{k=1}^n \alpha_{i,k}(x) D_{x_k}$ . La transversalité de  $Q_i$  à  $\Gamma$  veut dire que le vecteur  $\alpha_i(x) = (\alpha_{i,1}(x), \dots, \alpha_{i,n}(x))$  est non nul et non tangent à  $\Gamma$  pour  $x \in \Gamma$ .

Démonstration du lemme III.2 : Elle est semblable à celle donnée dans [2] en utilisant le lemme III.1.

Remarque III.3 : Le lemme III.2 est aussi vrai pour les espaces

$$\{u \in L^2(\Omega) \mid \forall i=1, \dots, l, \partial_i u \in L^2(\Omega)\} \text{ où } p \in \mathbf{N}^*.$$

#### § IV. RESULTATS PRELIMINAIRES :

Considérons l'espace

$$V(\mathbb{R}_+^n) = \{u \in L^2(\mathbb{R}_+^n) \mid \sqrt{y} D_y u \in L^2(\mathbb{R}_+^n), \sqrt{y} y^{k_j} T_j u \in L^2(\mathbb{R}_+^n) \text{ } j=2, \dots, r\}$$

que l'on munit de la structure évidente d'espace de Hilbert. On a alors la :

Proposition IV.1 : Il existe  $\varepsilon > 0$  tel que :

$$V(\mathbb{R}_+^n) \cap \mathcal{E}(B \cup \gamma) \subset L^2(\mathbb{R}_+^n; H^\varepsilon(\mathbb{R}^{n-1})) = L^2(H^\varepsilon) \text{ avec injection continue.}$$

Cette proposition résulte des deux lemmes suivants.

Lemme IV.2 :  $\forall \alpha, \beta > 0 \quad \forall p \in \mathbf{N} \quad \forall u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^n)$  on a

$$(IV.1) \quad \|u\|_{L^2(H^{\beta/2})} \leq c (\|\sqrt{y} D_y u\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)} + \|\sqrt{y} u\|_{L^2(H^\beta)})$$

$$(IV.2) \quad \|\sqrt{y} y^{2p-1} u\|_{L^2(H^{2p\alpha})} \leq c_p (\|\sqrt{y} D_y u\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)} +$$

$$\|\sqrt{y} y^{2p+1} u\|_{L^2(H^{2p+1}\alpha)})$$

Lemme IV.3 : Il existe  $\varepsilon > 0$  tel que pour tout  $u$  de  $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+^n) \cap \mathcal{E}(B \cup \gamma)$

$$(IV.3) \quad \|u\|_{L^2(H^\delta)} \leq M (\|u\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)} + \sum_{j=2}^r \|T_j u\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)})$$

Démonstration de la proposition IV.1 : Soit  $k = \max_j k_j, p_0$  le plus petit entier tel que  $2^{p_0} \geq k_0 + 1$  et  $\varepsilon = \frac{\delta}{2^{p_0+1}}$ . On applique alors

(IV.3) à  $\sqrt{y}^{-k} u$  en remarquant que les  $T_j$  sont tangentiels et on utilise (IV.1) et (IV.2). Il vient alors :

$$(IV.4) \quad \|u\|_{L^2(\mathbb{H}^\delta)} \leq c \|u\|_{V(\mathbb{R}_+^n)} \quad \forall u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^n) \cap \mathcal{E}'(B \cup Y)$$

Le résultat découle alors de la densité de  $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+^n)$  dans  $V(\mathbb{R}_+^n)$ .

Démonstration du lemme IV.2 : Soit  $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^n)$  notons  $\hat{u}(\xi, y)$  la transformée de Fourier partielle par rapport à  $x$ .

$$(IV.5) \quad |\hat{u}(\xi, y)|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |D_t \hat{u}(\xi, t)|^2 dt \leq 2 \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{u}(\xi, t)| |D_t \hat{u}(\xi, t)| dt$$

d'où :

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} (1 + |\xi|^2)^\beta |\hat{u}(\xi, y)|^2 dy d\xi \leq 2 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^\infty \left( \int_0^t dy \right) (1 + |\xi|^2)^\beta |\hat{u}(\xi, t)| |D_t \hat{u}(\xi, t)| dt$$

En utilisant Cauchy-Schwartz et en écrivant  $y = \sqrt{y} \cdot \sqrt{y}$  on obtient

(IV.1). Pour démontrer (IV.2) on part de (IV.5) que l'on multiplie par  $(\sqrt{y}^{-2p-1})^2$  i.e.  $y^{2p+1-1}$  puis par  $(1 + |\xi|^2)^{2p_\alpha}$ . Il vient alors :

$$\| \sqrt{y}^{-2p-1} u \|_{L^2(\mathbb{H}^{2p_\alpha})} \leq c \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left( \int_0^t y^{2p+1-1} dy \right) (1 + |\xi|^2)^{2p_\alpha} |\hat{u}(\xi, t)| \cdot$$

$|D_t \hat{u}(\xi, t)| dt$ . En écrivant  $t^{2p+1} = \sqrt{t} \cdot t^{2p+1-1/2}$  il vient

$$\| \sqrt{y}^{-2p-1} u \|_{L^2(\mathbb{H}^{2p_\alpha})} \leq c_p \int_{\mathbb{R}_+^n} |\sqrt{t} D_t \hat{u}(\xi, t)| (1 + |\xi|^2)^{2p_\alpha} t^{2p+1-1/2} |\hat{u}(\xi, t)| dt$$

et (IV.2) résulte de Cauchy-Schwartz.



Démonstration du lemme IV.3 : Nous utilisons dans ce qui suit une idée développée par Kohn dans [6]. Pour  $\gamma \in \mathbb{R}$   $\Lambda^\gamma$  désigne l'opérateur de  $s(\mathbb{R}^n)$

défini par  $\Lambda^\gamma u(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} [(1+|\xi|^2)^{\gamma/2}] \hat{u}(\xi, y) d\xi$ .

D'autre part :

$$\|u\|_{L^2(H^\delta)} \sim \sum_{i=1}^{n-1} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(H^{\delta-1})} + \|u\|_{L^2}.$$

L'hypothèse (H.5) entraîne que l'on a pour  $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^n) \cap C^1(BU_\gamma)$  :

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^i a_{i,k} F_{q_{k_i}} u$$

ou  $F_{q_{k_i}}$  désigne un crochet des  $T_j$  de longueur  $q_{k_i}$ . Il vient donc

$$(IV.6) \quad \|u\|_{L^2(H^\delta)} \leq c \left( \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k_i=1}^i \|F_{q_{k_i}} u\|_{L^2(H^{\delta-1})} + \|u\|_{L^2} \right)$$

Considérons un terme :

$$\|F_q u\|_{L^2(H^{\delta-1})}^2 = (\Lambda^{\delta-1} F_q u, \Lambda^{\delta-1} F_q u) = (F_q^* \Lambda^{2\delta-2} F_q u, u)$$

Posons  $F_q^* \Lambda^{2\delta-2} = P^{2\delta-1}$  qui est d'ordre  $2\delta-1$ , et écrivons  $F_q = [F_{q-1}, T]$

$$\|F_q u\|_{L^2(H^{\delta-1})}^2 \leq |(P^{2\delta-1} F_{q-1} T u, u)| + |(P^{2\delta-1} T F_{q-1} u, u)| = \textcircled{A} + \textcircled{B}$$

$$\textcircled{A} \leq |([P^{2\delta-1}, F_{q-1}] T u, u)| + |(F_{q-1} P^{2\delta-1} T u, u)|$$

Le premier terme se majore par  $c(\|T u\|_{L^2(H^{2\delta-1})}^2 + \|u\|_{L^2}^2)$

Le deuxième s'écrit  $|(T u, P^{2\delta-1}(b_q - F_{q-1})u)|$  où  $b_q \in C^\infty$ , puisque  $F_{q-1}$  est un opérateur homogène du premier ordre. Ce terme se majore par

$c(\|T u\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^2(H^{2\delta-1})}^2 + \|F_{q-1} u\|_{L^2(H^{2\delta-1})}^2)$ . De la même manière

$$\textcircled{B} \leq c ( \|Tu\|_{L^2} + \|u\|_{L^2} + \|F_{q-1}u\|_{L^2(H^{2\delta-1})} ) .$$

En prenant  $\delta \leq \frac{1}{2}$  il vient :

$$\|F_q u\|_{L^2(H^{\delta-1})} \leq c ( \|Tu\|_{L^2} + \|u\|_{L^2} + \|F_{q-1}u\|_{L^2(H^{2\delta-1})} )$$

En réitérant le procédé on obtient l'inégalité

$$(IV.7) \quad \|F_q u\|_{L^2(H^{\delta-1})} \leq c ( \sum \|T_j u\|_{L^2(H^{2^q \delta - 1})} + \|u\|_{L^2} )$$

Il suffit alors de prendre  $\delta \leq \frac{1}{2^q}$  dans (IV.7) et d'utiliser (IV.6) pour obtenir :

$$\|u\|_{L^2(H^\delta)} \leq c ( \sum_{j=2}^r \|T_j u\|_{L^2} + \|u\|_{L^2} )$$

Remarque IV.4 : Les démonstrations des lemmes IV.2 et IV.3 montrent que l'on peut prendre  $\varepsilon$  de la forme  $\frac{1}{2^l}$  dans la proposition IV.1.

§ 5. REGULARITE

On se donne une forme integro-differentielle définie par :

$$(V.1) \quad a(u, v) = \sum_{l=1}^r \int_{\Omega} \varphi(x) X_j u \cdot X_j v \, dx$$

On pose :

$$W(\Omega) = \{ \sqrt{\varphi} u \in L^2(\Omega) ; \sqrt{\varphi} X_j u \in L^2(\Omega) \quad j = 1, \dots, 2 \}$$

Le lemme de Lax-Milgram montre alors que pour toute  $f$  dans  $[W(\Omega)]'$  il existe  $u$  unique dans  $W(\Omega)$  tel que :

$$(V.2) \quad a(u, v) = (f, v) \quad \forall v \in W(\Omega)$$

Nous utiliserons dans ce paragraphe la technique de régularisation elliptique pour laquelle nous renvoyons à [1].

Soient  $(\mathcal{O}, \theta)$  une carte locale voisinage d'un point de  $\Gamma$  et  $\xi \in \mathcal{F}(\mathcal{O} \cap \bar{\Omega})$ .

Nous noterons  $u_j$  la solution du problème régularisé avec  $f_j \in \mathcal{F}(\bar{\Omega})$ . Alors  $u_j$  est dans  $\mathcal{F}(\bar{\Omega}) \cap H_0^1(\Omega)$ .

Enfin  $\Lambda^\varepsilon$  désigne l'opérateur :  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$  :

$$u \rightarrow \Lambda^\varepsilon u = \mathfrak{F}_\xi [ (1 + |\xi|^2)^{\varepsilon/2} u(\xi, y) ]$$

Lemme V.1 : Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Supposons que  $\xi f \circ \theta^{-1} \in L^2(\mathbb{R}_+ ; H^{k\varepsilon}(\mathbb{R}^{n-1}))$  alors les quantités :  $\sqrt{\varepsilon_j} \| \Lambda^{(k+1)\varepsilon} \xi u_j \|_{H_0^1}$  et  $| \Lambda^{(k+1)\varepsilon} \xi u_j |_V$  reste bornées lorsque  $j$  varie.

Démonstration : Nous raisonnons par récurrence sur  $k$ . Pour  $k = 0$  posons :

$$A_j = a_j(\Lambda^\varepsilon \xi u_j, \Lambda^\varepsilon \xi u_j)$$

$$B_j = a_j(u_j, \xi \Lambda^\varepsilon \Lambda^\varepsilon \xi u_j) = (\xi f_j, \Lambda_\varepsilon \Lambda_\varepsilon \xi u_j)$$

$$|A_j| \geq \varepsilon_j \| \Lambda^\varepsilon \xi u_j \|_{H_0^1}^2 + | \Lambda^\varepsilon \xi u_j |_V^2$$

$$|B_j| \leq \| \xi f_j \|_{L^2} \cdot \| \Lambda^\varepsilon \xi u_j \|_{L^2(H^\varepsilon)} \leq C \varepsilon^{\frac{1}{2}} | \Lambda^\varepsilon \xi u_j |_V \text{ d'après la proposition 11.2}$$

Il suffit pour conclure de montrer que l'on a :

$$(V.3) \quad |A_j - B_j| \leq c(\sqrt{\varepsilon}^{-1} \Lambda^\varepsilon \xi u_j)_{H_0^1} + |\Lambda^\varepsilon \xi u_j|_V$$

On a à majorer des termes du type :

$$\left| \int_{\mathbb{R}_+^n} y |X \Lambda^\varepsilon \xi u_j|^2 dx - \int_{\mathbb{R}_+^n} y X u_j \cdot X \xi \Lambda^\varepsilon \Lambda^\varepsilon \xi u_j dx \right| = | \textcircled{1} - \textcircled{2} |$$

où X est l'un des champs de vecteurs  $\tilde{X}_k$   $k = 1, \dots, r$

$$\textcircled{2} = \int_{\mathbb{R}_+^n} y X u_j [X, \xi] \Lambda^\varepsilon \Lambda^\varepsilon \xi u_j + \int_{\mathbb{R}_+^n} y X u_j \xi X \Lambda^\varepsilon \Lambda^\varepsilon \xi u_j$$

Le premier terme de  $\textcircled{2}$  se majore par

$$(\| \sqrt{\varepsilon} D_y u_j \|_{L^2} + \sum_{q=2}^r \| y^{q, \sqrt{\varepsilon}} \Gamma_q u_j \|_{L^2}) \| \Lambda^\varepsilon \xi u_j \|_{L^2(H^\varepsilon)}$$

i.e. par  $c. |\Lambda^\varepsilon \xi u_j|_V$  car  $|u_j|_V$  est borné.

Compte tenu du fait que X s'écrit  $a D_y + \sum Y_k$  où les  $Y_k$  sont des opérateurs tangentiels, le deuxième terme de  $\textcircled{2}$  s'écrit :

$$\int y X u_j \cdot \xi \Lambda^\varepsilon X \Lambda^\varepsilon \xi u_j + \int y X u_j \xi [ \Lambda^\varepsilon, a ] D_y \Lambda^\varepsilon \xi u_j + \sum \int y X u_j \xi [ \Lambda^\varepsilon, Y_k ] \Lambda^\varepsilon \xi u_j$$

Les deux derniers termes se majorent par  $c. |\Lambda^\varepsilon \xi u_j|_V$ .

En utilisant Parseval en la variable x on voit que le premier terme vaut :

$$\int y \Lambda^\varepsilon \xi X u_j \cdot X \Lambda^\varepsilon \xi u_j$$

On commute alors  $\xi$  et X, le commutant se majorant par  $c. |\Lambda^\varepsilon \xi u_j|_V$ , et l'on obtient un terme qui s'élimine avec  $\textcircled{1}$ .

Un calcul analogue permet de majorer les termes provenant de  $\varepsilon_j(u, v)_{H_0^1}$ .  
 On admet donc le lemme à l'ordre k et il s'agit de le démontrer  $H_0^1$   
 à l'ordre k+1. Posons de même :

$$A_j = a_j (\Lambda^{(k+1)\varepsilon} \xi_{u_j}, \Lambda^{(k+1)\varepsilon} \xi_{u_j})$$

$$B_j = a_j (u_j, \xi \Lambda^{(k+1)\varepsilon} \Lambda^{(k+1)\varepsilon} \xi_{u_j}) = (\Lambda^{k\varepsilon} \xi_{f_j}, \Lambda^\varepsilon \Lambda^{(k+1)\varepsilon} \xi_{u_j})$$

On a de même :

$$|A_j| \geq \varepsilon_j \|\Lambda^{(k+1)\varepsilon} \xi_{u_j}\|_{H_0^1}^2 + |\Lambda^{(k+1)\varepsilon} \xi_{u_j}|_V^2$$

$$|B_j| \leq c |\Lambda^{(k+1)\varepsilon} \xi_{u_j}|_V \quad \text{d'après la proposition IV.1.}$$

Tout revient alors à démontrer l'inégalité, analogue à (V.3), suivante :

$$(V.4) \quad |A_j - B_j| \leq c (\sqrt{\varepsilon_j} \|\Lambda^{(k+1)\varepsilon} \xi_{u_j}\|_{H_0^1} + \|\Lambda^{(k+1)\varepsilon} \xi_{u_j}\|_V)$$

Cela se fait par les mêmes techniques que précédemment, et en utilisant l'hypothèse de récurrence i.e.  $|\Lambda^{k\varepsilon} \xi_{u_j}|_V$  et  $\sqrt{\varepsilon_j} \|\Lambda^{k\varepsilon} \xi_{u_j}\|_{H_0^1}$  bornées lorsque  $j$  varie.

Corollaire III.2 : Si  $\xi f \in L^2(\mathbb{R}_+; H^{1-\varepsilon}(\mathbb{R}^{n-1}))$  alors  $D_{x_i} \xi u \in V(\mathbb{R}_+^n)$   $i=1, n-1$

Démonstration : On prend dans le lemme V.1  $k$  tel que  $(k+1)\varepsilon = 1$ , ce qui est possible d'après la remarque IV.4, et on passe à la limite en  $j$  (quitte à extraire des sous-suites).

Dans une carte locale l'opérateur  $A = \sum_{j=1}^r X_j^*(\varphi X_j)$  associé à la forme sesquilinéaire définie en (V.1) s'écrit

$$(V.4) \quad \sum_{j=1}^r (1 + a_j^2) D_y (y D_y) + \sum_{j=1}^r b_j y D_y + \sum_{j=1}^r \sum_{q=1}^{N_j} c_i y \cdot y^q T_q + \sum_{j=1}^r \sum_{q=1}^{N_j} d_j y^q T_q$$

$$+ \sum_{j=1}^r \sum_{q=1}^{N_j} d_j y^q T_q D_y + \sum_{j=1}^r \sum_{p,q=1}^{N_j} y^q y^k T_q T_p$$

Si  $\xi f \in L^2(\mathbb{R}_+; H^{1-\varepsilon}(\mathbb{R}^{n-1}))$  il résulte du corollaire V.2 et de l'expression de  $A$  que :

$$(V.5) \quad D_y (y D_y \xi u) \in L^2(\mathbb{R}_+^n).$$

Nous allons montrer, en suivant Baouendi-Goulaouic [2], que (V.5) entraîne

$$(V.6) \quad \begin{aligned} D_y \xi u &\in L^2(\mathbb{R}_+^n) \\ y D_{yy} \xi u &\in L^2(\mathbb{R}_+^n) \end{aligned}$$

En effet, posons  $w = y D_y \xi u$ . Comme  $\sqrt{y} D_y \xi u \in L^2$  on a  $w(0) = 0$ , d'où

$$D_y \xi u = \frac{1}{y} \int_0^y D_t (t D_t \xi u) dt$$

L'inégalité 330 de Hardy assure alors que  $D_y \xi u \in L^2(\mathbb{R}_+^n)$  d'où (V.6).  
Soit E l'espace des fonctions u telles que :

- 1)  $u \in H_{loc}^\varepsilon(\Omega)$
- 2)  $\forall (\mathcal{O}, \theta)$  carte locale voisinage d'un point de  $\Gamma$  et  $\forall \xi \in \mathcal{D}(\mathcal{O} \cap \bar{\Omega})$

$$\xi u \in H^1(\mathbb{R}_+^n), \sqrt{y} D_y D_{x_i} \xi u \in L^2(\mathbb{R}_+^n), y D_{yy} \xi u \in L^2(\mathbb{R}_+^n), \sqrt{y} y^{k_q} T_q D_{x_i} \xi u \in L^2(\mathbb{R}_+^n)$$

On a alors le :

Théorème V.3 : Si f est telle que  $\xi f \cdot \theta^{-1} \in L^2(H^{1-\varepsilon})$  et  $f \in L^2(\Omega)$  la solution u du problème (V.2) est dans E.

Régularité d'ordre supérieur : On définit d'abord un nouvel espace des fonctions : pour  $k \in \mathbb{N}$  on pose :

$$\begin{aligned} E_k = \{ u \in H_{loc}^{k+\varepsilon}(\Omega) : \xi u \in H^{k+1}(\mathbb{R}_+^n), \sqrt{y} D_y D_{x_i} \xi u \in H^k(\mathbb{R}_+^n) \\ y D_{yy} \xi u \in H^k(\mathbb{R}_+^n), \sqrt{y} y^{k_q} T_q D_{x_i} \xi u \in H^k(\mathbb{R}_+^n) \} \end{aligned}$$

On a alors le

Théorème V.4 : Soit  $k \in \mathbb{N}$ , supposons que  $\xi f \in H^k(\mathbb{R}_+^n) \cap L^2(\mathbb{R}_+^n; H^{k+1-\varepsilon})$  et  $f \in H^k(\Omega)$  alors la solution u du problème (V.2) est dans  $E_k$ .

Corollaire V.5 : Si  $f \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$  la solution  $u$  du problème (V.2) est dans  $\mathcal{F}(\bar{\Omega})$ .

Démonstration du théorème V.4 : Nous raisonnons par récurrence sur  $k$ . Pour  $k = 0$  cela résulte du théorème III.3. Supposons le vrai pour  $k_0$  et démontrons le pour  $k_0 + 1$ . Nous commençons par démontrer  $k$  :

Lemme V.6 : Soit  $p \in [0, \frac{1}{\varepsilon}] \cap \mathbb{N}$ . Supposons que  $\xi f \in L^2(H^{k_0+1+(p-1)\varepsilon})$  alors  $\Lambda^{p\varepsilon} \xi u \in E_{k_0}$ .

Démonstration : Pour  $p = 0$  cela résulte de l'hypothèse de récurrence. Supposons le démontré pour  $p$  et démontrons la pour  $p + 1$  :

$$\Lambda \Lambda^{\varepsilon} \xi u = \Lambda^{\varepsilon} \xi f + [A, \Lambda^{\varepsilon} \xi] \beta u \quad \beta \in \mathcal{D}(\mathcal{O} \cap \bar{\Omega}) \quad \beta = 1 \text{ sur } \text{supp. } \xi$$

Par hypothèse  $\Lambda^{\varepsilon} \xi f \in L^2(H^{k_0+1+(p-1)\varepsilon})$ . D'autre part, puisque  $\Lambda^{p\varepsilon} \xi u \in E_{k_0}$  (hypothèse de récurrence) on a  $[A, \Lambda^{\varepsilon} \xi] \beta u \in L^2(\mathbb{R}_+; H^{k_0+1+(p-1)\varepsilon})$ . Enfin  $\Lambda^{\varepsilon} \xi u \in \dots$ . L'hypothèse de récurrence entraîne alors que  $\Lambda^{p\varepsilon} \Lambda^{\varepsilon} \xi u \in E_{k_0}$ .

c q f d

Démonstration du théorème V.4 : En faisant  $p = \frac{1}{\varepsilon}$  dans le lemme III.6, on obtient :

$$(V.7) \quad D_{x_i} \xi u \in E_{k_0}$$

Ensuite on utilise le fait que  $\Lambda \xi u = \xi f + [A, \xi] \beta u \in H^{k_0+1}(\mathbb{R}_+^n)$  puisque  $\xi f \in H^{k_0+1}(\mathbb{R}_+^n)$  et  $\xi u \in E_{k_0}$  en vertu de l'hypothèse de récurrence.

D'autre part il est facile de voir que d'après (V.7) et la récurrence, tous les termes de  $\Lambda \xi u$ , sauf le terme  $D_y(y D_y \xi u)$ , sont dans  $H^{k_0+1}(\mathbb{R}_+^n)$  on en déduit que  $D_y(y D_y \xi u) \in H^{k_0+1}(\mathbb{R}_+^n)$  et par un argument semblable à celui utilisé dans [6] Proposition 3.3, on obtient :

$$(V.8) \quad D_y \xi u \in H^{k_0+1} ; \quad y D_{yy} \xi u \in H^{k_0+1}$$

d'où  $\xi u \in E_{k_0+1}$  (à l'intérieur de cela résulte de Hörmander [4])

Remarque V.7 : Des résultats de régularité analogue à ceux de [7] peuvent être obtenus pour l'opérateur  $A_p = \sum_{j=1}^r X_j^* \phi^p X_j$ ,  $p$  entier  $\geq 1$ . Plus précisément on peut démontrer que " $A_p$  est un isomorphisme de  $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$  sur  $\mathcal{D}(\bar{\Omega}) \cap H_0^{p-1}(\Omega)$ "

### BIBLIOGRAPHIE

- [1] M.S. Baouendi : "Sur une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés", Bull. Soc. Math. Fr. 1967, pp. 45 à 87.
- [2] M.S. Baouendi et C. Goulaouic : "Régularité et théorie spectrale pour une classe d'opérateurs dégénérés", Comptes Rendus Acad. Sc. Paris, t. 266 (1968), pp. 336-338.
- [3] M. Derridi : "Sur un problème aux limites non elliptique", Comptes Rendus Acad. Sc. Paris, t. 268 pp.1593-95 et t.269 pp.11-13.
- [4] L. Hörmander : "Hypoelliptic second order differential equations", Acta Mathem. 1967, Vol. 119, pp. 147-171.
- [5] L. Hörmander : "Linear partial differential operators", Springer Verlag.
- [6] J.J. Kohn : "Pseudo differential operators and non elliptic problems", C.I.M.E., Stresa (1968).
- [7] C. Zuily : "Etude de la régularité d'une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés", Comptes Rendus Acad. Sc. Paris, Serie A, t. 268 p. 532-534 (1969).