François Baratin

Introduction à l'étude des opérateurs Fourier intégraux : intégrale oscillante

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1970-1971), exp. nº 23, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1970-1971____A23_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77
(633)

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 0 - 1 9 7 1

INTRODUCTION A L'ETUDE DES OPERATEURS FOURIER INTEGRAUX : INTEGRALE OSCILLANTE.

par François BARATIN

Exposé N° 23

31 Mars 1971

§ 0. INTRODUCTION

Soit X un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Un opérateur pseudo-différentiel sur X peut s'écrire sous la forme :

$$Au(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x,\theta\rangle} a(x,\theta)\, \hat{u}(\theta)d\theta$$

où $\qquad u \in \mathcal{S}(x) \quad \text{et} \quad a \in \mathcal{S}(X \times \mathbb{R}^n, m)$. [1]

Ceci s'écrit formellement :

$$Au(x) = \iint_{X \times \mathbb{R}^n} e^{i\langle x-y,\theta\rangle} a(x,\theta)\, u(y)\, dy\, d\theta \ .$$

Il s'agit de donner un sens à cette "intégrale", et de l'étendre aux cas où $\langle x - y,\theta\rangle$ et $a(x,\theta)$ sont remplacées par des fonctions $\varphi(x,y,\theta)$ (appelée "fonction de phase") et $a(x,y,\theta)$ (appelée "symbole") plus générales. Les opérateurs A correspondants seront appelés "Opérateurs Fourier intégraux"[2]. Ces opérateurs permettent de résoudre des problèmes de Cauchy hyperboliques à coefficients variables, alors que les pseudo-différentiels ne permettaient de résoudre que des problèmes elliptiques.

Cet exposé commence par définir des espaces de symboles, et donner un résultat de densité qui permet ensuite de définir les "oscillateurs intégraux", expressions du type $\iint e^{i\varphi(x,\theta)} a(x,\theta)u(x)dx\, d\theta$ par prolongement. Des résultats sur les oscillateurs intégraux dépendant d'un paramètre conduiront enfin à la définition des opérateurs Fourier intégraux.

[1] Séminaire Goulaouic-Schwartz 1970-1971, Exposés N° 3 et 4 de M. Unterberger.

[2] Voir "Fourier Integral Operator" de Lars Hörmander.

§ 1. ESPACES DES SYMBOLES

Soient n et N deux entiers positifs et X un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Définition I.1 : Pour $m \in \mathbb{R}$, $0 \leq \rho, \delta \leq 1$, on note $S^m_{\rho\delta}(X \times \mathbb{R}^N)$ l'espace des $a \in C^\infty(X \times \mathbb{R}^N)$ tels que pour tout compact K de X, et tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^N$, $\beta \in \mathbb{N}^n$, il existe une constante $C_{K\alpha\beta}$ telle que :

$$\forall\, x \in K, \quad \forall\, \theta \in \mathbb{R}^N \quad |D^\beta_x \, D^\alpha_\theta \, a(x,\theta)| \leq C_{K\alpha\beta} \; (1 + |\theta|)^{m - \rho|\alpha| + \delta|\beta|} \; .$$

On munit $S^m_{\rho\delta}(X \times \mathbb{R}^N)$ de la topologie la plus grossière rendant continues les semi-normes :

$$\|a\|^{(m)}_{K\alpha\beta} = \sup_{\substack{x \in K \\ \theta \in \mathbb{R}^N}} \frac{|D^\beta_x \, D^\alpha_\theta \, a(x,\theta)|}{(1+|\theta|)^{m-\rho|\alpha| + \delta|\beta|}}$$

Les éléments de $S^m_{\rho\delta}(X \times \mathbb{R}^N)$ sont dits symboles d'ordre m, et de type (ρ, δ). On pose $S^{+\infty}_{\rho\delta}(X \times \mathbb{R}^N) = \bigcup_{m \in \mathbb{R}} S^m_{\rho\delta}(X \times \mathbb{R}^N)$; $S^{-\infty}_{\rho\delta}(X \times \mathbb{R}^N) = \bigcap_{m \in \mathbb{R}} S^m_{\rho\delta}(X \times \mathbb{R}^N)$.

Exemples : 1) Les symboles de $\mathcal{S}(X + \mathbb{R}^n, m)$ introduits par M. Unterberger appartiennent à $S^m_{10}(X \times \mathbb{R}^n)$.

2) On définit $\mathcal{D}_\theta(X \times \mathbb{R}^N)$, espace des $a \in C^\infty(X \times \mathbb{R}^N)$ vérifiant : $\exists R \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall |\theta| \geq R$, $a(x,\theta) = 0$.

Alors $\mathcal{D}_\theta(X \times \mathbb{R}^N) \subset S^{-\infty}_{10}(X \times \mathbb{R}^N)$.

On notera $\mathcal{D}^{(m)}_\theta(X \times \mathbb{R}^N)$, l'espace $\mathcal{D}_\theta(X \times \mathbb{R}^N)$ muni de la topologie induite par $S^m_{\rho\delta}(X \times \mathbb{R}^N)$.

Voici sans démonstration quelques propriétés élémentaires de ces espaces :

- $S^m_{\rho\delta}(X \times \mathbb{R}^N)$ est un espace de Fréchet.

- Pour tout $m' \geq m$, $\delta' \geq \delta$, $\rho' \leq \rho$, on a $S^m_{\rho\delta}(X \times \mathbb{R}^N) \subset S^{m'}_{\rho'\delta'}(X \times \mathbb{R}^N)$ et l'injection canonique est continue.

- Pour tout multi indice α, β, $D^\beta_x\, D^\alpha_\theta$ est une application continue de $S^m_{\rho\delta}(X \times \mathbb{R}^N)$ dans $S^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}(X \times \mathbb{R}^N)$.

- La multiplication des symboles est continue de $S^m_{\rho\delta}(X \times \mathbb{R}^N) \times S^{m'}_{\rho\delta}(X \times \mathbb{R}^N)$ dans $S^{m+m'}_{\rho\delta}(X \times \mathbb{R}^N)$.

Le résultat le plus important pour la suite est le suivant :

<u>Théorème I.2</u> : Soit $m' > m$; alors tout ensemble borné de $S^m_{\rho\delta}(X \times \mathbb{R}^N)$ est relativement compact dans $S^{m'}_{\rho\delta}(X \times \mathbb{R}^N)$.

<u>Preuve</u> : Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de $S^m_{\rho\delta}(X \times \mathbb{R}^N)$. Pour tout compact $K \times C$ de $X \times \mathbb{R}^N$, pour tout multi indice α, β, la suite $(D^\beta_x\, D^\alpha_\theta\, a_n(x,\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ est équibornée et équicontinue sur $K \times C$.

On peut donc, par le théorème d'Ascoli, en extraire une sous-suite convergent uniformément sur $K \times C$.

Par un procédé diagonal, on extrait ainsi de la suite initiale une sous-suite $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ qui converge dans $C^\infty(X \times \mathbb{R}^N)$ vers $a \in C^\infty(X \times \mathbb{R}^N)$.

On montre alors facilement que $a \in S^m_{\rho\delta}(X \times \mathbb{R}^N)$ et que $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers a pour la topologie de $S^{m'}_{\rho\delta}(X \times \mathbb{R}^N)$ en utilisant le fait que $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée dans $S^m_{\rho\delta}(X \times \mathbb{R}^N)$.

c q f d

<u>Remarque I.3</u> : Sur tout ensemble borné de $S^m_{\rho\delta}(X + \mathbb{R}^N)$, les topologies $S^{m'}_{\rho\delta}(X \times \mathbb{R}^N)$ pour $m' > m$, la topologie $C^\infty(X \times \mathbb{R}^N)$, la topologie de la convergence simple coïncident toutes.

<u>Corollaire I.4</u> : $\mathfrak{D}_\theta(X \times \mathbb{R}^N)$ est partout dense dans $S^m_{\rho\delta}(X \times \mathbb{R}^N)$ pour la topologie induite par celle de $S^{m'}_{\rho\delta}(X \times \mathbb{R}^N)$ pour tout $m' > m$.

Preuve : Soit $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ valant 1 dans un voisinage de 0. Pour tout $a \in S^m_{\rho\delta}(X \times \mathbb{R}^N)$, posons $a_\varepsilon\ (x,\theta) = a(x,\theta)\ \chi(\varepsilon\ |\theta|)$. La suite $(a_\varepsilon\ )$ appartient à $\mathcal{D}_\theta(X \times \mathbb{R}^N)$, est bornée dans $S^m_{\rho\delta}(X\ \ \mathbb{R}^N)$ et converge simplement vers a quand ε tend vers 0.

Corollaire I.5 : Soit L une application linéaire de $\mathcal{D}_\theta(X \times \mathbb{R}^N)$ dans un espace de Fréchet, continue pour la topologie induite par $S^m_{\rho\delta}(X \times \mathbb{R}^N)$ pour tout $m \in \mathbb{R}$. Alors il existe une extention unique de L à $S^{+\infty}_{\rho\delta}(X \times \mathbb{R}^N)$ qui est continue sur $S^m_{\rho\delta}(X \times \mathbb{R}^N)$ pour tout $m \in \mathbb{R}$.

Preuve : Soit $m \in \mathbb{R}$, et $m' > m$ quelconques. D'après le corollaire I.4, L se prolonge en une forme linéaire continue sur $S^m_{\rho\delta}(X \times \mathbb{R}^N)$ muni de la topologie induite par celle de $S^{m'}_{\rho\delta}(X \times \mathbb{R}^N)$, donc continue sur $S^m_{\rho\delta}(X \times \mathbb{R}^N)$.

Une remarque utile pour le § 3 :

Remarque I.6 : L'espace des fonctions $a \in C^\infty(X \times \mathbb{R}^N)$ positivement homogènes par rapport à θ de degré m, est un sous-espace fermé de $C^\infty(X \times \mathbb{R}^N)$, donc aussi de $S^m_{10}\ (X \times \mathbb{R}^N)$, et ces deux topologies coïncident sur ce sous-espace.

§ 2. DEFINITION ET EXISTENCE DES "OSCILLATEURS INTEGRAUX" (développement dans le cas de deux variables).

Il s'agit de donner un sens à une expression du type :

$$I_\varphi(au) = \iint e^{i\varphi(x,\theta)}\ a(x,\theta)\ u(x)\ dx\ d\theta \qquad (1)$$

avec les conditions générales suivantes :

- $u \in \mathcal{D}^k(X)$
- $a \in S^m_{\rho\delta}(X \times \mathbb{R}^N)$
- $\varphi : X \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, positivement homogène de degré 1 par rapport à θ, infiniment différentiable pour $\theta \neq 0$.

Pour cela, nous allons d'abord fixer $u \in \mathcal{D}(X)$ et considérer $I_\varphi(au)$ comme une application linéaire : $a \to I_\varphi(an)$.

- Pour tout $m < -N$, $e^{i\varphi(x,\theta)} a(x,\theta)\, u(x)$ est absolument intégrable sur $X \times \mathbb{R}^N$, et l'application $a \to I_\varphi(au)$ est continue de $S^m_{\rho\delta}(X \times \mathbb{R}^N)$ dans $\mathbb{C}$.
- Pour $m \geq -N$, il n'est pas possible de définir $I_\varphi(au)$ dans le cas général (Contre-exemple dans le cas où φ est nulle dans un ouvert non vide de $X \times \mathbb{R}^N$). On va montrer "en intégrant par partie" lorsque cela est possible, que l'application $a \to I_\varphi(au)$ est continue sur $\mathcal{D}^{(m)}_\theta(X \times \mathbb{R}^N)$, pour tout $m \in \mathbb{R}$, et on utilisera le corollaire I.5.

<u>Lemme 2.1</u> : Si φ n'a pas de point critique (x,θ) pour $\theta \neq 0$, alors il existe un opérateur différentiel du 1er ordre :

$$L = \sum_j a_j \frac{\partial}{\partial\theta_j} + \sum_i b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + c$$

avec $a_j \in S^0_{\rho\delta}(X \times \mathbb{R}^N)$, b_i et $c \in S^{-1}_{\rho\delta}(X \times \mathbb{R}^N)$, et tel que ${}^tLe^{i\varphi} = e^{i\varphi}$ si ${}^tL$ est l'adjoint de L.

<u>Preuve</u> : Par hypothèse, la fonction $\sum_i \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right|^2 + |\theta|^2 \sum_j \left|\frac{\partial\varphi}{\partial\theta_j}\right|^2$ est non nulle pour $\theta \neq 0$, homogène de degré 2 par rapport à θ ; soit ψ son inverse. En prenant $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ valant 1 au voisinage de 0, puis

$$a'_j(x,\theta) = \psi(x,\theta)[1-\chi(|\theta|)]\, |\theta|^2 \frac{\partial\varphi}{\partial\theta_j}(x,\theta)$$

$$b'_j(x,\theta) = \psi(x,\theta)[1-\chi(|\theta|)] \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x,\theta)$$

$$c'(x,\theta) = \chi(|\theta|)$$

on voit que la forme différentielle $M = \sum_j a'_j \frac{\partial}{\partial\theta_j} + \sum_i b'_i \frac{\partial}{\partial x_i} + c'$ vérifie $Me^{i\varphi} = e^{i\varphi}$. Il suffit alors de prendre $L = {}^tM$.

c q f d

Pour $a \in \mathcal{D}_\theta(X \times \mathbb{R}^N)$, $\iint e^{i\varphi(x,\theta)}\, a(x,\theta)\, u(x)\, dx\, d\theta$ a un sens et on peut intégrer par partie :

$$I_\varphi(au) = \iint {}^tL[e^{i\varphi(x,\theta)}]\, a(x,\theta)\, u(x)\, dx\, d\theta$$

$$= \iint e^{i\varphi(x,\theta)}\, L[a(x,\theta)\, u(x)]\, dx\, d\theta$$

et après itération :

$$I_\varphi(au) = \iint e^{i\varphi(x,\theta)}\, L^k[a(x,\theta)u(x)]\, dx\, d\theta \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

L est continue de $S^m_{\rho\delta}(X \times \mathbb{R}^N)$ dans $S^{m-t}_{\rho\delta}(X \times \mathbb{R}^N)$ où $t = \inf(\rho, 1-\delta)$ donc L^k est continue de $S^m_{\rho\delta}(X \times \mathbb{R}^N)$ dans $S^{m-kt}_{\rho\delta}(X \times \mathbb{R}^N)$. Si t est strictement positif, on pourra trouver $k \in \mathbb{N}$, avec $m - kt < -N$. Alors l'application $a \to I_\varphi(au) = I_\varphi(L^k[au])$ est continue sur $\mathcal{D}^{(m)}_\theta(X \times \mathbb{R}^N)$ et on la prolonge à $S^{+\infty}_{\rho\delta}(X \times \mathbb{R}^N)$ par le corollaire I.5.

Définissons maintenant $I_\varphi(au)$ pour $a \in S^m_{\rho\delta}(X \times \mathbb{R}^N)$ et $u \in \mathcal{D}^k(X)$, avec $m - kt < -N$. Soit $m' \in \mathbb{R}$, tel que $m' > m$, et $m' - kt < -N$. Pour tout compact K de X, on montre facilement que l'application bilinéaire $(a,u) \to I_\varphi(au)$ est séparément continue par rapport à chaque variable de $\mathcal{D}^{(m')}_\theta(X \times \mathbb{R}^N) \times \mathcal{D}^k_K(X)$ dans $\mathbb{C}$, donc continue sur $\mathcal{D}^{(m')}_\theta(X \times \mathbb{R}^N) \times \mathcal{D}^k_K(X)$, puisque $\mathcal{D}^k_K(X)$ est un espace de Baire, et que $\mathcal{D}^{(m')}(X \times \mathbb{R}^N)$ est métrisable.
Donc l'extension de $I_\varphi(au)$ est continue de $S^m_{\rho\delta}(X \times \mathbb{R}^N) \times \mathcal{D}^k_K(X)$ dans $\mathbb{C}$. Ainsi pour tout $a \in S^m_{\rho\delta}(X \times \mathbb{R}^N)$, l'application $u \to I_\varphi(au)$ est définie et continue sur $\mathcal{D}^k_K(X)$ pour tout compact K de X, donc continue sur $\mathcal{D}^k(X)$, limite inductive des $\mathcal{D}^k_K(X)$.

Nous avons donc montré le

<u>Théorème 2.2</u> : Si φ n'a pas de point critique pour $\theta \neq 0$, si $\rho > 0$ et $\delta < 1$, alors $I_\varphi(au)$ s'étend de façon unique à $a \in S^{+\infty}_{\rho\delta}(X \times \mathbb{R}^N)$, $u \in \mathcal{D}(X)$ telle que l'application $a \to I_\varphi(au)$ soit continue de $S^m_{\rho\delta}(X \times \mathbb{R}^N)$ dans $\mathbb{C}$ pour tout $m \in \mathbb{R}$.

Par ailleurs, si $a \in S^m_{\rho\delta}(X \times \mathbb{R}^N)$ et si $m - k\rho < -N$, $m - k(1-\delta) < -N$.

alors l'application $u \to I_\varphi(au)$ s'étend de façon unique en une application continue de $\mathcal{D}^k(X)$ dans $\mathbb{C}$. (distribution d'ordre $\leq k$).

§ 3. INTEGRALE OSCILLANTE DEPENDANT D'UN PARAMETRE

Soit X (resp. Y) un ouvert de $\mathbb{R}^{n_1}$ (resp. $\mathbb{R}^{n_2}$).

On suppose :

$$a \in S^m_{\rho\delta}(X \times Y \times \mathbb{R}^N)$$

$$\varphi \in C^\infty(X \times Y \times (\mathbb{R}^N - \{0\}))$$

telle que, pour tout $y \in Y$, l'application $(x,\theta) \to \varphi(x,y,\theta)$ vérifie les conditions du § 2.

On notera :

$$\lambda^{(m')} : Y \to S^{m'}_{\rho\delta}(X \times \mathbb{R}^N) \quad \text{qui à } y \in Y \text{ associe } a(x,y,\theta), \text{ pour } m' \geq m.$$

$$\mu \quad : Y \to C^\infty(X \times \mathbb{R}^N) \quad \text{qui à } y \in Y \text{ associe } \varphi(x,y,\theta).$$

Les hypothèses sur a et φ impliquent que $\lambda^{(m')}$ pour $m' > m$, et μ sont continues.

On définit alors une application $A : Y \to \mathbb{C}$ par

$$A(y) = \iint e^{i\varphi(x,y,\theta)} a(x,y,\theta)\, u(x)\, dx\, d\theta$$

et on a le résultat suivant :

<u>Théorème 3.1</u> : Si $u \in \mathcal{D}^k(X)$ avec $m - k\rho < -N - j$, $m - k(1-\delta) < -N - j$, alors $A(y) \in C^j(Y)$. On obtiend les dérivées successives de $A(y)$ en dérivant formellement sous le "signe somme". De plus, l'application linéaire $\mathcal{D}^k(X) \to C^j(Y)$, qui à $u(x)$ associe $A(y)$ est continue.

<u>Remarque</u> : Soit $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ valant 1 dans un voisinage de 0 ; pour tout $\varepsilon > 0$ posons

$$A_\varepsilon(y) = \iint e^{i\varphi(x,y,\theta)} a(x,y,\theta)\, \chi(\varepsilon|\theta|)\, u(x)\, dx\, d\theta.$$

Par les théorèmes de Lebègue, et de dérivation sous le signe somme, il est clair que le théorème 3.1 est vrai pour les $A_\varepsilon(y)$. Mais dans le cas général, l'expression de $A(y)$ n'est pas une vraie intégrale, mais un "prolongement" : on ne peut donc pas, a priori, lui appliquer les mêmes résultats qu'aux intégrales. Le théorème 3.1 se démontre facilement à l'aide du

<u>Lemme 3.2</u> : Quand ε tend vers 0, $A_\varepsilon(y)$ converge vers $A(y)$ uniformément sur tout compact de Y.

<u>Preuve</u> : La convergence simple est clair d'après 1.3 et 2.4. Il suffit alors de montrer que $A_\varepsilon(y)$ converge uniformément sur tout compact quand ε tend vers 0 (critère de Cauchy). Soit donc C un compact de Y ; on procede en trois étapes :

- Pour tout $m' > m$, $a(x,y,\theta)\chi(\varepsilon|\theta|)$ converge vers $a(x,y,\theta)$ dans $S^{m'}_{\rho\delta}(X \times \mathbb{R}^N)$ uniformément pour $y \in C$ quand ε tend vers 0. Pour le montrer, on prend m'', $m' > m'' > m$, et on remarque que l'image de C, compact, par $\lambda^{(m'')}$, continue, est bornée dans $S^{m''}_{\rho\delta}(X \times \mathbb{R}^N)$.

- $L^k[a(x,y,\theta)\ \chi(\varepsilon|\theta|)\ u(x)]$ converge dans $S^{m'-kt}_{\rho\delta}(X \times \mathbb{R}^N)$ uniformément pour $y \in C$ quand ε tend vers 0. Pour le montrer, on remarque que les coefficients a_j (resp. b_i, c) de L sont bornés dans $S^{o}_{\rho\delta}(X \times \mathbb{R}^N)$ (resp. $S^{-t}_{\rho\delta}(X \times \mathbb{R}^N)$) quand y parcourt C. En effet, ils sont bornés dans $C^\infty(X \times \mathbb{R}^N)$ car ils dépendent de y par l'intermédiaire de φ et que l'image de C par μ est bornée dans $C^\infty(X \times \mathbb{R}^N)$; et on utilise alors la remarque 1.6, puisque les a_j (resp. b_i, c) sont homogènes de degré 0 (resp. -1) par rapport à θ.

- La conclusion est claire en prenant $m' > m$, $m' - kt < -N$, et en écrivant

$$A_\varepsilon(y) = \iint e^{i\varphi(x,y,\theta)}\ L^k[a(x,y,\theta)\ u(x)\ \chi(\varepsilon|\theta|)]\ dx\ d\theta,$$

expression qui est une vraie intégrale.

c q f d

Le lemme 3.2 permet aussi de démontrer simplement un "théorème de Fubini" pour les intégrales oscillantes.

Théorème 3.3 : Si $u \in \mathcal{D}^k(X \times Y)$ avec $m - k\rho < -N$, $m - k(1-\delta) < -N$, alors les deux expressions

$$\iiint e^{i\varphi(x,y,\theta)} \, a(x,y,\theta) \, u(x,y) \, dx \, dy \, d\theta$$

et

$$\int dy \iint e^{i\varphi(x,y,\theta)} \, a(x,y,\theta) \, u(x,y) \, dx \, d\theta$$

sont définies et sont égales.

§ 4. OPERATEURS FOURIER INTEGRAUX

Soit X (resp. Y) un ouvert de $\mathbb{R}^{n_1}$ (resp. $\mathbb{R}^{n_2}$).

Définition 4.1 : On appelle "fonction de phase" une application de $X \times Y \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, infiniment différentiable pour $\theta \neq 0$, positivement homogène de degré par rapport à θ, et telle que :

(i) Pour tout $x \in X$, l'application $(y,\theta) \to \varphi(x,y,\theta)$ n'a pas de point critique pour $\theta \neq 0$.

(ii) Pour tout $y \in Y$, l'application $(x,\theta) \to \varphi(x,y,\theta)$ n'a pas de point critique pour $\theta \neq 0$.

La condition (i) permet alors de poser :

Définition 4.2 : Soit φ une fonction de phase, $a \in S^m_{\rho\delta}(X \times Y \times \mathbb{R}^N)$, on appelle "opérateur Fourier Intégral", l'opérateur A défini sur $\mathcal{D}(X)$ par

$$Au(y) = \iint e^{i\varphi(x,y,\theta)} \, a(x,y,\theta) \, u(x) \, dx \, d\theta$$

On a les résultats suivants :

- D'après le théorème 3.1, A est une application linéaire continue de $\mathcal{D}(X)$ dans $C^\infty(Y)$, et se prolonge de façon unique en une application linéaire continue de $\mathcal{D}^k(X)$ dans $C^j(Y)$, où j et k vérifient :

$$\left.\begin{array}{l} m - k\rho < -N - j \\ m - k(1-\delta) < -N - j \end{array}\right\} \quad (4.\alpha)$$

- D'après (ii), l'expression $\iint e^{i\varphi(x,y,\theta)} a(x,y,\theta)\, v(y)\, dy\, d\theta$ est défini pour $v \in \mathcal{D}(Y)$; elle est égale à ${}^tAv(x)$ d'après le théorème 3.3 ; on lui applique le théorème 3.1, et on en déduit que A se prolonge en une application linéaire continue de $\mathcal{E}'(X)$ dans $\mathcal{D}'(Y)$, et de $\mathcal{E}'^{j}(X)$ dans $\mathcal{D}'^{k}(Y)$, où j et k vérifient (4.α).

Soit R_φ l'ensemble ouvert de tous les $(x,y) \in X \times Y$, tels que l'application $\theta \to \varphi(x,y,\theta)$ n'admette pas de point critique non nul (son complémentaire C_φ est donc la projection sur $X \times Y$ de l'ensemble des $(x,y,\theta) \in X \times Y \times (\mathbb{R}^N - \{0\})$ avec $\varphi'_\theta(x,y,\theta) = 0$).

- Pour $(x,y) \in R_\varphi$, l'oscillateur intégral $\int e^{i\varphi(x,y,\theta)} a(x,y,\theta) d\theta$ existe ; par le théorème 3.1, c'est une fonction $C^\infty(X \times Y)$; par le théorème 3.3, elle est égale au noyau de A. Donc si $R_\varphi = X \times Y$, A est un opérateur à noyau C^∞, donc applique $\mathcal{E}'(X)$ dans $C^\infty(Y)$.

En particulier, si a s'annule dans un voisinage du demi-cône engendré par les $(x,y,\theta) \in X \times Y \times (\mathbb{R}^N - \{0\})$ avec $\varphi'_\theta(x,y,\theta) = 0$, il est clair que A est à noyau C^∞. Ceci est important : la plupart des calculs sur les opérateurs Fourier intégraux se développent "au voisinage des singularités" ; les opérateurs interviennenet donc modulo des opérateurs à noyau C^∞. C'est ainsi que Hörmander calcule sur des pseudo-différentiels dits "à support propre".

Support singulier d'un opérateur Fourier Intégrale :

Pour tout compact K de X, désignons par $C_\varphi[K]$ la projection sur Y de $C_\varphi \cap K \times Y$, i.e. $\{y \in Y \; ; \; \exists\, x \in K,\ (x,y) \in C_\varphi\}$. On a alors

Théorème 4.3 : Si $u \in \mathcal{E}'(X)$, alors

$$\text{supp.sing. } Au \subset C_\varphi\,[\text{supp.sing.}u].$$

Preuve : On montre d'abord à l'aide des résultats précédants que si $u \in \mathcal{E}'(X)$, supp.sing. $Au \subset C_\varphi$ [supp.u]. On remarque ensuite que si Ω est un voisinage quelconque de supp.sing.u, u peut s'écrire $u = v + w$ avec supp.$v \subset \Omega$

et $w \in \mathcal{D}(X)$ et qu'alors supp.sing. Au = supp.sing. Av $\subset C_\varphi$ [supp.v].

<u>Exemples d'"Opérateurs Fourier Intégraux"</u>

1) Les pseudo-différentiels correspondent à des fonctions de phase $\varphi(x,y,\theta) = \langle y - x, \theta \rangle$, $n_1 = n_2 = N$, $X = Y$. Ici C_φ est la diagonale de $X \times X$ et le théorème 4.3 s'écrit : supp.sing. Au $\subset$ supp.sing.u, ce qui exprime la "propriété pseudo-locale" des pseudo-différentiels.

2) L'étude du problème de Cauchy pour l'équation des ondes conduit à des opérateurs Fourier Intégraux définis par des fonctions de phase du type :

$$\varphi(x,t,y,\theta) = \langle x - y, \theta \rangle + t|\theta|$$

avec $n_1 - 1 = n_2 = N$, et où $(x,t) \in X$. Ici C_φ est l'ensemble des $((x,t),y)$ avec $|x - y|^2 = t^2$.