H. Hogbe-Nlend

Ultra-nucléarité et bornologie à décroissance très rapide

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1970-1971), exp. n° 21, p. 1-18

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1970-1971____A21_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77

(633)

SEMINAIRE GOULAOUIC-SCHWARTZ 1970-1971

ULTRA-NUCLEARITE ET BORNOLOGIE A DECROISSANCE TRES RAPIDE

par H. HOGBE-NLEND

Exposé N°21

17 Mars 1971

§ 0. INTRODUCTION.

Il est bien connu que le point de départ ou le théorème fondamental de la théorie des espaces nucléaires est le "théorème des noyaux" de L. Schwartz. Sous sa forme générale établie par A. Grothendieck, ce théorème dit : Soient E et F deux espaces localement convexes séparés (elcs) dont l'un au moins est nucléaire. Toute forme linéaire continue sur $E \hat{\otimes}_{\pi} F$ provient d'un élément de $E'_A \hat{\otimes} F'_B$ où A (resp. B) est une partie équicontinue de E' (resp. F'). Ceci équivaut à dire que toute forme bilinéaire continue sur E × F est de la forme

$$B = \sum_n \lambda_n x'_n \otimes y'_n$$

où $(\lambda_n) \in l^1$, (x'_n) (resp. (y'_n)) suite équicontinue dans E'(resp. F'). A. Grothendieck([3], chap ; II ; page 75) et L. Schwartz ([8], exposé 19, page 3) ont remarqué qu'on peut, dans certaines circonstances, améliorer la représentation ci-dessus de la forme bilinéaire B en prenant la suite (λ_n) à décroissance rapide. On dira alors que la forme bilinéaire B est un ultra-noyau. Le présent travail a eu pour motivation la recherche d'une caractérisation complète des espaces nucléaires E pour lesquels toute forme bilinéaire continue sur E × F, F espace localement convexe séparé arbitraire, est un ultra-noyau. Ces espaces que nous appelons espaces ultra-nuléaires s'avèrent être équivalents aux "espaces hypernucléaires" de C. Bessaga et A. Pelczynski [1], aux "espaces s-nucléaires" de A. Martineau [5] ; aux "espaces fortement nucléaires" de B.S. Brudovskii [2] et Köthe (cf. [7]).

Dans une première partie nous introduisons ces espaces d'une manière naturelle à partir de la notion fondamentale de bornologie co-ultra-nucléaire ; nous en donnons diverses caractérisations au moyen d'opérateurs ultra-nucléaires et donnons une première forme du "théorème des ultra-noyaux".

Dans une seconde partie on donne des propriétés fondamentales des espaces ultra-nucléaires notamment certaines propriétés de permanence (ultra-nucléarité d'espaces d'opérateurs) ; caractérisation intrinsèque du dual fort d'un espace de Fréchet ultra-nucléaire (caractérisation de "type Dieudonné") ; caractérisation des topologies ultra-nucléaires compatibles avec une dualité en terme de suite à décroissance rapide ; réciproque du théorème des ultra-noyaux ; caractérisation simple de l'ultra-nucléarité en terme de dimension diamétrale et d'entropie... et on termine par de nombreux exemples concrets.

Nous supposerons connues les notions élémentaires de Bornologie (voir Appendice : quelques rappels de Bornologie). Nos conventions et terminologie usuelles sont celles de Bourbaki ; on note l'espace vectoriel des suites scalaires à décroissance rapide. A priori tous les espaces localement convexes considérés sont sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et sont supposés séparés.

§ 1. BORNOLOGIE A DECROISSANCE RAPIDE. ESPACES ULTRA-NUCLEAIRES.

Soit E un espace vectoriel bornologique (evb) séparé. Une suite (x_n) de E est dite à décroissance rapide dans E si pour tout entier $k \geq o$, la suite $(n^k x_n)$ est bornée dans E. Elle est dite à décroissance très rapide, s'il existe un borné équilibré B tel que pour tout entier $k \geq o$, la suite $(n^k x_n)$ soit absorbée par B. Ceci signifie, si la bornologie de E est convexe que la suite (x_n) est à décroissance rapide dans un E_B. Si E est un ebc complet et (x_n) une suite Mackey-convergente de E, on appelle enveloppe complétante de la suite (x_n), l'ensemble des sommes dans un E_B des séries $\sum_{n=o}^{\infty} \lambda_n x_n$ où $(\lambda_n) \in l^1$, $\sum_{n=o}^{\infty} |\lambda_n| \leq 1$. Cet ensemble est indépendant du borné B. Les enveloppes complétantes des suites à décroissance rapide (resp. très rapide) engendrent une bornologie convexe sur E appelée la bornologie à décroissance rapide (resp. très rapide) ou (s)-bornologie de E [resp. (s_o)-

bornologie de E] . On note (E,s) [resp. (E,s_0)] l'espace vectoriel E muni de sa (s)-bornologie [resp. (s_0)-bornologie]. Une partie de E est dite à décroissance rapide (resp. très rapide) si elle est bornée dans (E,s) [resp. (E,s_0)]

Définition 1.1 : Soit E un ebc complet. On dit que E est un espace co-ultra-nucléaire (*) ou que sa bornologie B est co-ultra-nucléaire si l'identité $(E,B) \to (E,s_0)$ est bornée, autrement dit si tout borné de E est à décroissance très rapide.

On dit qu'un espace localement convexe séparé F est un espace ultra-nucléaire ou que sa topologie est ultra-nucléaire si la bornologie équicontinue de son dual F' est co-ultra-nucléaire. L'espace F est co-ultra-nucléaire si F muni de sa bornologie canonique d'evt est un ebc co-ultra-nucléaire.

La définition (1.1) fait intervenir les opérateurs $u : G \to H$ entre deux espaces de Banach appliquant la boule unité de G sur une partie à décroissance rapide de H. Un tel opérateur est dit un opérateur ultra-nucléaire.

La proposition (1.1) ci-dessous montre que ces opérateurs sont équivalents aux opérateurs de Fredholm d'ordre zéro de Grothendieck [3] et aux opérateurs de type (s) de A. Pietsch. [6].

---

* Cette terminologie est différente de celle utilisée dans ([4][b]).

<u>Proposition 1.1</u> : <u>Soient E et F deux espaces de Banach</u> ; $T : E \to F$ <u>linéaire</u>. <u>Les assertions suivantes sont équivalentes</u> :

(i) <u>T applique la boule unité de E sur une partie à décroissance rapide de F</u> ;

(ii) <u>Il existe une suite</u> (x'_n) <u>de E', une suite</u> (y_n) <u>de F telles que</u>

$$T = \sum_{n=o}^{\infty} x'_n \otimes y_n$$

<u>la suite</u> $\|x'_n\| \; \|y_n\|$ <u>étant à décroissance rapide</u> ;

(iii) <u>Il existe trois suites</u> $(\lambda_n) \in s$, $\lambda_n \geq o$, (a'_n) <u>de E' et</u> (y_n) <u>de F telles que</u> $\|a'_n\| \leq 1$ et $\|b_n\| \leq 1$ et

$$T = \sum_{n=o}^{\infty} \lambda_n a'_n \otimes b_n$$

<u>Démonstration</u> : L'équivalence entre (ii) et (iii) est évidente. Montrons que (iii) $\Rightarrow$ (i). Soit A la boule unité de E. Si $T = \sum_n \lambda_n a'_n \otimes b_n$, on a $Tx = \sum \mu_n(x) \; z_n$ avec $\sum_{n=o}^{\infty} |\mu_n(x)| \leq 1$ et la suite (z_n) à décroissance rapide dans F (prendre $\mu_n(x) = \sqrt{\lambda_n} < x, a'_n >$ et $z_n = \sqrt{\lambda_n} \; b_n$).
Inversement soit (b_n) une suite à décroissance rapide de F dont l'enveloppe complétante contient T(A). Pour tout $x \in A$ on a alors

$$Tx = \sum_n \mu_n(x) \; b_n \text{ avec } \sum_n |\mu_n(x)| \leq 1.$$

Posons $$a'_n : x \in E \to \mu_n\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \in \mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}.$$

On définit ainsi un élément de E' de norme ≤ 1 et on a bien $T = \sum_n a'_n \otimes b_n$.

La proposition ci-dessus montre que le quotient d'un opérateur de la forme (ii) ou (iii) entre Banach est encore ultra-nucléaire, résultat qui rappelons le, est faux en général pour les opérateurs nucléaires. Afin de démontrer une autre propriété remarquable et utile, des opérateurs ultra-nucléaires (ultra-nucléarité dans la fermeture de l'image) nous étendrons la définition de ces opérateurs aux espaces localement convexes.

Définition 1.2 : Soient E un espace vectoriel topologique et F un evb. Une application linéaire $T : E \to F$ est dite *fortement bornée* si elle applique un voisinage de (0) de E sur un borné de F.

En particulier soient E et F deux espaces localement convexes séparés tels que la bornologie canonique B de F (parties absorbées par les voisinages de (0)) soit complète (on dira alors que *F est bornologiquement complet*). On dit que T est *ultra-nucléaire* si T est fortement bornée de E dans (F, s_0), espace vectoriel F muni de la (s_0)-bornologie associée à B ; autrement dit, si T applique un voisinage de (0) de E sur une partie à décroissance très rapide de (F,B). Ces opérateurs se caractérisent comme suit :

Proposition 1.2 : *Soient E et F deux espaces localement convexes séparés ; F étant bornologiquement complet*. $T : E \to F$ *linéaire*.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) *T est ultra-nucléaire* ;

(ii) *T est de la forme* $T = \sum_n \lambda_n x'_n \otimes y_n$ *où* $(\lambda_n) \in s$, $\lambda_n \geq o$; (x'_n) *équicontinue de E' et* (y_n) *bornée dans F* :

(iii) *Il existe deux Banach* E_1 et F_1 ; *un opérateur ultra-nucléaire* $T_1 : E_1 \to F_1$, *deux applications linéaires continues* $u : E \to E_1$ *et* v $F_1 \to F$ *tels que T se factorise comme suit* :

$$T : E \xrightarrow{u} E_1 \xrightarrow{T_1} F_1 \xrightarrow{v} F$$

L'opérateur v peut même être supposé compact.

Démonstration : L'implication (iii) ⇒ (i) est immédiate. L'implication (i) ⇒ (ii) résulte de la définition (1.2) et de la proposition (1.1).

Reste à démontrer que (ii) ⇒ (iii). Soit A' l'enveloppe disquée fermée de la suite (x'_n) pour $\sigma(E'.E)$ et soit B l'enveloppe complétante, de la suite $\sqrt{\lambda_n}\, y_n$ à décroissance très rapide dans F : B est compact dans F. Le polaire U de A^0 dans E est un voisinage de (0) de E que T envoie dans F_B : En effet si $x \in U$, on a, pour deux entiers p et q, l'expression $\|\sum_{n=p}^{q} \lambda_n < x, x'_n > y_n\|_B$ (norme dans F_B) majorée par $\sum_{n=p}^{q} \sqrt{\lambda_n} | < x, x'_n > |$ $\|\sqrt{\lambda_n}\, y_n\|_B \leq \sum_{n=p}^{q} \sqrt{\lambda_n}$ puisque $\|\sqrt{\lambda_n}\, y_n\|_B \leq 1$ et $x'_n \in U^0$. Il en résulte que la série $\sum_n \lambda_n < x, x'_n > y_n$ converge dans F_B (B étant complétant). Soit T_1 l'application linéaire continue définie par T de $\hat{E}_U \to F_B$. La factorisation $E \to \hat{E}_U \to F_B \to F$ est la factorisation cherchée.

<u>Corollaire 1 : Soient E et F deux elcs : F bornologiquement complet. Si T : E → F est un opérateur ultra-nucléaire, sa transposée</u> $T' : F'_c \to E'_\beta$ <u>est ultra-nucléaire</u> (F'_c est le dual de F muni de la topologie de la convergence uniforme sur les disques compacts de F et E'_β le dual fort de E.).

<u>Démonstration</u> : En effet si T se factorise $E \to E_1 \to F_1 \to F$ avec $F_1 \to F$ compacte, T' se factorise sous la forme

$$T' : F'_c \to F'_1 \to E'_1 \to E'_\beta \text{ où } F'_c \to F'_1 \text{ et } E'_1 \to E'_\beta$$

sont linéaires continues et $F'_1 \to E'_1$ ultra-nucléaire (car si $u = \sum x'_n \otimes y_n$ est ultra-nucléaire entre deux Banach, sa transposée $u' = \sum_n y_n \otimes x'_n$ est évidemment aussi ultra-nucléaire).

<u>Corollaire 2 : Soient E et F deux elcs, F bornologiquement complet T : E → F un opérateur ultra-nucléaire et M un sous espace fermé de F contenant l'image de T, alors T : E → M est ultra-nucléaire.</u>

<u>Démonstration</u> : Soit S = T' la transposée de T, qui est ultra-nucléaire de F'_c dans E'_β (Corollaire 1).

Son noyau $(T(E))^0$ contient M^0 donc l'application quotient

$$\overset{\circ}{S} : \frac{F'}{M^{0}} \to E'_{\beta} \text{ est ultra-nucléaire.}$$

La transportée de $\overset{\circ}{S}$ est donc ultra-nucléaire de E" dans M donc sa restriction à E qui est précisément T est ultra-nucléaire.

Corollaire 3 : Soient E et F deux espaces de Banach et $T : E \to F$ linéaire. Pour que T soit ultra-nucléaire il suffit (et il faut) que sa transposée soit ultra-nucléaire.

Démonstration : Si T' est ultra-nucléaire de $F' \to E'$, T" est ultra-nucléaire de E" dans F". Comme T' est compact, T est compact donc T" (E")$\subset$F et par conséquent T est ultra-nucléaire d'après le corollaire 2.

Remarque : Rappelons que les corollaires 2 et 3 sont faux si l'on substitue "nucléaire" à "ultra-nucléaire".

§ 2. EXEMPLES ET CONSTRUCTIONS D'ESPACES ULTRA-NUCLEAIRES.

Signalons sans démonstration :

Proposition 2.1 : (permanence).

(i) Tout sous espace bornologique Mackey-fermé d'un ebc co-ultra-nucléaire est co-ultra-nucléaire ;

(ii) Tout quotient bornologique séparé d'un ebc co-ultra-nucléaire est co-ultra-nucléaire ;

(iii) Tout produit bornologique dénombrable d'ebc co-ultra-nucléaires est co-ultra-nucléaire.

(iv) Toute somme directe bornologique d'ebc co-ultra-nucléaires est co-ultra-nucléaire.

Corollaire (Martineau [5]) : L'ultra-nucléarité (topologique) se conserve par sous-espace, quotient séparé ; produit arbitraire et somme directe topologique dénombrable.

Proposition 2.2 : Soit E un espace localement convexe séparé et bornologiquement complet.

Pour que E'_β soit ultra-nucléaire il faut et il suffit que E soit co-ultra-nucléaire.

C'est évident. On en déduit :

Corollaire 1 : Tout espace (DF)-nucléaire est ultra-nucléaire. En effet c'est un sous espace de son bidual, dual fort d'un Fréchet nucléaire E. Tout borné de E est à décroissance rapide (Komura-Komura [10]) donc à décroissance très rapide, E étant métrisable.

Corollaire 2 : Le dual fort d'un ($\mathcal{L}$F)-nucléaire est ultra-nucléaire Tout borné d'un tel espace est en effet à décroissance très rapide. Plus généralement soit E une limite inductive séparée d'une suite de Fréchet nucléaires. Si E est bornologiquement complet, tout borné de E est à décroissance très rapide comme il résulte des théorèmes du graphe fermé et de Komura-Komura.

Les résultats ci-dessus assurent que la plupart des espaces usuels de l'Analyse sont. soit ultra-nucléaires (espaces des distributions) soit co-ultra-nucléaires (espaces de fonctions) Signalons particulièrement que l'espace s est co-ultra-nucléaire et non ultra-nucléaire.

Signalons un résultat sur l'ultra-nucléarité des espaces d'opérateurs donc de produits-tensoriels : Pour tout ebc E et pour tout elc F on note L(E,F) (resp. $\Lambda(F,E)$) l'espace des applications linéaires bornées de E dans F muni de la σ-topologie où σ est une base de bornologie de E ; (resp. l'espace des applications linéaires fortement bornées de F dans E muni de la bornologie suivante : Une partie H de $\Lambda(F,E)$ est dite "bornée" s'il existe un couple (U.A) formé d'un voisinage de (0) de F et d'un disque borné de E tel que $H(U) \subset A$).

<u>Proposition 2.3</u> : <u>Soient E un ebc co-ultra-nucléaire séparé par son dual bornologique et F un elc séparé ultra-nucléaire. L'espace L(E,F) (resp. $\Lambda(F,E)$.) est un elc ultra-nucléaire (resp. un ebc co-ultra-nucléaire</u>).

Ce résultat admet notamment comme cas particulier l'ultra-nucléarité de la plupart d'espaces $E\hat{\otimes}F$ lorsque E et F sont des elcs ultra-nucléaires (cf. Martineau [5]) et assure l'ultra-nucléarité d'espaces d'opérateurs continus usuels.

<u>§ 3. LE THEOREME DES ULTRA-NOYAUX ($1^{\text{ière}}$ forme)</u>.

Le théorème des ultra-noyaux est une conséquence du théorème général suivant :

<u>Proposition 3.1</u> : <u>Soit E un elc séparé. Pour que E soit ultra-nucléaire il faut et il suffit que toute application linéaire fortement bornée de E dans un ebc complet F soit de la forme</u>

$$T = \sum_n \lambda_n x'_n \otimes y_n .$$

<u>où</u> $(\lambda_n) \in s$; (x'_n) <u>équicontinue dans E' et</u> (y_n) <u>bornée dans F. (La série</u> $Tx = \sum_n \lambda_n < x, x'_n > y_n$ <u>convergeant bornologiquement dans F</u>).

<u>Démonstration</u> : En effet si E est ultra-nucléaire, T applique un voisinage de (0) de E dans une partie à décroissance très rapide d'un Banach F_B d'où la nécessité d'après la proposition (1.2). Inversement toute application linéaire continue de E dans un Banach est alors ultra-nucléaire ce qui implique immédiatement que tout voisinage de (0) U de E contient un voisinage V tel que l'application canonique $\hat{E}_V \to \hat{E}_U$ soit ultra-nucléaire (ce qui assure l'ultra-nucléarité de E.

<u>Corollaire 1</u> : [théorème des ultra-noyaux ($1^{\text{ère}}$forme)].

<u>Soient E et F deux espaces localement convexes séparés, E étant ultra-nucléaire. Toute application linéaire fortement bornée de E dans F'</u>

<u>(F' dual de F muni de la bornologie équicontinue) est de la forme</u>

$$T = \sum_n \lambda_n e'_n \otimes f'_n$$

<u>où</u> $(\lambda_n) \in s$, (e'_n) (resp. (f'_n)) <u>équicontinue dans E' (resp. F')</u>.

<u>Corollaire 2</u> : (A. Grothendieck [3])

<u>Soient E et F deux espaces de Fréchet, E étant nucléaire. Tout élément de $E\tilde{\otimes}F$ est de la forme</u>

$$u = \sum_n \lambda_n e_n \otimes f_n .$$

<u>où</u> $(\lambda_n) \in s$, (e_n) (resp (f_n)) <u>bornée dans E (resp. F)</u>

<u>Démonstration</u> : On a $E \tilde{\hat{\otimes}} F \simeq E \hat{\hat{\otimes}} F \simeq \mathcal{L}_\varepsilon(E'_c, F)$ (notations de [8]) donc tout élément u de $E \tilde{\otimes} F$ définit un opérateur linéaire continu d'un dual de Fréchet dans un Fréchet donc est fortement borné (premier axiome de dénombrabilité de Mackey). Or $E'_c \simeq E'_\beta$ est un elc ultra-nucléaire puisque c'est un (DF)-nucléaire (§2) d'où le corollaire 2 en vertu du corollaire 1.

<u>§ 4. LE THEOREME DES ULTRA-NOYAUX ($2^{\text{ième}}$ forme) ET SA RECIPROQUE</u>.

<u>Proposition 4.1</u> : <u>Soit E un espace localement convexe séparé. Pour que E soit ultra-nucléaire, il faut et il suffit que pour tout espace localement convexe séparé F, toute forme bilinéaire continue sur $E \times F$ soit un ultra-noyau</u>.

<u>Démonstration</u> : La nécessité n'est rien d'autre qu'une forme du théorème des ultra-noyaux (§3) en vertu de l'équivalence entre formes bilinéaires continues sur $E \times F$ et applications fortement bornées de E dans F'. Démontrons la suffisance. Soit U un voisinage de (0) disqué de E. Posons $B(x,y) = \langle x,y \rangle$ pour tout $x \in E$ et $y \in E'_{U^o}$. On définit ainsi une forme bilinéaire continue sur $E \times E'_{U^o}$ qui est donc, en vertu de l'hypothèse, un ultra-noyau. Par conséquent il existe un voisinage de (0)

disqué V de E qu'on peut supposer absorbé par U et tel que

$< x.y > = \sum_n < x,a_n > < y,b_n >$ où $a_n \in E'_{V^o}$ et $b_n \in (E'_{U^o})'$ avec

$(\|a_n\|_{V^o}\|b_n\|^*_{U^o}) \in s$, espace des suites à décroissance rapide ; on note

$\|a_n\|_{V^o}$ la norme de a_n dans E'_{V^o} et $\|b_n\|^*_{U^o}$ la norme de b_n dans $(E'_{U^o})'$).
Il suffit alors de montrer que l'application canonique $\pi_{VU} : E_V \to \hat{E}_U$ est ultra-nucléaire et pour cela il suffit de montrer que l'application $E_V \to (E_U)''$ est ultra-nucléaire (Prop (1.2), corollaire 2). Or il existe une suite (a_n) de E'_{V^o} et une suite (b_n) de $(E_U)''$ telles que la suite $(\|a_n\|_{V^o}\|b_n\|^*_{U^o})$ soit à décroissance rapide et que pour tout $x \in E_V$, $\pi_{VU}(x)$ est donné par :

$$< \pi_{VU}(x), y > = \sum_n < x.a_n > < y, b_n >$$

donc; $\pi_{VU}(x) = \sum_n < x.a_n > b_n$ et par conséquent π_{VU} est ultra-nucléaire [Proposition (1.2)], ce qui achève la démonstration.

§ 5. UNE CARACTERISATION INTRINSEQUE DU DUAL FORT D'UN ESPACE DE FRECHET ULTRA-NUCLEAIRE.

On doit à J. Dieudonné la caractérisation intrinsèque suivante du dual fort d'un espace de Fréchet-Montel : " un espace localement convexe séparé est le dual fort d'un espace de Fréchet-Montel si et seulement si il est tonnelé et admet un système fondamental dénombrable de compacts convexes". Les travaux de divers auteurs (cf.[4]a) ont conduit à des résultats améliorés du même type fournissant un début de classification des espèces (DF) en fonction de la "petitesse" de leur bornologie : un espace localement convexe séparé est le dual fort d'un espace de Fréchet-Montel [resp. dual fort d'un Fréchet reflexif ; resp. un espace (DF)-Schwartz] si et seulement si il est quasi tonnelé et si sa bornologie compacte (resp. faiblement compacte ; resp. précompacte ;) est à base dénombrable. Nous avons également montré (cf. [4] b) moyennant une version bornologique du critère de nucléarité de Komura-Komura ([10]) qu'un espace localement convexe séparé est le dual fort d'un Fréchet nucléaire si et seulement si il est quasi-tonnelé et si sa (s)-bornologie est à base dénombrable. Nous allons montrer dans ce qui suit qu'il est possible de donner une caractérisation intrinsèque du même type au dual fort d'un espace de Fréchet ultra-nucléaire.

Proposition 5.1 : Un espace localement convexe séparé, bornologiquement complet, a fortiori semi-complet, est le dual fort d'un espace de Fréchet ultra-nucléaire si et seulement si il est quasi-tonnelé et si sa bornologie à décroissance très rapide est à base dénombrable.

Démonstration : Nécessité : Le dual fort $F = E'_\beta$ d'un Fréchet ultra-nucléaire E est ultra-bornologique, a fortiori quasi-tonnelé. De plus toute partie bornée de F est équicontinue dans E' donc, E étant ultra-nucléaire, est à décroissance très rapide dans E' d'où la nécessité. La suffisance sera conséquence du lemme fondamental suivant qui améliore le théorème 1 de ([4]a).

Lemme fondamental : Soient E un espace vectoriel ; B_1 et B_2 deux bornologies sur E telles que $B_1 \supset B_2$. Si la bornologie B_2 est à base dénombrable et si toute suite à décroissance très rapide dans (E,B_1) possède une sous suite bornée dans (E,B_2), $B_1 = B_2$.

En effet soit (B_n) une base de la bornologie B_2 fermée de parties équilibrées. Pour tout entier n, il existe un entier m tel que $B_n \subset e^n B_n \subset B_n$. Il suffit par conséquent de montrer que $\{e^n B_n\}$ est une base de B_1. Sinon, soit B un élément de B_1 contenu dans aucun $e^n B_n$. Il existe alors une suite (x_n) de B telle que pour tout entier n, $x_1 \notin e^n B_n$. La suite $(e^{-n} x_n)$ est à décroissance très rapide dans $(E.B_1)$ et aucune de ses sous-suites n'est bornée pour B_2 ce qui contredit l'hypothèse et achève la démonstration du lemme.

En vertu du lemme, la bornnlogie canonique de E (parties absorbées par les voisinages de (0)) est identique à sa (s_0)-bornologie et par conséquent (E,B) est co-ultra-nucléaire. Comme il est de plus à une base dénombrable, son dual fort E'_β est un Fréchet ultra-nucléaire et la démonstration s'achève en remarquant que E est réflexif car quasi-tonnelé et semi-montel.

§ 6. TOPOLOGIES ULTRA-NUCLEAIRES COMPATIBLES AVEC UNE DUALITE.

Soit F un espace localement convexe séparé et E son dual. Soit B la bornologie complète sur E formée par les disques compacts pour $\sigma(E,F)$ (bornologie de Mackey) et $s_0(B)$ la bornologie à décroissance très rapide de (E,B). Notons $s_0(\tau)$ la $s_0(B)$-topologie sur F : topologie de la convergence uniforme sur les éléments de $s_0(B)$. On a :

Proposition 6.1 : Une topologie localement convexe séparée ultra-nucléaire sur F est compatible avec la dualité entre F et E si et seulement si elle est comprise entre $\sigma(F,E)$ et $s_0(\tau)$.

Preuve : Une telle topologie engendre par polarité une bornologie sur E, co-ultra-nucléaire et plus fine que B (Mackey-Arens) donc plus fine que $s_0(B)$ (propriété caractéristique de la (s_0)-bornologie). Cette topologie est donc moins fine que $s_0(\tau)$, d'où le théorème.

§ 7. ULTRA-NUCLEARITE, DIMENSION DIAMETRALE ET ENTROPIE.

Remarquons enfin qu'un espace bornologique complet (resp. un espace localement convexe séparé) est co-ultra-nucléaire (resp. ultra-nucléaire) si et seulement si sa dimension diamétrale [cf (6)] contient une suite à décroissance rapide. De même en suivant les notations de ([9]; Exposé N°20 bis) un espace bornologique complet (resp. un espace localement convexe séparé) est co-ultra-nucléaire (resp. ultra-nucléaire) si et seulement si tout disque borné A est contenu dans un disque borné B tel que $\rho(A,B) = 0$ [resp. tout voisinage de (0),U contient un voisinage disqué V, tel que $\rho(V,U) = 0$].

§ 8. L'ESPACE ULTRA-NUCLEAIRE UNIVERSEL.

T et Y Komura [10] ont démontré que tout espace nucléaire est isomorphe à un sous espace de s^I où s est l'espace nucléaire des suites scalaires à décroissance rapide et I un ensemble d'indices convenable. Antérieurement au théorème de Komura-Komura, A. Martineau [5] avait annoncé que le dual s' de s était un espace ultra-nucléaire universel : Tout espace ultra-nucléaire est un sous espace de $(s')^I$. Voici une démonstration de ce résultat (cf. aussi [7]).

Proposition 8.1 : L'espace s' des suites à croissance lente, muni de sa topologie usuelle est un espace ultra-nucléaire et joint de la propriété universelle suivante : Tout espace ultra-nucléaire est isomorphe à un sous espace vectoriel topologique de $(s')^I$ où I est un ensemble d'indices convenable.

Démonstration : La première assertion est claire, s' étant un (DF)-nucléaire. Soit E un espace ultra-nucléaire. Tout voisinage de (0) U de E contient un voisinage V tel que l'application canonique $\pi_{VU} : \tilde{E}_V \to \tilde{E}_U$ soit ultra-nucléaire donc de la forme:

$$(1) \qquad \pi_{VU}(x) = \sum_n \lambda n < x, x_n > y_n$$

où $(\lambda_n) \in s$, $(x_n) \subset E'_{V^o}$ et $(y_n^*) \subset \tilde{E}_U$ avec $\|x_n\|_{V^o} \leq 1$ et $\|y_n\|_U \leq 1$.

La relation (1) entraine immédiatement que la suite $(< x, x_n >)_n$ est à croissance lente. Soit $(U_i)_{i \in I}$ un système fondamental de voisinages de (0) de E et pour tout $i \in I$, $(x_n^{(i)})_n$ la suite (x_n) associée comme ci-dessus à U_i. On vérifie immédiatement que l'application

$x \in E \to ((< x, x_n^{(i)} >)) \in (s')^I$ est un isomorphisme vectoriel topologique.

§ 9. AUTRES EXEMPLES CONCRETS D'ESPACES ULTRA-NUCLEAIRES.

En vertu des résultats du § 2, les espaces usuels suivants sont ultra-nucléaires. Le théorème des ultra-noyaux leur est donc applicable.

- $\mathcal{E}', \mathcal{S}', \mathcal{D}'$ espaces des distributions ;

- $\mathcal{D}_{M_k}(\Omega)$ espace des fonctions scalaires de classe M_k espace de base des ultra-distributions ; Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$.

- $H'(\Omega)$ espace des fonctionnelles analytiques sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$ et par suite :

- Exp espace des fonctions entières de type exponentiel (cet espace est isomorphe à $H'(\mathbb{C}^n)$ par la transformation de Fourier-Borel).

- $H(K)$ espace des germes de fonctions holomorphes autour d'un compact K de $\mathbb{C}^n$;

- $\Delta(\Omega)$ espace des fonctions harmoniques dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$. Plus généralement :

- Soit un opérateur différentiel hypoelliptique dans Ω dont la transposée est aussi hypoelliptique. On sait alors, en vertu d'un théorème de L. Schwartz que son noyau, muni de la topologie induite par $\mathcal{E}(\Omega)$ est un sous espace de $\mathcal{D}'(\Omega)$ donc est un Fréchet ultra-nucléaire.

- Enfin signalons que l'espace Σ_n des séries formelles à n variables muni de la topologie de la convergence simple des coefficients est un Fréchet ultra-nucléaire ; par suite son dual fort $\mathcal{P}_n$, espace des polynômes à n variables est ultra-nucléaire.

Par contre les espaces $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ $\mathcal{E}[-1+1]$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{D}$ ne sont pas ultra-nucléaires mais sont co-ultra-nucléaires.

APPENDICE

QUELQUES RAPPELS DE BORNOLOGIE

Etant donné un ensemble X, on appelle bornologie sur X toute famille B de parties de X, héréditaire pour l'inclusion et stable par réunion finie. Un couple (X,B) formé d'un ensemble X et d'une bornologie sur X est appelé ensemble bornologique. Les éléments de B sont appelés "bornés" de X. Une application d'un ensemble bornologique dans un autre est dite bornée si elle transforme un borné en un borné. Une bornologie B_1 sur X est plus fine qu'une bornologie B_2 sur X si $B_1 \subset B_2$ c'est-à-dire si l'identité de (X,B_1) dans (X,B_2) est bornée. La donnée sur un ensemble X d'une bornologie est la donnée d'une structure au sens de Bourbaki. On définit alors de façon naturelle d'une part les bornologies initiales avec en particulier les notions de bornologie produit et de bornologie induite, d'autre part les bornologies finales. Une borno ogie sur un espace vectoriel E sur un corps $\mathbb{K}$ égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est dite vectorielle si les deux applications

$$(x,y) \to x+y \quad \text{et} \quad (\lambda,x) \to \lambda x$$

de $E \times E$ dans E et de $\mathbb{K} \times E$ dans E sont bornées lorsqu'on munit $E \times E$ et $\mathbb{K} \times E$ des bornologies produits naturelles. Une bornologie sur un espace vectoriel est vectorielle si, et seulement si, elle est stable par somme finie, par homothétie et par passage à l'enveloppe équilibrée. Un espace vectoriel bornologique (e.v.b) est un espace vectoriel muni d'une bornologie vectorielle. Une bornologie vectorielle est dite convexe si elle est stable par passage à l'enveloppe convexe. Nous appelons espace bornologique convexe ou tout simplement espace bornologique en abrégé e.b.c. un espace vectoriel muni d'une bornologie vectorielle et convexe. Les espaces vectoriels topologiques localement convexes, bornologiques au sens usuel sont appelés par nous elc bornologiques. Il existe d'ailleurs des rapports bien précis entre ces espaces et les espaces bornologiques généraux .

Une suite (x_n) dans un evb E est dite Mackey-convergente (M-convergente) vers un point x de E s'il existe une suite de scalaires ε_n tendant vers 0 et un borné B de E tel que pour tout entier n, $x_n - x \in \varepsilon_n B$. Cela équivaut à dire, si la bornologie de E est convexe qu'il existe un disque borné B de E tel que (x_n) converge vers x dans E_B. On utilise aussi l'expression bornologiquement convergente au lieu de Mackey-convergente.

Un espace vectoriel bornologique est dit séparé s'il n'admet aucune droite bornée. Un ebc est dit complet s'il possède une base de bornologie formée de disques complétants c'est-à-dire de disques B, tels que E_B soit un Banach pour la topologie définie par la jauge de B.

Une partie A d'un evb séparé E est dite M-fermée (Mackey-fermée) si elle contient les limites (dans E) au sens de Mackey de suites de ses points. On dit aussi b-fermée (bornologiquement fermée).

Le dual bornologique d'un ebc séparé est l'espace vectoriel des formes linéaires bornées sur E. Il peut être nul, même si E est complet. On le note $E^{\times}$ et on dit que E est séparé par son dual si la dualité entre E et $E^{\times}$ est séparante.

Pour plus amples informations sur les bornologies, voir par exemple :

H. Hogbe Nlend : Les fondements de la bornologie moderne I.
Département de Mathématiques, Université de Bordeaux (1970).

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. Bessaga and A. Pelczynski : Dokl. Akad. Nauk. SSSR 134,745-748 (1969)

[2] B.S. Brudovskii : Dokl. Akad. Nauk. SSSR,178,61-63 (1968)

[3] A. Grothendieck : Mem. A.M.S. ,16, (1966)

[4]a H. Hogbe-Nlend : Bull. Soc. Math. France, 98, 1970, 201-20.

[4]b H. Hogbe-Nlend : Cras. t 272, p. 244-246 (1971)

[5] A. Martineau : Cras, 259, 259, 1964, 3162-3164.

[6] A. Pietsch : Nukleare Lokalkonvex Raûme. Akad. Verlag - Berlin 1965.

[7] M.S. Ramanujan : Math. Ann. 189, 161-168 (1970)

[8] L. Schwartz : Séminaire L. Schwartz 1953-1954, Paris.

[9] L. Schwartz : Séminaire (1969-1970) , Ecole Polytechnique, Paris.

[10] T. Komura und Y. Komura : Math. Ann. 162, p. 284-288 (1966)
