Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

P. Bolley
J. Camus

Une classification de problèmes elliptiques dégénérés à une ou plusieurs variables

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1970-1971), exp. nº 22, p. 1-16
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1970-1971____A22_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77
(633)

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 0 - 1 9 7 1

UNE CLASSIFICATION DE PROBLEMES ELLIPTIQUES DEGENERES A UNE OU PLUSIEURS VARIABLES

par MM. P. BOLLEY et J. CAMUS

Exposé N° 22

24 Mars 1971

§ 0. INTRODUCTION.

On se propose d'étudier des problèmes aux limites dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$, associés à des opérateurs elliptiques à l'intérieur, dégénérés au bord de cet ouvert, le bord étant caractéristique. On s'intéresse aux problèmes habituels : existence, régularité, recherche des conditions aux limites, problème d'indice.

Dans cette direction, certains résultats ont été obtenus en 1968 par MM. Baouendi. Goulaouic [1], pour l'opérateur

$$A = \sum_{\substack{|\alpha| \leq 1 \\ |\beta| \leq 1}} D^\alpha (a_{\alpha\beta}\, \varphi\, D^\beta)$$

dans un ouvert Ω régulier, où φ est une fonction de classe C^∞, équivalente à la distance au bord $\partial\Omega$ de Ω. Ils ont considéré cet opérateur d'un point de vue variationnel et ont établi que A est un isomorphisme de $W_1^{2+p}(\Omega) = \{u \in H^{p+1}(\Omega),\ \varphi u \in H^{p+2}(\Omega)\}$ sur $H^p(\Omega)$, pour tout entier $p \geq 0$.

A partir de ce résultat un problème se pose : que se passe-t-il si l'on perturbe l'opérateur A par un opérateur B d'ordre 1 ? La réponse à cette question ne résulte pas immédiatement du résultat précédent étant donné que ce nouvel opérateur $A+B$ n'est pas variationnel en général, et que d'autre part, B n'est pas compact de $W_1^{2+p}(\Omega)$ dans $H^p(\Omega)$.

En 1968-1969, N. Shimakura [6] a introduit une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés plus générale du type $L(x\ ;\ D_x)\, u\,(x) = \sum_{h=0}^{k} P^{m-h}(x\ ;\ D_x)\ \{\varphi(x)^{k-h}\ u(x)\}$, où k et m sont deux entiers tels que $1 \leq k \leq m$, $P^{m-h}(x\ ;\ D_x)$ est un opérateur différentiel d'ordre $\leq m-h$, $P^m(x\ ;\ D_x)$ étant un opérateur d'ordre m elliptique dans $\overline{\Omega}$. Ce sont des opérateurs d'ordre m, elliptiques à l'intérieur et dont la dégénéréscence au bord est d'ordre k. L'idée essentielle est d'obtenir des estimations a priori à partir de théorèmes d'isomorphisme à une variable. Il obtient ainsi certains résultats dans L^2 pour de tels opérateurs à coefficients constants dans un demi-espace et sous certaines conditions sur les opérateurs qui excluent en particulier les opérateurs du type A.

Notre étude consiste à faire une étude systématique de ces opérateurs à une variable sur la droite réelle $\mathbb{R}$ et sur la demi droite $\mathbb{R}_+$. On montre ensuite, comment on peut appliquer ces résultats aux problèmes aux limites sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$. Une partie des résultats a été annoncée dans [3],[4].

§ 1. ETUDE D'UNE CLASSE D'OPERATEURS DIFFERENTIELS ORDINAIRES, ELLIPTIQUES ET DEGENERES.

1°) Notations : on désigne par (x,t) le point générique de $\mathbb{R}^{n+1}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, n'étant un entier ≥ 0. Ω désignera soit l'espace $\mathbb{R}^{n+1}$, soit le demi espace $\mathbb{R}^{n+1}_+$, constitué des points (x,t) tel que $t > 0$.

Pour r entier ≥ 0, $H^r(\Omega)$ désigne l'espace de Sobolev usuel. Pour deux entiers k et m tels que $0 \leq k \leq m$ on définit l'espace de Sobolev avec poids

$$W_k^m(\Omega) = \{u \in H^{m-k}(\Omega),\ t^k u \in H^m(\Omega)\}$$

muni de la norme canonique. C'est un espace de Hilbert.

Si $1 \leq k \leq m$, on a les inclusions algébriques et topologiques : $W_k^m(\Omega) \subset W_{k-1}^{m-1}(\Omega)$. De plus, $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$ (resp. $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})$) est dense dans $W_k^m(\mathbb{R}^{n+1})$ (resp. $W_k^m(\mathbb{R}^{n+1}_+)$).

On désignera par $L = L(t\ ;\ D_t)$ l'opérateur différentiel ordinaire défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$L\, u(t) = L\,(t\ ;\ D_t)\ u\,(t) = \sum_{h=0}^{k} P^{m-h}(D_t)\{t^{k-h} u\,(t)\},$$

où $D_t = \frac{1}{i}\frac{d}{dt}$ et où :

(i) $P^{m-h}(D_t)$, $0 \leq h \leq k$, est un opérateur différentiel ordinaire d'ordre $\leq m-h$ à coefficients constants complexes :
$P^{m-h}(D_t) = \sum_{j=0}^{m-h} p_j^{m-h} D_t^j$, $p_j^{m-h} \in \mathbb{C}$, et où k et m sont deux entiers tels que : $1 \leq k \leq m$;

(ii) $P^m(\tau)$ est un polynôme de degré m avec $p_m^m = 1$ et ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$.

On utilisera la transformation de Fourier sur $\mathbb{R}$ suivante :

$$\hat{f}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{e}^{it\tau} f(t)\, dt.$$

Ainsi, l'opérateur $\hat{L} = \hat{L}(\tau ; D_\tau)$, transformé de Fourier de l'opérateur L s'écrit :

$$\hat{L}\,\hat{v}\,(\tau) = \hat{L}(\tau ; D_\tau)\,\hat{v}(\tau) = \sum_{h=0}^{k} P^{m-h}(\tau)\{(-D_\tau)^{k-h}\,\hat{v}(\tau)\},$$

où $D_\tau = \frac{1}{i}\frac{d}{d\tau}$.

$L^* = L^*(t ; D_t)$ désignera l'opérateur adjoint formel de l'opérateur L.

<u>2°) Etude des opérateurs L sur la droite réelle $\mathbb{R}$</u> : L'opérateur différentiel L induit, pour tout entier $p \geq 0$, une application linéaire continue de $W_k^{m+p}(\mathbb{R})$ dans $H^p(\mathbb{R})$. Par ailleurs, considéré comme opérateur différentiel, il admet pour points singuliers t=0 et t=∞. Par contre, l'opérateur $\hat{L}$ est un opérateur différentiel qui n'admet, sur $\mathbb{R}$, aucun point singulier sinon $\tau = \infty$. Et, en $\tau = \infty$, puisque $k \leq m$, cet opérateur est du type de Fuchs. Le comportement des solutions de $\hat{L}\,\hat{v}(\tau) = 0$ au voisinage de $\tau = \infty$ est fonction des racines ρ_j, j = 1,...,k, de l'équation déterminante suivante :

$$\phi(\rho) \equiv \sum_{h=0}^{k} p_{m-k+h}^{m-k+h}\; i^{h}\, \rho\,(\rho-1)\ldots(\rho-h+1) = 0$$

avec la convention $\rho(\rho-1)\ldots(\rho-h+1) = 1$ si $h = 0$. On obtient alors le résultat suivant :

Théorème 1.1 : Soit p un entier ≥ 0. On a :

(i) Si $\mathrm{Re}\,\rho_j < -m+k - \frac{1}{2} - p$ pour $1 \leq j \leq k$, l'opérateur $L(t\,;\,D_t)$ est linéaire continu de $W_k^{m+p}(\mathbb{R})$ sur $H^p(\mathbb{R})$ et le noyau de $L(t\,;\,D_t)$ dans $W_k^{m+p}(\mathbb{R})$ est de dimension k.

(ii) Si $\mathrm{Re}\,\rho_j > -m+k - \frac{1}{2} - p$ pour $1 \leq j \leq k$, l'opérateur $L(t\,;\,D_t)$ est un isomorphisme de $W_k^{m+p}(\mathbb{R})$ sur $K^p(\mathbb{R}) = \{f \in H^p(\mathbb{R}),\ < f.\overline{g} > = 0,\ g \in H^{-p}(\mathbb{R}),\ L^* g = 0\}$. La co-dimension de $K^p(\mathbb{R})$ dans $H^p(\mathbb{R})$ est égale à k.

Remarquons que, pour p assez grand, la condition (ii) est toujours réalisée.

3^o) Etude des opérateurs L sur la demi-droite $\mathbb{R}_+$: On obtient facilement du théorème 1.1 une caractérisation de l'image $L\, W_k^{m+p}(\mathbb{R}_+)$ dans $H^p(\mathbb{R}_+)$. Pour étudier le noyau de L dans $W_k^{m+p}(\mathbb{R}_+)$, désignons par $\mathrm{Ker}_+ L = \{T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+), L\,T = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)\}$ et par $\mathcal{S}'(\mathbb{R}_+)$, l'espace des distributions sur $\mathbb{R}_+$ qui sont restrictions d'éléments de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. ($\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ est l'espace des distributions tempérées sur $\mathbb{R}$). On a alors :

Lemme fondamental : La dimension de $\mathrm{Ker}_+ L \cap \mathcal{S}'(\mathbb{R}_+)$ est égale à m_+ où m_+ est le nombre de racines à partie imaginaire positive de l'équation $P^m(\tau) = 0$.

De plus, si $\mathrm{Re}\,\rho_j < -\frac{1}{2} + p$, $1 \leq j \leq k$, alors $\mathrm{Ker}_+ L \cap \mathcal{S}'(\mathbb{R}_+) = \mathrm{Ker}_+ L \cap H^{-p}(\mathbb{R}_+)$.

La démonstration de ce lemme se fait en plusieurs étapes.

<u>$1^{\text{ière}}$ étape</u> : Formule de représentation pour les éléments de $\mathrm{Ker}_+ L \cap \mathcal{S}'(\mathbb{R}_+)$.

L'opérateur $L(t\,;\,D_t)$ est, puisque $k \leq m$, du type de Fuchs en $t = 0$. L'équation déterminante en ce point est :

$$\begin{cases} F_{(r)} \equiv r(r-1)\dots(r-m+k+1)\ \psi\ (r) = 0 & \text{si } k < m, \\ F_{(r)} \equiv \psi\ (r) = 0 & \text{si } k = m, \end{cases}$$

où $\psi\ (r)$ est un polynôme de degré k, lié au polynôme $\Phi(\rho)$ par la formule $(-i)^k \psi(-1-\rho) \equiv \Phi(\rho)$. Par suite, les racines de l'équation déterminante sont :

$$\begin{cases} r = 0, 1, \dots, m-k-1 & \text{si } k < m \\ r = -1-\rho_j & 1 \leq j \leq k. \end{cases}$$

On fait d'abord une hypothèse sur les racines ρ_j de $\Phi(\rho) = 0$:

$$\begin{cases} 1 - & \rho_j \text{ n'est pas un entier de } \mathbb{Z},\ j = 1, \dots, k. \\ 2 - & \rho_i - \rho_j, \text{ pour } i \neq j, \text{ n'est pas un entier de } \mathbb{Z},\ 1 \leq i, j \leq k. \end{cases}$$

Sous cette hypothèse et puisque $t = 0$ est l'unique point singulier à distance finie pour l'opérateur $L(t\,;\,D_t)$, l'équation $L(t;D_t)u(t)=0$ admet un système fondamental de solutions de la forme :

$$\Phi_r(t) = t^r \varphi_r(t),\ 0 \leq r \leq m-k-1 \text{ si } k < m,$$

$$\Phi_{m-k-1+j}(t) = t^{-1-\rho_j}\, \varphi_{m-k-1+j}(t)\ ,\ 1 \leq j \leq k,$$

où les $\varphi_l(t)$ sont des fonctions entières telles que $\varphi_l(0) = 1$. Ainsi, à tout élément u de $\mathrm{Ker}_+ L \cap \mathcal{S}'(\mathbb{R}_+)$ on peut lui associer, de façon canonique, un prolongement T_u, appartenant à $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ défini par : T_u = partie finie de u.

Ensuite, on établit une "formule de Green". Plus précisément, il existe une application linéaire $\alpha : u \longrightarrow \alpha(u) = (\alpha_{-k}(u), \ldots; \alpha_{m-k-1}(u))$: $Ker_+ L \cap \mathcal{S}'(\mathbb{R}_+) \longrightarrow \mathbb{C}^m$ de sorte que, pour tout u appartenant à $Ker_+ L \cap \mathcal{S}'(\mathbb{R}_+)$, on ait la formule de représentation :

$$\widehat{T u}(\tau) = \sum_{q=-k}^{m-k-1} \alpha_q(u)\, \hat{U}_q(\tau)$$

où $\hat{U}_q(\tau)$ est la solution de :

$$\begin{cases} \hat{L}(\tau ; D_\tau)\, \hat{U}_q(\tau) = 0 \\ D_\tau^{l-1} \hat{U}_q \big|_{\tau=0} = \delta_{-q,l} \quad l=1,\ldots,k,\ q=-k,\ldots,-1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{L}(\tau ; D_\tau)\, \hat{U}_q(\tau) = Q_q(\tau) \\ D_\tau^{l-1} \hat{U}_q \big|_{\tau=0} = 0 \qquad l=1,\ldots,k,\ q=o,\ldots,m-k-1, \end{cases}$$

où $Q_q(\tau)$ est un polynôme de degré m-k-1-q, $0 \le q \le m-k-1$.

Ainsi, l'espace $Ker_+ L \cap \mathcal{S}'(\mathbb{R}_+)$ est isomorphe au sous-espace $\alpha\,(Ker_+\, L \cap \mathcal{S}'(\mathbb{R}_+))$ de $\mathbb{C}^m$.

<u>2ième étape</u> : Construction d'un projecteur R de $\mathbb{C}^m$ tel que : $R\,\mathbb{C}^m = \alpha(Ker_+ L \cap \mathcal{S}'(\mathbb{R}_+))$.

Pour cela, à tout vecteur $\vec{F}$ de $\mathbb{C}^m$, on associe la fonction : $\hat{v}(\tau ; \vec{F}) = \sum_{q=-k}^{m-k-1} F_q\, \hat{U}_q(\tau)$, et on pose :

$v(t ; \vec{F}) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{v}(\tau, \vec{F})]$ et $v_+(t ; \vec{F}) = v(t ; \vec{F})\, 1_{\mathbb{R}_+}$.

L'application : $\vec{F} \longrightarrow v_+(t ; \vec{F})$ est linéaire de $\mathbb{C}^m$ dans $Ker_+ L \cap \mathcal{S}'(\mathbb{R}_+)$. De plus, si $Re\ \rho_j < -\frac{1}{2} + p$, $1 \le j \le k$, alors $v_+(t ; \vec{F})$ appartient à $H^{-p}(\mathbb{R}_+)$.

Le projecteur R est alors défini par : $R\vec{F} = \alpha(v_+(t ; \vec{F}))$.

On remarque ensuite que si $\vec{F} \in R\,\mathbb{C}^m$ (resp. $(I-R)\,\mathbb{C}^m$) $v\,(t;\vec{F})$

est à support dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ (resp. $\overline{\mathbb{R}}_-$). De sorte que si $\vec{F} \in R\ \mathbb{C}^m$ (resp. $(I-R)\mathbb{C}^m$) $\hat{v}(\tau ; \vec{F})$ se prolonge en une fonction holomorphe dans $I_m \tau \leq 0$ (resp. $\operatorname{Im} \tau \geq 0$). Ceci nous amène à considérer : $E_+ = \{\vec{F} \in \mathbb{C}^m,\ \hat{v}(\tau ; \vec{F})$ est holomorphe dans $I_m \tau \leq 0\}$,

$E_- = \{\vec{F} \in \mathbb{C}^m,\ \hat{v}(\tau ; \vec{F})$ est holomorphe dans $I_m \tau \geq 0\}$.

3$^{\text{ième}}$ étape : Holomorphie de la fonction $\hat{v}(\tau ; \vec{F})$. De la condition (I), on déduit que $E_+ \cap E_- = \{0\}$. Il en résulte que $E_+ = R\ \mathbb{C}^m$ et $E_- = (I-R)\ \mathbb{C}^m$.

4$^{\text{ième}}$ étape : On calcule la dimension de E_+ (et de E_-). A cet effet, on étudie l'holomorphie de $\hat{v}(\tau ; \vec{F})$ au voisinage des points singuliers de l'opérateur $\hat{L}(\tau ; D_\tau)$ (les points singuliers de $\hat{L}$ sont exactement les zéros du polynôme $P^m(\tau)$). Le théorème de Perron [6] permet de conclure. On en déduit que la dimension de E_+, donc aussi la dimension de $\operatorname{Ker}_+ L \cap \mathcal{S}'(\mathbb{R}_+)$, est égale à m_+.

5$^{\text{ième}}$ étape : On s'affranchit de la condition (I) en adaptant la démonstration précédente.

On peut maintenant énoncer le résultat final :

Théorème 1.2 : Soit p un entier ≥ 0. On a :

(i) Si $\operatorname{Re} \rho_j < -m+k-\frac{1}{2}-p$, $1 \leq j \leq k$, l'opérateur $L(t ; D_t)$ est linéaire continu de $W_k^{m+p}(\mathbb{R}_+)$ sur $H^p(\mathbb{R}_+)$ et le noyau de $L(t ; D_t)$ dans $W_k^{m+p}(\mathbb{R}_+)$ est de dimension m_+, où m_+ désigne le nombre de racines de $P^m(\tau) = 0$ à partie imaginaire positive.

(ii) Si $\operatorname{Re} \rho_j > -m+k-\frac{1}{2}-p$, $1 \leq j \leq k$. Soit l la dimension de l'espace $N = \{g \in H_o^{-p}(\mathbb{R}_+),\ L^* g = 0\}$. L'opérateur $L(t ; D_t)$ est linéaire continu de $W_k^{m+p}(\mathbb{R}_+)$ sur $K^p(\mathbb{R}_+) = \{f \in H^p(\mathbb{R}_+),\ < f, \bar{g} > = 0,\ g \in N\}$ et la dimension du noyau de $L(t ; D_t)$ dans $W_k^{m+p}(\mathbb{R}_+)$ est égale à $m_+ - k + l$.

Démonstration : Dans le cas (i), on établit directement que $\mathrm{Ker}_+ L \cap W_k^{m+p}(\mathbb{R}_+) = \mathrm{Ker}_+ L \cap \mathcal{S}'(\mathbb{R}_+)$. Par contre, dans le cas (ii), on utilise la méthode de transposition.

Remarque 1.1 : Soit q un entier ≥ 0. Du théorème 1.1 (ii) résulte que le noyau de l'opérateur L^* dans $H^{-(p+q)}(\mathbb{R})$ coïncide avec le noyau de L^* dans $H^{-p}(\mathbb{R})$. Par suite, la dimension l de N est encore égale à la dimension de l'espace $\{g \in H_o^{-(p+q)}(\mathbb{R}_+),\ L^* g = 0\}$.

Remarque 1.2 : On peut atteindre le nombre l à l'aide de la propriété suivante :

Soit u appartenant à $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ tel que $L\,u = 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$; Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathrm{Supp}\ u \subset \overline{\mathbb{R}}_+$.

(ii) $\hat{U}$ se prolonge en une fonction holomorphe dans un voisinage de $I_m \tau \leq 0$.

4°) Etude d'un exemple : On va traiter un exemple avec $m = 2$ et $k = 1$.

L'opérateur $L(t\ ;\ D_t)$ s'écrit : $L(t\ ;\ D_t)u(t) = P^2(D_t)\{t\ u\ (t)\} + P^1(D_t)\{u(t)\}$. On fera l'hypothèse suivante qui sera utile pour la suite :

(H) L'équation $P^2(\tau) = 0$ admet deux racines τ_+ et τ_- telles que $I_m \tau_+ > 0$ et $I_m \tau_- < 0$.

Dans ce cas, l'équation déterminante $\phi(\rho) = 0$ s'écrit : $p_1^1 + i\rho = 0$. Elle admet pour racine $\rho = i\ p_1^1$.

Par ailleurs, utilisant la remarque 1.2, on obtient que la dimension l de N est égale à 1 ou 0 selon que la condition suivante :

(C) Il existe un entier $n \geq 1$ tel que $P^1(\tau_+) = in(\tau_+ - \tau_-)$, est satisfaite ou non. Le théorème 1.2, dans ce cas particulier, devient :

<u>Théorème 1.3</u> : Soit p un entier ≥ 0. Sous l'hypothèse (H), on a :

(i) Si Re $\rho < -\frac{3}{2} - p$: L'opérateur $L(t\ ;\ D_t)$ est linéaire continu de $W^{2+p}_{1(\mathbb{R}_+)}$ sur $H^p(\mathbb{R}_+)$ et son noyau est de dimension 1.

(ii) Si Re $\rho > -\frac{3}{2} - p$: alors on a :

1- Si (C) n'est pas vérifiée : $L(t\ ;\ D_t)$ est un isomorphisme de $W^{2+p}_{1(\mathbb{R}_+)}$ sur $H^p(\mathbb{R}_+)$.

2- Si (C) est vérifiée : $L(t\ ;\ D_t)$ est linéaire continu de $W^{2+p}_{1(\mathbb{R}_+)}$ sur un sous espace fermé de co-dimension 1 dans $H^p(\mathbb{R}_+)$ et son noyau est de dimension 1.

<u>Remarque 1.3</u> : En ce qui concerne les problèmes aux limites associés à l'opérateur $L(t\ ;\ D_t)$ remarquons que dans le cas (ii) 2- de ce théorème 1.3 et pour $p = 0$, l'application $\gamma_0 : u \longrightarrow u(o)$: $\mathrm{Ker}_+ L \cap W_1^{2+p}(\mathbb{R}_+) \longrightarrow \mathbb{C}$ est injective, tandis que pour $p \geq 1$, pour que cette application soit injective, il faut et il suffit que l'opérateur $L(t\ ;\ D_t)$ ne vérifie pas la condition suivante :

(K) Il existe un entier $n \geq 0$ tel que $P^1(\tau_-) = in(\tau_+ - \tau_-)$.

La même propriété est valable dans le cas (i) de ce théorème 1.3.

<u>§ 2. ETUDE D'UNE CLASSE D'OPERATEURS ELLIPTIQUES ET DEGENERES SUR UN OUVERT Ω DE $\mathbb{R}^n$.</u>

Auparavant, appliquons les résultats du II à un exemple dans le demi espace $\mathbb{R}_+^{n+1}$

1°) Etude d'un exemple dans $\mathbb{R}^{n+1}_+$: Considérons l'opérateur

$$L(t : D_x, D_t)\, u\,(x,t) = (1+\sum_{i=1}^{n} D^2_{x_i} + D^2_t)\{t\, u\,(x,t)\} + \lambda\, D_t u(x,t),\ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Par transformation de Fourier en les variables tangentielles, on se ramène à un opérateur du type II. 4°) pour lequel $\rho = i\lambda$. Tenant compte de la remarque 1.3 et du théorème 1.3 il vient :

Théorème 2.1 : Soit p un entier ≥ 0. On a :

(i) Si $Re(i\lambda) < -\frac{3}{2} - p$: L'opérateur $\{L, \gamma_0\}$ est un isomorphisme de $W^{2+p}_1(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ sur $H^p(\mathbb{R}^{n+1}_+) \times H^{p+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$.

(ii) Si $Re(i\lambda) > -\frac{3}{2} - p$; alors on a :

1- Si $(i\lambda) \neq -2m$, m entier ≥ 1 : L'opérateur L est un isomorphisme de $W^{2+p}_1(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ sur $H^p(\mathbb{R}^{n+1}_+)$.

2- Si $(i\lambda) = -2m$, m entier ≥ 1 : L'opérateur $\{L, \gamma_0\}$ est un isomorphisme de $W^{2+p}_1(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ sur $K^p(\mathbb{R}^{n+1}_+) \times H^{p+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$ où $K^p(\mathbb{R}^{n+1}_+) = \{f \in H^p(\mathbb{R}^{n+1}_+),$

$$\gamma_0[(1+\sum_{i=1}^{n} D^2_{x_i} + D^2_t)^{m-1} f] = 0 \text{ dans } H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)\}.$$

2°) Opérateurs elliptiques dans Ω, dégénérant au bord dans toutes les directions :

Soient φ une fonction réelle de classe $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n, \varphi(x) > 0\}$, $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n,\ \varphi(x) = 0\}$. On suppose que grag $\varphi(x) \neq 0$ pour tout x de Γ. On suppose aussi que Ω est borné.

Soit l'opérateur $L(x : D_x)$ défini sur Ω par :

$$L(x : D_x)\, u\,(x) = P^2(x : D_x)\{\varphi(x)\, u\,(x)\} + P^1(x : D_x)\{u(x)\} + a(x)\, u\,(x),$$

où (i) $P^2(x\ ;\ D_x) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a^{ij}(x)\ D_{ij}$ est un opérateur différentiel d'ordre 2 homogène à coefficients de classe $C^\infty(\overline{\Omega})$ et proprement elliptique dans $\overline{\Omega}$.

(ii) $P^1(x\ ;\ D_x) = \sum_{i=1}^{n} a^i(x)\ D_i$ est un opérateur différentiel d'ordre 1 au plus et homogène et à coefficients de classe $C^\infty(\overline{\Omega})$.

(iii) a est une fonction de classe $C^\infty(\overline{\Omega})$.

Par analogie avec le I 4^o) on pose :

$\rho(x) = iP^1(x\ ;\ \text{grad}\ \varphi(x))\ /\ P^2(x\ ;\ \text{grad}\ \varphi(x))$ pour x appartenant à Γ. On définit aussi, pour $x \in \Gamma$, et ξ vecteur tangent non nul en x à Γ la condition $C(x\ ;\ \xi)$ suivante :

$C(x\ ;\ \xi)$: il existe un entier $n = n\ (x,\xi) \geq 1$ tel que

$$P^1(x\ ;\ \xi + \tau_+(x,\xi)\text{grad}\ \varphi(x)) = in\ (\tau_+(x,\xi)-\tau_-(x,\xi))P^2(x\ ;\ \text{grad}\ \varphi(x))$$

où $\tau_+(x,\xi)$ et $\tau_-(x,\xi)$ sont les racines à partie imaginaire positive et négative de l'équation $P^2(x\ ;\ \xi+\tau\ \text{grad}\ \varphi(x)) = 0$.

De même, pour $x \in \Gamma$ et ξ vecteur tangent non nul en x à Γ, on définit la condition $K(x\ ;\ \xi)$ suivante :

$K(x\ ;\ \xi)$: il existe un entier $n = n(x,\xi) \geq 0$ tel que :

$$P^1(x\ ;\ \xi+\tau_-(x,\xi)\ \text{grad}\ \varphi(x)) = in\ (\tau_+(x,\xi)-\tau_-(x,\xi))P^2(x\ ;\ \text{grad}\ \varphi(x)).$$

<u>Remarque 2.1</u> : 1- $\rho(x)$ est une fonction invariante par difféomorphisme.

2- Les conditions suivantes : pour tout ξ tangent non nul en x à Γ, $C(x\ ;\ \xi)$ est vraie (resp. non vraie) sont invariantes par difféomorphisme.

La même propriété est valable pour la condition $K(x ; \xi)$.

Remarque 2.2 : 1- Soit x appartenant à Γ. Si, pour tout vecteur tangent $\xi \neq 0$ en x à Γ, $C(x ; \xi)$ est vraie, cela implique, en dimension $n \geq 2$, qu'il existe un entier $m = m(x) \geq 1$ tel que :

$$\rho(x) = -2m \text{ et } a^{i}(x) = im \sum_{j=1}^{n} (a^{ij}(x) + a^{ji}(x)) \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(x).$$

Par exemple, l'opérateur :

$L(x ; D_x)\, u\,(x) = \varphi_{(x)}(a^{ij}(x)\, D_{ij} + a^{i}(x)\, D_i + a(x))\{u(x)\}$ vérifie pour tout x appartenant à Γ et pour tout vecteur tangent $\xi \neq 0$ en x à Γ la condition $C(x ; \xi)$.

Dans cette hypothèse, la condition $K(x ; \xi)$ n'est jamais satisfaite pour tout ξ vecteur tangent non nul en x à Γ.

2- Soit x appartenant à Γ. Si $a^{ij}(x) = \overline{a^{ji}(x)}$ et si $i\, a^{j}(x)$ appartient à $\mathbb{R}$, et si $\rho(x)$ n'est pas un entier de la forme $-2m$ (resp. $2(m-1)$) avec un entier ≥ 1, alors $C(x ; \xi)$ (resp. $K(x ; \xi)$) est non vraie pour tout ξ vecteur tangent non nul en x à Γ.

Soit maintenant p un entier positif ou nul. Soit $\mathcal{P}$ l'opérateur défini par : $u \longrightarrow \mathcal{P}u = \{Lu, \gamma_0 u\}$, où $\gamma_0 u$ désigne la trace de u sur Γ. Soit l'espace $W_1^{2+p}(\Omega) = \{u \in H^{p+1}(\Omega),\ \varphi\, u \in H^{p+2}(\Omega)\}$. Ainsi, l'opérateur est linéaire continu de $W_1^{2+p}(\Omega)$ dans $H^{p}(\Omega) \times H^{p+\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Désignons par $\mathcal{P}^*$ l'opérateur adjoint de $\mathcal{P}$: c'est un opérateur linéaire continu de $[H^{p}(\Omega)]' \times H^{-p-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ dans $[W_1^{2+p}(\Omega)]'$. On a alors :

Théorème 2.2 : Soit $L(x ; D_x)$ un opérateur tel que $Re\rho(x) < -\frac{3}{2}-p$ pour tout x appartenant à Γ et tel que pour tout x appartenant à Γ et tout ξ, vecteur tangent non nul, en x à Γ, la condition $K(x ; \xi)$ ne soit pas vérifiée. Alors :

(i) Pour tout entier $k \geq 0$ tel que $\operatorname{Re} \rho(x) < -\frac{3}{2} - (p+k)$ pour tout x appartenant à Γ, on a :

Si $u \in W_1^{2+p}(\Omega)$ et $\mathcal{P} u \in H^{p+k}(\Omega) \times H^{p+k+\frac{1}{2}}(\Gamma)$, alors $u \in W_1^{2+p+k}(\Omega)$, et il existe une constante C_k telle que :

$$\|u\|_{W_1^{2+p+k}(\Omega)} \leq C_k \left(\|\mathcal{P} u\|_{H^{p+k}(\Omega) \times H^{p+k+\frac{1}{2}}(\Gamma)} + \|u\|_{W_1^{p+k+1}(\Omega)} \right).$$

(C_k étant indépendante de u).

(ii) Pour tout f appartenant à $[H^p(\Omega)]'$ et g appartenant à $H^{-p-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ on a :

$$\|(f,g)\|_{[H^p(\Omega)]' \times H^{-p-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq C \left(\|\mathcal{P}^*(f,g)\|_{[W_1^{2+p}(\Omega)]'} + \|f\|_{[H^{p+1}(\Omega)]'} + \|g\|_{H^{-p-\frac{3}{2}}(\Gamma)} \right).$$

(C étant une constante indépendante de (f,g)).

<u>Démonstration</u> : Par cartes locales, on se ramène au demi-espace $\mathbb{R}_+^{n+1}$ et dans $\mathbb{R}_+^{n+1}$, on applique la méthode utilisée pour l'exemple cité précédemment.

Désignons par j l'isomorphisme canonique $j : [H^p(\Omega)]' \longrightarrow H_0^{-p}(\Omega)$, $H_0^{-p}(\Omega)$ étant l'espace des distributions de $H^{-p}(\mathbb{R}^n)$ à support dans $\bar{\Omega}$. Utilisant le même principe de démonstration que pour le théorème précédent, on obtient les résultats suivants :

<u>Théorème 2.3</u> : Soit $L(x\,;D_x)$ un opérateur tel que $\operatorname{Re} \rho(x) > -\frac{3}{2} - p$ pour tout x appartenant à Γ, et tel que pour tout ξ, vecteur tangent non nul, en x à Γ, la condition $C(x\,;\xi)$ soit non vraie. Alors :

(i) Pour tout entier $k \geq 0$ on a :

Si $u \in W_1^{2+p}(\Omega)$ et $L\,u \in H^{p+k}(\Omega)$, alors $u \in W_1^{2+p+k}(\Omega)$, et il existe une constante C_k telle que :

$$\|u\|_{W_1^{2+p+k}(\Omega)} \le C_k(\|Lu\|_{H^{p+k}(\Omega)} + \|u\|_{W_1^{1+p+k}(\Omega)}).$$

(C_k étant indépendante de u).

(ii) Pour tout f appartenant à $[H^p(\Omega)]'$ on a :

$$\|f\|_{[H^p(\Omega)]'} \le C\ (\|L^*(jf)\|_{[W_1^{2+p}(\mathbb{R}^n)]'} + \|f\|_{[H^{p+1}(\Omega)]'}).$$

(C étant une constante indépendante de f).

<u>Théorème 2.4</u> : Soit $L(x\ ;\ D_x)$ un opérateur tel que $\mathrm{Re}\ \alpha(x) > -\frac{3}{2} - p$ pour tout x appartenant à Γ, et tel que pour tout ξ, vecteur tangent non nul en x à Γ, la condition $C(x\ ;\ \xi)$ soit vraie. Alors : Pour tout entier $k \ge 0$ on a :

Si $u \in W_1^{2+p}(\Omega)$ et $\mathcal{P} u \in H^{p+k}(\Omega) \times H^{p+k+\frac{1}{2}}(\Gamma)$, alors $u \in W_1^{2+p+k}(\Omega)$ et il existe une constante C_k telle que :

$$\|u\|_{W_1^{2+p+k}(\Omega)} \le C_k\ (\|\mathcal{P} u\|_{H^{p+k}(\Omega)\ \times\ H^{p+k+\frac{1}{2}}(\Gamma)} + \|u\|_{W_1^{1+p+k}(\Omega)}).$$

(C_k étant indépendante de u).

Des théorèmes 2.2 et 2.3 on déduit facilement le

<u>Corollaire</u> :

(i) Si $L(x\ ;\ D_x)$ vérifie les hypothèses du théorème 2.2, l'opérateur $\mathcal{P}$, opérant de $W_1^{2+p}(\Omega)$ dans $H^p(\Omega) \times H^{p+\frac{1}{2}}(\Gamma)$ est un opérateur à indice.

(ii) Si $L(x\ ;\ D_x)$ vérifie les hypothèses du théorème 2.3, l'opérateur L opérant de $W_1^{2+p}(\Omega)$ dans $H^p(\Omega)$ est un opérateur à indice. De plus, le noyau N de L dans $W_1^{2+p}(\Omega)$ est égal à l'espace $N = \{u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}),\ Lu = o\}$.

3°) Remarques sur les résultats de Köhn-Nirenberg [5] :

Les opérateurs $L(x\ ;\ D_x)$ avec $a^{i\gamma}$, ia^{γ} et a fonctions réelles appartiennent à la classe des opérateurs étudiés dans [5]. Selon Fichera, la frontière Γ de Ω est partagée en trois parties qui, dans notre cas, s'expriment par les conditions suivantes :

$\Sigma_3 = \emptyset$ (ensemble des points de Γ non caractéristiques pour L)

$\Sigma_2 = \{x \in \Gamma,\ \rho(x) < -1\}$

$\Sigma_1 = \{x \in \Gamma,\ \rho(x) \geq -1\}$

Dans [5], Köhn et Nirenberg obtiennent essentiellement, moyennant une condition supplémentaire sur l'opérateur en tout point de Σ_2, un théorème d'existence pour l'équation $L(x\ ;\ D_x)u = f$: étant donné f dans un espace de Sobolev $H^N(\Omega)$ (avec $N > 1$), il existe une solution u de $L(x\ ;\ D_x)\ u = f$, nulle sur Σ_2 et qui appartient à un certain espace de Sobolev sur Ω. Cette situation rentre dans le cadre des théorèmes 2.2 et 2.3 qui fournissent par ailleurs un résultat de régularité pour une telle solution.

Il ressort de nos résultats que, pour les opérateurs $L(x\ ;\ D_x)$ considérés, il serait plus correct de considérer : $\Sigma_2 = \{x \in \Gamma, \rho(x) < -\frac{3}{2}\}$ et $\Sigma_1 = \Gamma - \Sigma_2$, et de poser sur Σ_2 des conditions aux limites en accord avec les théorèmes 2.2 et 2.4. En particulier, pour qu'il y ait régularité (d'ordre quelconque) de la solution, il ne faut pas imposer de conditions aux limites sur Σ_2.

Remarque 2.3 : Par des méthodes analogues, on obtient des résultats pour des opérateurs elliptiques dans Ω, dégénérant au bord dans la direction normale ou, dans la direction normale et dans certaines directions tangentielles [4].

En particulier on obtient les résultats de régularité utilisés par MM. Baouendi. Goulaouic [2] pour l'opérateur :

$$\sum_{\substack{|\alpha|\leq 1\\|\beta|\leq 1}} D^{\alpha}(a_{\alpha\beta}\,\varphi D^{\beta}) \qquad + \qquad \sum_{1\leq k;\,j\leq n} \Lambda_{kj}^{*}\,\Lambda_{kj}$$

où

$$\Lambda_{kj} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\,\frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\,\frac{\partial}{\partial x_k}\,, \quad \Lambda \leq k, j \leq n.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] M.S. Baouendi ; C. Goulaouic : Régularité et théorie spectrale pour une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés ; Arch. Rat. Méc. Anal. 34 n°5 (1969) p. 361-379.

[2] M.S. Baouendi ; C. Goulaouic - Régularité analytique et itérés d'opérateurs elliptiques dégénérés ; Applications. (à paraître au journal of functional analysis)

[3] P. Bolley : J. Camus - Sur une certaine classe d'opérateurs différentiels ordinaires, elliptiques et dégénérés. C.R. acad. Sc. t. 271 p. 593-595 (Septembre 1970).

[4] P. Bolley ; J. Camus —Sur certains problèmes aux limites, elliptiques et dégénérés - C.R. acad. Sc. t. 271 p. 980-983 (Novembre 1970).

[5] J.Kőhn : L. Nirenberg : Degenerate elliptic-parabolic equations of second order C.P.A.M. 1967.

[6] N.Shimakura. Sur une certaine classe d'opérateurs différentiels ordinaires, elliptiques et dégénérés. Proc. Japan Acad, 44 (1968) p. 944-948.

-=-=-=-=-=-=-