J. CL. TOUGERON

Idéaux fermés de fonctions C^∞

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1970-1971), exp. n° 18, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1970-1971____A18_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77
(633)

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 0 - 1 9 7 1

IDEAUX FERMES DE FONCTIONS C^{∞}

par J. Cl. TOUGERON

Exposé N° 18

17 Février 1971

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$; $\mathcal{E}(\Omega)$ la $\mathbb{R}$-algèbre des fonctions à valeurs réelles, définies et de classe C^∞ sur Ω. Si X est un fermé de Ω et $m \in \mathbb{N}$, on pose, pour tout $f \in \mathcal{E}(\Omega)$:

$$|f|_m^X = \sup_{\substack{|k| \leq m \\ x \in X}} |D^k f(x)| .$$

On munit $\mathcal{E}(\Omega)$ de sa structure habituelle d'espace de Fréchet, définie par cette famille dénombrable de semi-normes. On note $\underline{m}_X^\infty$ l'idéal de $\mathcal{E}(\Omega)$ formé des fonctions plates sur X. L'application $T_a : \mathcal{E}(\Omega) \to \mathbb{R}[[x_1,\ldots,x_n]]$ qui à toute fonction f associe sa série de Taylor en a est surjective (théorème de Borel généralisé) et induit un isomorphisme :

$$\mathfrak{F}_a = \mathcal{E}(\Omega) \mid \underline{m}_a^\infty \approx \mathbb{R}[[x_1,\ldots,x_n]] .$$

Si I est un idéal de $\mathcal{E}(\Omega)$, on pose :

$$\hat{I} = \bigcap_{a \in \Omega} (\underline{m}_a^\infty + I) = \{f \in \mathcal{E}(\Omega) \mid \forall a \in \Omega,\ T_a f \in T_a I\}.$$

D'après un théorème de Whitney (Malgrange, [1]), l'adhérence $\bar{I}$ de I dans $\mathcal{E}(\Omega)$ est égale à $\hat{I}$.

Il n'est pas toujours aisé de vérifier que $\hat{I} = I$, i.e. que I est un idéal fermé. Dans cet exposé, nous donnons une condition suffisante pour que I soit fermé (théorème 2.3) ; dans l'exposé suivant, nous donnons quelques applications de ce théorème : nous démontrons un théorème de B. Malgrange [1], puis quelques indications très succintes sur une extension de ce théorème (J. Cl. Tougeron et J. Merrien [3]).

§ 1. L'INEGALITE DE ŁOJASIEWICZ.

Si $x \in \Omega$, on note $|x|$ la norme euclidienne de x ; si X est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$, $d(x,X)$ désigne la distance euclidienne de x à X (si X est vide on pose $d(x,X) = 1$). Enfin, on pose, pour $\rho \geq 0$,
$B(x,\rho) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |x - y| \leq \rho\}$.

<u>Définition 1.1</u> : Soient X et Y deux fermés de Ω, et f une fonction numérique définie sur Ω. On dit que f <u>vérifie $\mathcal{L}(X,Y)$</u> ou que f <u>vérifie sur Y une inégalité de Łojasiewicz par rapport à X</u> si pour tout compact K contenu dans Y, il existe deux constantes C et $\alpha \geq 0$ telles que : $\forall\, x \in K$,

$$|f(x)| \geq C\, d(x,X)^{\alpha} .$$

<u>Définition 1.2</u> : Soient I un idéal type fini de $\mathcal{E}(\Omega)$, X l'ensemble de ses zéros. On dit que I est un <u>idéal de Łojasiewicz</u> s'il existe $f \in I$ vérifiant $\mathcal{L}(X,\Omega)$.

Dans ce cas, si $f_1,\dots,f_s$ est un système de générateurs de I, les fonctions $\sum_{i=1}^{s}|f_i|$ ou $\sum_{i=1}^{s} f_i^2$ vérifient $\mathcal{L}(X,\Omega)$.

<u>Proposition 1.3</u> : Soient I un idéal de type fini de $\mathcal{E}(\Omega)$; X l'ensemble de ses zéros. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(1) I est un idéal de Łojasiewicz.
(2) toute fonction de $\mathcal{E}(\Omega)$, plate sur X, appartient à $\underline{m}_X^{\infty} . I$.
(3) toute fonction de $\mathcal{E}(\Omega)$, plate sur X, appartient à I.

<u>Preuve</u> : (1) $\Rightarrow$ (2). Soit $f_1,\dots,f_s$ un système de générateurs de I ; posons $f = \sum_{i=1}^{s} f_i^2$. Soit $\varphi \in \mathcal{E}(\Omega)$ plate sur X. Considérons la fonction $\psi = \varphi/f$, définie et de classe C^{∞} sur $\Omega - X$: elle se prolonge en une fonction de classe C^{∞} sur Ω, plate sur X.

En effet, pour tout compact K de Ω, il existe $C > 0$ et $\alpha \geq 0$ telles que : $\forall\, x \in K$, $|f(x)| \geq C\, d(x,X)^{\alpha}$. D'autre part, pour tout multi-indice k, il existe $C' > 0$ telle que :

$$\forall\, x \in K - X \quad , \quad |D^k \psi(x)| \leq \frac{C'\, |\varphi|^{x}_{|k|}}{|f(x)|^{|k|+1}} \leq \frac{C' \quad |\varphi|^{x}_{|k|}}{C^{|k|+1} . d(x,X)^{\alpha(|k|+1)}} .$$

Puisque φ est plate sur X, $|\varphi|^{x}_{|k|} \to 0$ plus vite que toute puissance de $d(x,X)$, quand $d(x,X) \to 0$, et les $D^k\psi$ se prolongent par continuité en des fonctions nulles sur X.

(2) $\Rightarrow$ (3). Evident.

(3) ⇒ (1). Si I n'était pas un idéal de Łojasiewicz, on pourrait construire une suite de points $x^p \in \Omega - X$, convergeant vers un élément $x \in X$, et telle que $\sum_{i=1}^{s} |f_i(x^p)| \leq d(x^p, X)^{p+1}$. En remplaçant au besoin la suite x^p par une sous-suite, on peut supposer que les boules $B(x^p, \frac{1}{2} d(x^p, X)) = \mathfrak{B}_p$ sont deux à deux disjointes. Soit alors $\alpha_p \in \mathcal{E}(\Omega)$, telle que $\alpha_p(x^p) = 1$, $\alpha_p = 0$ sur le complémentaire de $\mathfrak{B}_p$, et $|\alpha_p|_m^{\mathfrak{B}_p} \leq \dfrac{C_m}{d(x^p, X)^m}$, où C_m est une constante indépendante de p.

La série $\sum_{p=1}^{\infty} d(x^p, X)^p \cdot \alpha_p$ converge vers une fonction $\varphi \in \mathcal{E}(\Omega)$, plate sur X. Par hypothèse $\varphi \in \hat{I}$. Or, dans ce cas il existerait une constante C telle que $|\varphi(x^p)| \leq C \cdot \sum_{i=1}^{s} |f_i(x^p)|$, d'où $d(x^p, X) \leq C\, d(x^p, X)^{p+1}$, ce qui est absurde.

<u>Corollaire 1.4</u> : Tout idéal I de $\mathcal{E}(\Omega)$, fermé et de type fini, est de Łojasiewicz.

<u>Preuve</u> : Si X est l'ensemble des zéros de I, on a visiblement : $\mathfrak{m}_X^\infty \subset \hat{I} = I$ d'où le résultat d'après 1.3.

Avant d'aborder la démonstration du théorème fondamental, donnons quelques exemples d'idéaux fermés.

<u>Exemple 1.5</u> : Soit (x,y) un système de coordonnées de $\Omega = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$. Considérons un polynôme $P(x,y) = y^p + \sum_{i=1}^{p} u_i(x)\, y^{p-i}$, $u_i \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^{n-1})$, et supposons que, $\forall\, x \in \mathbb{R}^{n-1}$, le polynôme $P(x,.)$ ait toutes ses racines réelles. Alors P engendre dans $\mathcal{E}(\Omega)$ un idéal fermé I.

En effet, soit $f \in \bar{I}$. D'après le théorème de préparation différentiable (Malgrange [1]), il existe $Q \in \mathcal{E}(\Omega)$ et un polynôme $R = \sum_{i=1}^{p} v_i(x)\, y^{p-i}$, $v_i \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^{n-1})$, tels que : $f = PQ + R$. Evidemment, $R \in \bar{I}$, et donc, $\forall\, x \in \Sigma$, $R(x,.)$ possède p racines réelles (distinctes ou confondues). Puisque $d^0 R < p$, on a $R = 0$ et donc $f \in I$.

<u>Exemple 1.6</u> : D'après la remarque précédente, la fonction $y^2 - e^{-1/x^2}$ engendre dans $\mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$ un idéal fermé ; par contre, $y^2 + e^{-1/x^2}$ ne vérifie pas une inégalité de Łojasiewicz par rapport à l'ensemble de ses zéros (l'ori-

gique), donc a fortiori n'engendre pas un idéal fermé. Enfin, $y(y^2+e^{-1/x^2})$ engendre un idéal de Lojasiewicz, mais n'engendre pas un idéal fermé (le corollaire 1.4 n'admet donc pas de réciproque).

Le lemme suivant est une version du théorème des fonctions implicites ordinaire.

<u>Lemme 1.7</u> : Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$ et soit θ une application de classe C^2 de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. Si Δ désigne le jacobien de θ, il existe des constantes >0, C, C', C'' telles que : $\forall\, a \in K$, avec $\Delta(a) \neq 0$ et $\forall\, \rho_a$, avec $0 < \rho_a \leq |\Delta(a)|$, l'application θ induit un difféomorphisme de $B(a, C\rho_a)$ sur son image et en outre :

$$\theta(B(a,C\rho_a)) \supset B(\theta(a), C''|\Delta(a)|\rho_a) \supset \theta(B(a,C'|\Delta(a)|\rho_a))$$

$$B(a,C\rho_a) \supset B(a,C'|\Delta(a)|\rho_a)$$

et $\forall\, x \in B(a, C|\Delta(a)|)$. $\qquad |\Delta(x)| \geq \dfrac{|\Delta(a)|}{2}$.

<u>Corollaire 1.8</u> : Soit $\varphi = (\varphi_1,\ldots,\varphi_k)$ une application de classe C^2 de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^k$ $(k \leq n)$. Soient $V(\varphi)$ l'ensemble des zéros de $\varphi_1,\ldots,\varphi_k$; Δ le jacobien de φ par rapport à $x_1,\ldots,x_k$; K un compact de $\mathbb{R}^n$. Alors il existe des constantes $H>0$ et $H'>0$ telles que :

$$\forall\, a \in K \qquad \sum_{i=1}^{k} |\varphi_i(a)| \geq H|\Delta(a)| \inf(|\Delta(a)|, H'd(a,V(\varphi))).$$

<u>Preuve</u> : On applique le lemme à

$$\theta(x) = (\varphi_1(x),\ldots,\varphi_k(x),\ x_{k+1},\ldots,x_n)$$

en prenant $\rho_a = \inf(|\Delta(a)|, 1/C\, d(a,V(\varphi)))$ si $a = (a_1,\ldots,a_n) \notin V(\varphi)$. La fonction φ ne s'annule pas à l'intérieur de la boule $B(a,C\rho_a)$ et, puisque $\theta(B(a,C\rho_a)) \supset B(\theta(a),C''|\Delta(a)|\rho_a)$, le point $a' = (0,\ldots,0,a_{k+1},\ldots,a_n)$ n'appartient pas à l'intérieur de cette dernière boule. Donc, $\forall\, a \in K$:

$$\sum_{i=1}^{k} |\varphi_i(a)| \geq |a'-\theta(a)| \geq C''|\Delta(a)|\rho_a \geq H|\Delta(a)|\inf(|\Delta(a)|, H'd(a,V(\varphi)))$$

en posant $H = C''$ et $H' = 1\!\!\!C$.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Si I est un idéal de $\mathcal{E}(\Omega)$, on note $V(I)$ l'ensemble des zéros de I et $J_k(I)$ l'idéal engendré dans $\mathcal{E}(\Omega)$ par I et tous les jacobiens $\frac{D(f_1,\dots,f_k)}{D(x_{i_1},\dots,x_{i_k})}$ où $f_1,\dots,f_k$ appartiennent à I (si $k>n$, il convient de poser $J_k(I) = I$). Dans toute la suite de cet exposé, on étudiera la situation suivante :

($\mathcal{K}$) $\varphi_1,\dots,\varphi_s$, δ sont des éléments de $\mathcal{E}(\Omega)$; I est l'idéal engendré par $\varphi_1,\dots,\varphi_s$ et I' celui engendré par I et δ. Pour $j = k+1,\dots,s$, $\delta.\varphi_j$ appartient à l'idéal (φ) engendré par $\varphi_1,\dots,\varphi_k$; enfin, on suppose que $\delta \in \sqrt{J_k(\varphi)}$, racine de $J_k(\varphi)$.

Proposition 1.9 : Si l'idéal I' est de Łojasiewicz, il en est de même de I.

Preuve : En modifiant δ, on peut supposer que celui-ci appartient à l'idéal engendré par les $\frac{D(\varphi_1,\dots,\varphi_k)}{D(x_{i_1},\dots,x_{i_k})}$. Soit K un compact de Ω. Par hypothèse, il existe $H_1 > 0$ et $\alpha \geq 0$ tels que :

$$\forall\ x \in K \qquad \sum_{i=1}^{s} |\varphi_i(x)| + |\delta(x)| \geq H_1\ d(x,V(I'))^{\alpha} .$$

On peut décomposer K en $K = K' \cup K''$, où K' et K'' sont définis par :

$$K' = \{x \in K : \sum_{i=1}^{s} |\varphi_i(x)| \geq \frac{H_1}{2}\ d(x,V(I'))^{\alpha}\}$$

$$K'' = \{x \in K ; |\delta(x)| \geq \frac{H_1}{2}\ d(x,V(I'))^{\alpha}\} .$$

Puisque $V(I') \subset V(I)$, on a : $\forall\ x \in K'$

$$\sum_{i=1}^{s} |\varphi_i(x)| \geq \frac{H_1}{2}\ d(x,V(I))^{\alpha}\} . \tag{1.9.1}$$

D'autre part, il existe $H_2 > 0$ tel que :

$$\forall\, x \in K'' \quad \sum_{\underline{i}} \left| \frac{D(\varphi_1,\ldots,\varphi_k)}{D(x_{i_1},\ldots,x_{i_k})}(x) \right| \geq H_2\, d(x,V(I'))^{\alpha}$$

où $\underline{i} = (i_1,\ldots,i_k)$ $(1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n)$.

On peut alors écrire $K'' = \bigcup_{\underline{i}} K''_{\underline{i}}$ où :

$$K''_{\underline{i}} = \{x \in K'' \,;\, \left| \frac{D(\varphi_1,\ldots,\varphi_k)}{D(x_{i_1},\ldots,x_{i_k})}\ (x) \right| \ \geq \frac{H_2}{\binom{n}{k}}\, d(x,V(I'))^{\alpha}\} \ .$$

Par hypothèse, $V(\delta) \cup V(I) \supset V(\varphi)$, d'où :

$$d(x,V(\varphi)) \geq \inf\,(d(x,V(\delta)),d(x,V(I))) \geq \inf\,(H_3|\delta(x)|,d(x,V(I)))$$

pour un $H_3 > 0$.

D'après le corollaire 1.8, il existe $H > 0$ et $H' > 0$ tels que :

$$\forall\, x \in K \quad \sum_{i=1}^{k} |\varphi_i(x)| \geq H \left| \frac{D(\varphi_1,\ldots,\varphi_k)}{D(x_{i_1},\ldots,x_{i_k})}(x) \right| \inf \left(\left| \frac{D(\varphi_1,\ldots,\varphi_k)}{D(x_{i_1},\ldots,x_{i_k})}(x) \right| , H'd(x,V(\varphi)) \right) \ .$$

D'après les inégalités précédentes et les définitions de K'' et $K''_{\underline{i}}$:

$$\forall\, x \in K''_{\underline{i}} \quad \sum_{i=1}^{k} |\varphi_i(x)| \geq H_4 d(x,V(I))^{\alpha} \inf(H_5\, d(x,V(I))^{\alpha}, H'd(x,V(I))). \qquad (1.9.2)$$

La propsotion résulte de (1.9.1), (1.9.2) et de l'égalité :

$K = K' \cup (\bigcup_{\underline{i}} K''_{\underline{i}})$.

§ 2. LE THEOREME FONDAMENTAL.

Proposition 2.1 : Si I' est l'idéal de Łojasiewicz, toute fonction de $\mathcal{E}(\Omega)$, plate sur V(I') et nulle sur V(I), appartient à I.

Preuve : Nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme 2.2 : Soient X et Y deux fermés, $V(I') \subset X \subset Y \subset V(I)$, tels que $\frac{D(\varphi_1,\ldots,\varphi_k)}{D(x_1,\ldots,x_k)}$ vérifie $\mathcal{L}(X,Y)$, et soit g une fonction plate sur X et nulle sur $V(\varphi)$. Alors il existe k éléments de $\mathcal{E}(\Omega)$, $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$, plats sur X et tels que $g - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \varphi_i$ soit plat sur Y.

Montrons comment la proposition 2.1 se déduit du lemme 2.2. Soit $f \in \mathcal{E}(\Omega)$, plate sur $V(I')$ et nulle sur $V(I)$. Démontrons que $f \in I$. Puisque I' est un idéal de Łojasiewicz, d'après la proposition 1.3 : $f \in \underline{m}^{\infty}_{V(I')}.I'$. L'idéal I' étant engendré sur $\mathcal{E}(\Omega)$ par I et δ, on peut donc supposer, pour la démonstration, que $f \in \underline{m}^{\infty}_{V(I')}.\delta$ et donc que f s'annule sur $V(\delta) \cup V(I)$, ensemble qui contient $V(\varphi)$. Puisque I' est un idéal de Łojasiewicz, δ vérifie $\mathcal{L}(V(I'), V(I))$. On peut donc décomposer $V(I)$ en $V(I) = \bigcup_{\underline{i}} X_{\underline{i}}$ de telle sorte que, si $\underline{i} = (i_1,\ldots,i_k)$, $\dfrac{D(\varphi_1,\ldots,\varphi_k)}{D(x_{i_1},\ldots,x_{i_k})}$ vérifie $\mathcal{L}(V(I'),X_{\underline{i}})$. On ordonne de manière quelconque l'ensemble des multi-indices : $\underline{i}^1,\underline{i}^2,\ldots,\underline{i}^p,\ldots,p \leq \binom{n}{k}$, et on pose : $Y_o = V(I'), Y_p = \bigcup_{j \leq p} X_{\underline{i}^j}$, pour $p = 1,2,\ldots,\binom{n}{k}$. Alors si $\underline{i}^p = (i_1,\ldots,i_k)$, le jacobien $\dfrac{D(\varphi_1,\ldots,\varphi_k)}{D(x_{i_1},\ldots,x_{i_k})}$ vérifie $\mathcal{L}(Y_{p-1},Y_p)$.

On raisonne par récurrence sur p : on suppose que $f = f_p + f'_p$, où f_p est plate sur Y_{p-1} et $f'_p \in (\varphi)$. En appliquant le lemme 2.2 à $g = f_p$, $X = Y_{p-1}$, $Y = Y_p$ et en remplaçant le jacobien $\dfrac{D(\varphi_1,\ldots,\varphi_k)}{D(x_1,\ldots,x_k)}$ par $\dfrac{D(\varphi_1,\ldots,\varphi_k)}{D(x_{i_1},\ldots,x_{i_k})}$, on trouve que $f_p - \sum_{i=1}^{k}\alpha_i \varphi_i = f_{p+1}$ est plate sur Y_p. Il en résulte que $f'_{p+1} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \varphi_i + f'_p$ appartient à (φ). Pour $p = \binom{n}{k}$, on a donc $f = f_{p+1} + f'_{p+1}$ avec $f'_{p+1} \in I$ et f_{p+1} plate sur $V(I)$. D'après les propositions 1.3 et 1.9, $f_{p+1} \in I$, et donc $f \in I$.

<u>Preuve du lemme 2.2</u> : Nous allons d'abord définir sur $Y - X$ des champs de séries formelles $A_1,\ldots,A_k$ tels que pour tout $x \in Y\text{-}X$, $T_x g = \sum_{i=1}^{k} (T_x A_i)(T_x \varphi_i)$. Puis nous démontrerons que les champs A_i, prolongés par le champ nul sur X, sont des champs de fonctions α_i de classe C^∞ sur Ω.

Nous utiliserons la remarque suivante : soit $\gamma(y_1,\ldots,y_n)$ une fonction de classe C^∞ telle que $\gamma(0,\ldots,0,y_{k+1},\ldots,y_n) \equiv 0$. Alors :

$$\gamma(y) = \sum_{i=1}^{k} y_i \int_0^1 \frac{\partial\gamma}{\partial y_i} (t\,y_1,\ldots,t\,y_k, y_{k+1},\ldots,y_n)\,dt .$$

On définit $\theta : \Omega \to \mathbb{R}^n$, par $\theta(x) = (\varphi_1(x),\ldots,\varphi_k(x), x_{k+1},\ldots,x_n)$. Le jacobien Δ de θ est $\dfrac{D(\varphi_1,\ldots,\varphi_k)}{D(x_1,\ldots,x_k)}$ et, pour tout $a \in Y-X$, θ induit un difféomorphisme d'un voisinage de a sur un voisinage de $\theta(a)$. Le lemme 1.7 indique comment varient ces voisinages quand a reste dans un compact fixe K, ce que nous pourrons supposer pour la suite de la démonstration.

Pour un tel compact, il existe, par hypothèse, deux constantes $C_1 \geq 0$ et $\alpha \geq 0$, telles que :

$$\forall\, a \in K \cap Y \qquad |\Delta(a)| \geq C_1\, d(a,X)^{\alpha} . \tag{2.2.1}$$

a) <u>Définition des champs A_i</u>.

Soit $a \in (Y-X) \cap K$. Avec les notations du lemme 1.7, où on choisit $\rho_a = \inf(|\Delta(a)|, d(a,X))$, θ induit un difféomorphisme θ_a de $\mathcal{V}_a = \theta^{-1}(\mathcal{W}_{\theta(a)}) \cap B(a, C\rho_a)$ sur $\mathcal{W}_{\theta(a)} = B(\theta(a), C''|\Delta(a)|\rho_a)$. Pour $y \in \mathcal{W}_{\theta(a)}$, posons : $\gamma_a(y) = g(\theta_a^{-1}(y))$. On a donc :

$$\gamma_a(0,\ldots,0,y_{k+1},\ldots,y_n) = 0$$

et

$$\gamma_a(y) = \sum_{i=1}^{k} y_i \int_0^1 \frac{\partial\gamma_a}{\partial y_i} (t\,y_1,\ldots,t\,y_k, y_{k+1},\ldots,y_n)\,dt .$$

En désignant par $(\Delta_{ij}(x))$ la matrice des cofacteurs de la matrice jacobienne de θ en x, on a :

$$\frac{\partial\gamma_a}{\partial y_i}(y) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_j} (\theta_a^{-1}(y)) . \frac{\Delta_{ij}}{\Delta} (\theta_a^{-1}(y))$$

d'où

$$\forall\, x \in \mathcal{V}_a ,\ g(x) = \gamma_a(\theta(x)) = \sum_{i=1}^{k} \varphi_i(x) \int_0^1 \Big(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_j} . \frac{\Delta_{ij}}{\Delta}\Big) \circ l_a(x,t)\,dt$$

où $l_a(x,t)$ est une fonction de classe C^{∞} à valeurs dans $\mathcal{V}_a$:

$$l_a(x,t) = \theta_a^{-1}(t\,\varphi_1(x),\ldots,t\,\varphi_k(x), x_{k+1},\ldots,x_n) .$$

Posons :

$$A_{a,i}(x) = \int_0^1 (\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_j} \cdot \frac{\Delta_{i,j}}{\Delta}) \circ l_a(x,t)\,dt \,. \qquad (2.2.2)$$

Le chemin $l_a(x,t)$ et les fonctions $A_{a,i}$ dépendent de a. Mais si $x \in Y$, $\varphi_1(x) = \ldots = \varphi_k(x) = 0$ et $l_a(x,t) \equiv x$. En particulier, $l_a(x,t)$ est alors indépendant de a. Il en résulte que la série formelle en un point $x \in \mathcal{V}_a \cap Y$ de $A_{a,i}$ est indépendante de a et définit donc sur $(Y-X) \cap K$ un champ de séries formelles A_i.

b) <u>Prolongements des champs A_i</u>.

Fixons $m \in \mathbb{N}$. Nous allons d'abord majorer $|A_{a,i}|_m^{\mathcal{V}_a}$.

Pour tout multi-indice $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ on obtient en dérivant la formule (2.2.2) :

$$\forall\, x \in \mathcal{V}_a \quad D^{\omega} A_{a,i}(x) = \int_0^1 \sum_{|\omega'|=1}^{|\omega|+1} h_{a,i,\omega'}(x,t) . (\frac{D^{\omega'} g}{\Delta^{2\,\omega+1}} \circ l_a(x,t))\,dt$$

où $h_{a,i,\omega'}$ est une fonction C^{∞} sur $\mathcal{V}_a \times [0,1]$ telle que :

$$\sup_{\substack{a,i,\omega' \\ x,t}} |h_{a,i,\omega'}(x,t)| < \infty \,.$$

D'après 1.7 et 2.2.1 :

$$\forall\, x \in \mathcal{V}_a \qquad |\Delta(x)| \geq \frac{|\Delta(a)|}{2} \geq \frac{C_1}{2}\, d(a,X)^{\alpha} \quad .$$

On en déduit l'existence d'une constante C_2 telle que :

$$\forall\, a \in (Y-X) \cap K \quad |A_{a,i}|_m^{\mathcal{V}_a} \leq C_2 \,.\, \frac{|g|_{m+1}^{\mathcal{V}_a}}{d(a,X)^{(2m+1)\alpha}} \quad . \qquad (2.2.3)$$

Puisque $\rho_a \leq d(a,X)$ on a $\forall\, x \in \mathcal{V}_a$: $d(x,X) \leq 2d(a,X)$. Il en résulte, puisque g est plate sur X, que pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe une constante $C(p)$ indépendante de a, telle que :

$$|A_{a,i}|_m^{\mathcal{V}_a} \leq C(p) \,.\, d(a,X)^{p} \,. \qquad (2.2.4)$$

Désignons toujours par A_i les champs A_i prolongés par le champ nul sur X. Pour montrer que A_i est le champ d'une fonction de classe C^∞ sur Ω, il faut montrer (Malgrange [1]) que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe un module de continuité β tel que :

$$\forall\, a \in Y \cap K,\ \forall\, b \in Y \cap K,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n :$$

$$|T_a^m A_i(x) - T_b^m A_i(x)| \leq (|a-x|^m + |b-x|^m) \quad \beta(|a-b|).$$

Nous distinguerons trois cas. Dans chacun d'eux, on peut déterminer un tel module de continuité :

1) a et b appartiennent à $(Y-X) \cap K$ et $d(a,b) \leq C_3\, d(a,X)^{2\alpha}$ où C_3 est une constante > 0 telle que

$$C_3\, d(a,X)^{2\alpha} \leq C'.C_1\, d(a,X)^{\alpha}.\inf(C_1\, d(a,X)^{\alpha}, d(a,X)) \leq C'\,|\Delta(a)|\,\rho_a$$

(on suppose $\alpha \geq 1$, ce qui est évidemment toujours possible).
Alors, d'après 1.7, $b \in \mathcal{V}_a$. Sur $\mathcal{V}_a \cap X$, le champ A_i est celui de la fonction $A_{a,i}$. Il existe alors une constante $H_1 > 0$ telle que :

$$|T_a^m A_i(x) - T_b^m A_i(x)| \leq H_1(|a-x|^m + |b-x|^m)\ |a-b|\ |A_{a,i}|_{m+1}^{\mathcal{V}_a}$$

et d'après (2.2.4), $|A_{a,i}|_{m+1}^{\mathcal{V}_a}$ est borné quand a décrit $(Y-X) \cap K$.

2) Les points a et b appartiennent à $(Y-X) \cap K$ et $d(a,b) \geq C_3\, d(a,X)^{2\alpha}$. On voit facilement qu'il existe une constante C_4 telle que :

$$d(a,b) \geq C_4\, d(b,X)^{2\alpha} \quad .$$

D'après (2.2.4), il existe pour tout entier p une constante H(p) telle que :

$$|T_a^m A_i(x) - T_b^m A_i(x)| \leq |T_a^m A_i(x)| + |T_b^m A_i(x)|$$

$$\leq H(p)((1+|a-x|^m)\ d(a,X)^p + (1+|b-x|^m)\, d(b,X)^p)$$

$$\leq H(p)\left(\sup\left(\frac{1}{C_3}, \frac{1}{C_4}\right)\right)^{\frac{p}{2\alpha}} (2+|a-x|^m + |b-x|^m)\ |a-b|^{p/2\alpha}$$

et il suffit de prendre $p > 2\alpha(m+1)$.

3) Si a ou b appartient à $X \cap K$, l'un des deux termes de la différence $|T_a^m A_i(x) - T_b^m A_i(x)|$ est nul et on majore l'autre comme dans le 2ème cas.

Théorème 2.3 : Supposons (en plus des hypothèse $(\mathcal{H})$) que, $\forall\, x \in V(I)$, T_x ne soit pas diviseur de zéro dans l'anneau $\mathfrak{J}_x | T_x I$. Alors, si I' est un idéal fermé, l'idéal I est fermé.

Preuve : Soit $f \in \bar{I}$. Puisque $\bar{I} \subset \bar{I}' = I'$, on a

$$f = \sum_{i=1}^{s} g_{i,1} \cdot \varphi_i + \psi_1 \delta$$

avec $g_{i,1} \in \mathcal{E}(\Omega)$, $\psi_1 \in \mathcal{E}(\Omega)$. Pour tout $x \in \Omega$, on a :

$$T_x f = \sum_{i=1}^{s} T_x g_{i,1} \cdot T_x \varphi_i + T_x \psi_1 \cdot T_x \delta$$

d'où $T_x \psi_1 \cdot T_x \delta \in T_x I$. D'après l'hypothèse : $T_x \psi_1 \in T_x I$, et $\psi_1 \in \bar{I} \subset I'$, d'où :

$$f = \sum_{i=1}^{s} (g_{i,1} + \delta \cdot g_{i,2})\, \varphi_i + \psi_2\, \delta^2$$

avec $g_{i,j}$, $\psi_2 \in \mathcal{E}(\Omega)$. En itérant ce raisonnement, on obtient :

$$f = \sum_{i=1}^{s} \Big(\sum_{j=0}^{p} \delta^j \cdot g_{i,j+1} \Big) \varphi_i + \psi_{p+1} \cdot \delta^{p+1} .$$

Soit K un compact contenu dans $V(\delta)$. Il existe des fonctions $\alpha_j \in \mathcal{E}(\Omega)$, $\alpha_j = 1$ au voisinage de K, telles que la série $\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j\, \delta^j\, g_{i,j+1}$ converge uniformément vers une fonction $g_{i,K} \in \mathcal{E}(\Omega)$, pour $i = 1,\dots,s$. Visiblement $f - \sum_{i=1}^{s} g_{i,K} \cdot \varphi_i \in \underline{m}_K^\infty$. Par une partition de l'unité, on construit alors des fonctions $g_i \in \mathcal{E}(\Omega)$ telles que $f - \sum_{i=1}^{s} g_i\, \varphi_i \in \underline{m}_{V(I')}^\infty$. D'après 2.1, $f - \sum_{i=1}^{s} g_i \cdot \varphi_i \in I$, d'où $f \in I$.
