J. Chazarain

Problèmes mixtes hyperboliques

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1970-1971), exp. nº 13, p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1970-1971____A13_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77
(633)

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 0 - 1 9 7 1

PROBLEMES MIXTES HYPERBOLIQUES

par J. CHAZARAIN

Exposé N° 13 | 13 Janvier 1971

On se propose dans ces deux exposés (•) d'expliquer la méthode utilisée par R. Sakamoto (née Arima) [6] pour démontrer l'inégalité d'énergie associée à un problème mixte hyperbolique.

Pour séparer les difficultés on commencera par traiter le cas particulier classique du problème de Cauchy.

§ 1. PROBLEME DE CAUCHY.

Soit $A(t,x,D_t,D_x)$ un opérateur strictement hyperbolique d'ordre m, ce qui signifie que l'équation en τ

$$A_m(t,x,\tau,\xi) = 0 \qquad \left(D_x = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

admet m racines réelles et distinctes pour $(t,x,\xi) \in \mathbb{R}^{n+1} \times (\mathbb{R}^n - \quad)$.

On suppose que A est à coefficients C^∞ et constants en dehors d'un compact de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Le problème de Cauchy consiste en étant donnée $f(t,x)$ trouver $u(t,x)$ telle que

$$Au = f$$

$$D_t^k u(0,x) = 0 \qquad k = 0,\dots,m-1 .$$

Le point crucial dans la démonstration de l'existence et de l'unicité de la solution u consiste à établir une inégalité a priori dite "inégalité d'énergie" :

<u>Théorème 1</u> : Il existe des constantes γ_o et C telles que

$$\gamma \, |u|^2_{m-1,\gamma} \le C \, |Au|^2_{o,\gamma}$$

pour $\gamma \ge \gamma_o$ et $u \in e^{\gamma t} H^m(\mathbb{R}^{n+1})$,

(•) Le 2ème exposé a eu lieu le 15/1/71 dans le cadre du Séminaire Brezi Lions.

où les normes $|\ |_{k,\gamma}$ dépendantes du paramètre γ sont définies par

$$|u|^2_{k,\gamma} = \sum_{j+|\alpha|=k} \int |e^{-\gamma t}\ \gamma^j\ D^\alpha u|^2\, dx\, dt\ .$$

Remarque : Pour la démonstration d'une telle inégalité on peut se permettre de calculer modulo des erreurs de l'ordre de $|u|^2_{m-1,\gamma}$ car on pourra toujours les absorber au premier membre en choisissant γ_0 assez grand. En particulier, on peut sans diminuer la généralité, supposer dans tout ce qui suivra que A est homogène d'ordre m.

Esquissons une méthode de démonstration de ce théorème. L'idée (due à Leray [5] à l'origine, puis simplifiée par Gärding [4]) consiste à trouver un opérateur Q d'ordre $m-1$ de façon à avoir une inégalité du type :

$$-\operatorname{Im} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} e^{-2\gamma t} Au\ .\ \overline{Qu}\, dx\, dt \geq C\ \gamma\ |u|^2_{m-1,\gamma} \qquad \text{pour} \quad \gamma \geq \gamma_1$$

d'où l'on déduit l'inégalité d'énergie en utilisant l'inégalité de Schwarz.

Pour formaliser les intégrations par parties, il est commode d'associer à une expression

$$Pu\ .\ \overline{Qu} = \Sigma\ a_{\alpha\beta}\ D^\alpha u\ \overline{D^\beta u}$$

un polynôme en $\zeta = (\tau,\xi)$ et $\overline{\zeta} = (\overline{\tau},\overline{\xi})$ défini par

$$F(\zeta,\overline{\zeta}) = \Sigma\, a_{\alpha\beta}\ \zeta^\alpha\ \overline{\zeta}^\beta = P(\zeta)\ \overline{Q}(\overline{\zeta})$$

(voir Hörmander [4] chap. 8). On pose aussi

$$G^{P,Q}(\zeta,\overline{\zeta}) = P(\zeta)\ \overline{Q}(\overline{\zeta}) - \overline{P}(\overline{\zeta})\ Q(\zeta)$$

et avec ces notations, on obtient facilement la proposition suivante :

<u>Proposition 1</u> : Si on peut écrire

$$G^{P,Q}(\zeta,\bar{\zeta})\Big|_{\xi=\bar{\xi}} = G_t(\zeta,\bar{\zeta})(\tau-\bar{\tau})$$

alors on a

$$-\operatorname{im}\int e^{-2\gamma t}\,Pu.\,\overline{Qu}\,dx\,dt = \gamma\int e^{-2\gamma t}\,G_t\,u\,\bar{u}\,dx\,dt + R(u)$$

où $|R(u)| \le C\,|u|^2_{m-1,\gamma}$ et degré $P=m$, degré $Q \le m-1$.

C'est simplement une intégration par parties en t

$$\int e^{-2\gamma t}\,D_t u\,\bar{v} - \int e^{-2\gamma t}\,u\,\overline{D_t v} = -2i\gamma\int e^{-2\gamma t}\,u\,\bar{u}$$

et on remarque que les erreurs sont au plus d'ordre $|u|^2_{m-1,\gamma}$.

Appliquons ce résultat avec $P=A$, $Q=\frac{\partial A}{\partial\tau}$, on trouve

$$G^{P,Q}(\tau,\bar{\tau}) = (\tau-\bar{\tau})\;G_t(\tau,\bar{\tau})$$

avec

$$G_t(\tau,\bar{\tau}) = \sum_{j=1}^{m}\prod_{k\neq j}(\tau-\tau_k(\xi))(\bar{\tau}-\tau_k(\xi))\;.$$

Les racines $\tau_k(\xi)$ étant réelles et distinctes, le symbole de G_t ne s'annule pas sur la sphère $|\xi|^2+|\tau|^2=1$, d'où par homogénéité

$$|G_t(\tau,\bar{\tau},\xi)| \ge C\,(|\tau|^2+|\xi|^2)^{m-1}$$

$$(\tau,\xi)\in\mathbb{C}\times\mathbb{R}^n\;.$$

Par un argument du type inégalité de Gårding on en déduit

$$\int e^{-2\gamma t}\,G_t\,u\,\bar{u}\,dx\,dt \ge C\,|u|^2_{m-1,\gamma} - C'\,|u|^2_{m-2,\gamma}\;,$$

d'où découle, compte-tenu de la proposition précédente, l'inégalité cherchée en prenant γ assez grand.

§ 2. PROBLEMES MIXTES HYPERBOLIQUES.

Il est commode de modifier un peu les notations. On prend $(t,x,y) \in \mathbb{R}^{n+1}$ avec $x \geq 0$, $y \in \mathbb{R}^{n-1}$, et on note (τ,ξ,η) les variables duales.

On suppose en plus que l'hyperplan $x=0$ n'est pas caractéristique pour l'opérateur strictement hyperbolique $A(t,x,y,D_t,D_x,D_y)$.

Le problème mixte consiste, étant données $f(t,x,y)$ et des $\varphi_j(t,y)$, à trouver $u(t,x,y)$ vérifiant

$$Au = f \quad \text{dans } \overline{\mathbb{R}}^{n+1}_+ = \{(t,x,y) \text{ avec } x \geq 0\}$$

$$D_t^k u\Big|_{t=o} = 0 \qquad k=0,\dots,m-1$$

$$B_j(t,y,D_t,D_x,D_y)u\Big|_{x=o} = \varphi_j(t,y) \qquad j=1,\dots,\mu .$$

Indiquons maintenant les hypothèses sur les opérateurs B_j. On sait que pour $(\tau,\eta) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^n$ et $\operatorname{im} \tau < 0$ l'équation en ξ

$$A(\tau,\xi,\eta) = 0$$

n'a pas de racines réelles; notons $\xi_1^+,\dots,\xi_\mu^+$ et $\xi^-_{\mu+1},\dots,\xi^-_m$ celles qui sont respectivement à partie imaginaire strictement positive et à partie imaginaire strictement négative. On montre facilement que l'entier μ est indépendant de (t,x,y,τ,η) et on prend précisément μ conditions au bord B_j. Pour $\operatorname{im}\tau < 0$ on définit le polynôme en ξ

$$A_+(\tau,\xi,\eta) = \prod_{j=1}^{\mu} (\xi - \xi_j^+)$$

et on montrera que A_+ se prolonge par continuité à $\operatorname{im}\tau \leq 0$. On est maintenant en mesure d'énoncer l'hypothèse sur les B_j (cette hypothèse a d'abord été introduite par Agmon [1]).

(H) | Les polynômes $B_j(\xi)$ sont de degré $\tau_j \leq m-1$, il y en a μ et pour tout $(t,0,y,\tau,\eta)$ fixé avec $\operatorname{im}\tau \leq 0$, ces polynômes sont indépendants modulo $A_+(\xi)$.

C'est une condition du type Lopatinski uniforme en τ car l'hypothèse analogue en considérant seulement $\operatorname{im}\tau < 0$ n'est pas suffisante en général. Il faut noter cependant que cette condition pour $\operatorname{im}\tau \leq 0$ exclue le cas du problème de Neumann pour l'équation des ondes et a fortiori le cas de la condition avec dérivée oblique [2].

Sous ces hypothèses Sakamoto démontre le

<u>Théorème 2</u> : Il existe des constantes C et γ_0 telles que

$$\gamma \,|u|^2_{m-1,\gamma} + \Sigma \langle D_x^j u\rangle^2_{m-i-j,\gamma} \leq C\,\Big(|Au|^2_{o,\gamma} + \sum_{j=1}^{\mu} \langle B_j u\rangle^2_{m-1-\tau_j,\gamma}\Big)$$

pour $\gamma \geq \gamma_0$ et $u \in e^{\gamma t} H^m(\overline{\mathbb{R}}^{n+1}_+)$,

où les normes $|\ |$ désignent les normes dans $\overline{\mathbb{R}}^{n+1}_+$ et les $\langle\ \rangle$ désignent les normes analogues sur l'hyperplan $x = 0$.

Commençons par indiquer la méthode utilisée. Pour le problème de Cauchy la quantité $I = -\operatorname{im}\int_{\mathbb{R}^{n+1}} e^{-2\gamma t} Au\, \overline{\frac{\partial A}{\partial \tau} u}$ majorait les termes d'ordres $\gamma\,|u|^2_{m-1,\gamma}$; ici on veut majorer aussi les termes sur le bord $x = 0$, pour cela on procèdera à une intégration par parties en x dans une intégrale de la forme $J = \operatorname{im}\int_{\overline{\mathbb{R}}^{n+1}_+} e^{-2\gamma t} Au \,.\, \overline{Su}$, l'opérateur S étant choisi de façon à ce que l'intégrale J permette de majorer les normes $\langle\ \rangle$ modulo des normes du type $|Au|$, $\langle B_j u\rangle$. Pour construire S on a besoin de considérer des opérateurs qui sont pseudo-différentiels en (t,y) et différentiels en x. Ces opérateurs P ont des symboles de la forme suivante

$$P(t,x,y,\tau,\xi,\eta) = \sum_{j=o}^{p} a_j(t,x,y,\tau,\eta)\, \Lambda^{p-j}\, \xi^j$$

où $\Lambda = (|\tau|^2 + |\eta|^2)^{1/2}$, (on pose $\tau = \sigma - i\gamma$) et $\mathcal{a}_j$ est un symbole de degré 0. On dit que $\mathcal{a}(t,x,y,\sigma,\gamma,\eta)$ est un symbole de degré 0 si $\mathcal{a}$ est C^∞ pour $\gamma > 0$, constante pour (t,x,y) en dehors d'un compact, homogène de degré 0 en (σ,γ,η) pour $\gamma > 0$ et vérifie des inégalités du type

$$\sup_{\substack{|\tau|^2 + |\eta|^2 = 1 \\ \gamma > 0}} |D^\alpha \mathcal{a}(\ .\ )| \leq C_\alpha$$

où D est une dérivation en n'importe quelle variable.
L'opérateur associé à $\mathcal{a}$ est défini par

$$\mathcal{a}(t,x,y,D_t - i\gamma, D_y)u = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{it\tau + iy.\eta} \mathcal{a}(t,x,y,\tau,\eta)\, \hat{u}(\tau,\eta)\, d\sigma\, d\eta$$

avec

$$\hat{u}(\tau,\eta) = \int e^{-it\tau - iy.\eta}\, u(t,y)\, dt\, dy \qquad \text{pour } u \in \mathcal{D}.$$

Pour ces opérateurs dépendants du paramètre γ on a un calcul sumbolique et les théorèmes que l'on espère, par exemple

$$<\mathcal{a}(D_t - i\gamma, D_y)u>_{s,\gamma} \leq C_s <u>_{s,\gamma} \quad ;$$

le point important est que C_s est indépendante de γ pour γ assez grand.

Pour faciliter les intégrations par parties en x, on généralise à ces opérateurs le formalisme des formes différentielles quadratiques. Ainsi à une expression de la forme

$$G u \bar{u} = \Sigma\, b_{ij}(t,x,y,D_t - i\gamma, D_y)\, \Lambda^{p-i} D_x^i u \,.\, \overline{\Lambda^{p-j} D_x^j u}$$

on associe le polynôme en ξ, $\bar{\xi}$

$$G(\xi,\bar{\xi}) = \Sigma\, b_{ij}(t,x,y,\tau,\eta)\, \Lambda^{2p-i-j} \xi^i \bar{\xi}^j \ .$$

Avec ces notations, on montre facilement la proposition suivante :

<u>Proposition 2</u> : On suppose que les symboles P et Q sont réels pour $\gamma = 0$; alors il existe des formes quadratiques différentielles G_t et G_x telles que

$$G^{P,Q}(\xi,\bar{\xi}) = -2i\,\gamma\, G_t^{P,Q}(\xi,\bar{\xi}) + (\xi-\bar{\xi})\, G_x^{P,Q}(\xi,\bar{\xi}) .$$

En utilisant les théorèmes sur l'adjoint et le commutateur pour cette classe d'opérateur pseudo-différentiel on en déduit l'analogue de la proposition 1 :

<u>Proposition 3</u> : On se donne des opérateurs P et Q respectivement d'ordre m et m-1 et à coefficients réels pour $\gamma = 0$. Alors on a

$$-\,\mathrm{im}\int_{x\geq 0} e^{-2\gamma t}\, Pu\,\overline{Qu}\; dt\, dx\, dy = \gamma(G_t^{P,Q} u\,\bar{u})_{o,\gamma} + \langle G_x^{P,Q} u\,\bar{u}\rangle_{o,\gamma} + R(u)$$

où R(u) désigne des termes que l'on peut majorer par $|u|^2_{m-1,\gamma}$ et $|\Lambda^{-1} u|^2_{m,\gamma}$.

(On a posé $(G_t^{P,Q} u\,\bar{u})_{o,\gamma} = \int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} e^{-2\gamma t}\, G_t u\,\bar{u}$ et $\langle G_x^{P,Q} u\,\bar{u}\rangle_{o,\gamma} = \int_{x=o} e^{-2\gamma t}\, G_x u\,\bar{u}$).

Avant d'indiquer la construction du symbole de S, on a besoin d'introduire certains polynômes en ξ.
Pour abréger, on pose $X = (t,x,y,\sigma,\gamma,\eta) \in K \times S_n$ où K est un compact de $\mathbb{R}^{n+1}$ en dehors duquel les coefficients sont constants et $S_n = \{(\sigma,\gamma,\eta)\;;\; \sigma^2+\gamma^2+|\eta|^2 = 1$ et $\gamma \geq 0\}$. La construction du symbole se fera localement et par raison d'homogénéité il suffit de se restreindre à S_n. Il faut distinguer les points X pour lesquels $\gamma > 0$ de ceux notés X_o pour lesquels $\gamma = 0$. Commençons par nous placer en un point X_o, on peut toujours écrire la factorisation de $A(X_o,\xi)$ sous la forme

$$A(X_o,\xi) = \underbrace{\prod_{j=1}^{\ell} (\xi - \xi_j^o)^{m_j}}_{\text{(racines réelles)}}\; \underbrace{\prod_{j=1}^{s} (\xi - \xi_j^+) \prod_{j=1}^{s} (\xi - \xi_j^-)}_{\text{(racines imaginaires et leurs conjuguées)}}$$

avec $m_1 + \ldots + m_\ell + 2s = m$. Ce que l'on écrit avec des notations évidentes

$$A(X_o,\xi) = \prod_{j=1}^{\ell} A_j(X_o,\xi)\, A_o^+(X_o,\xi)\, A_o^-(X_o,\xi) \;,$$

les racines de A_j étant différentes de celles de A_k pour $k \neq j$; on aura donc dans un voisinage $U(X_o)$ de X_o une factorisation encore de la forme

$$A(X,\xi) = \prod_{j=1}^{\ell} A_j(X,\xi)\, A_o^+(X,\xi)\, A_o^-(X,\xi)$$

où $A_j(X,\xi)$ est un polynome de degré m_j qui peut toujours se mettre sous la forme

$$A_j(X,\xi) = (\xi-\xi_j(X))^{m_j} + a_2^j(X)(\xi-\xi_j(X))^{m_j} + \ldots + a^j_{m_j}(X)$$

en posant $\xi_j(X) = (-1)^{m_j}$ la moyenne de racines réelles(♦); notons m_j^+ (respec. m_j^-) le nombre de racines à partie imaginaire positive (respec. négative); on vérifie alors que le polynôme $A_+(X,\xi)$ défini seulement pour $\gamma > 0$ se prolonge par continuité à $\gamma = 0$ où il vaut à la limite

$$A_+(X_o,\xi) = \prod_{j=1}^{\ell} (\xi-\xi_j^o)^{m_j^+}\, A_o^+(X_o,\xi) \;.$$

Introduisons les polynômes suivants

$$F_{jk}(X_o,\xi) = (\xi - \xi_j^o)^{m_j-k}\, \frac{A}{A_j}(X_o,\xi) \qquad k = 1,\ldots,m_j^- \;;\; j = 1,\ldots,1$$

$$E_h(X,\xi) = \xi^{s-h}\, \frac{A}{A_o^-}(X,\xi) \qquad h = 1,\ldots,s \;.$$

On a le

Lemme 1 : Les polynômes en ξ (F_{jk}, E_h, B_j) forment une base des polynômes de degré $\leq m-1$.

En effet, les $B_j(\xi)$ sont indépendants mod. $A_+(X_o,\xi)$ par hypothèse et d'autre part les polynômes F_{jk}, E_h sont divisibles par A_+, enfin

(♦) Pour $\gamma > 0$, $A(X,\xi)$ n'a pas de racines réelles on constate que ces derniers sont indépendants et en nombre $m-\mu$.

On déduit de ce lemme l'inégalité suivante

(1) $$|z|^2 \leq C \ \Sigma |F_{jk}(X_o, z)|^2 + |E_h(X_o, z)|^2 + |B_j(X_o, z)|^2$$

où l'on a remplacé partout ξ^i par $z_i \in \mathbb{C}$ et posé $z=(z_o,\dots,z_{m-1})$. Les termes en $|E_h|^2$ seront faciles à majorer, par contre c'est pour se débarrasser des termes en $|F_{jk}|^2$ que l'on va utiliser une intégrale du type J. Indiquons maintenant la construction du symbole S qui sera donc construit de façon à ce que $G_x^{A,S}(X_o, z, \bar{z})$ permette d'obtenir une majoration des termes $|F_{jk}|^2$. On prend $S(X,\xi)$ de la forme $\Sigma A'_j \frac{A}{A_j}(X,\xi)$ où le symbole A'_j est défini ci-après. Notons auparavant que

$$G^{A,S} = \Sigma\, G^{A, A'_j \frac{A}{A_j}} = \Sigma\, G^{A_j \cdot \frac{A}{A_j},\, A'_j \cdot \frac{A}{A_j}}$$

d'où l'on déduit facilement que

$$G^{A,S}(X,\xi,\bar{\xi}) = \Sigma\, G^{A_j, A'_j}(X,\xi,\bar{\xi}) \frac{A}{A_j}(\xi) \cdot \overline{(\frac{A}{A_j})}(\bar{\xi}) \quad ,$$

ce qui montre qu'il suffira de considérer G^{A_j, A'_j}.

Sakamoto pose

$$A'_j(X,\xi) = \lambda^{-2m_j^-} \Big[\sum_{k=1}^{m_j^-} C_k \lambda^{2k} Q_k(X,\xi) - C_o \lambda^{2-\alpha j} Q_o(X,\xi) \Big]$$

où λ est un paramètre >0, $\alpha_j = 2[m_j(2m_j-3)-(m_j-2)(m_j-1)]$ (je n'ai pas compris la raison de ce choix, en dehors du fait que cela marche !) et C_k des constantes >0 déterminées par la suite, et enfin

$$Q_k(X,\xi) = (\xi - \xi_j(X))^{m_j-(2k-1)} \qquad k = 1,\dots,m_j^-$$

$$Q_o(X,\xi) = (\tau - \sigma_o)(\xi - \xi_j(X))^{m_j-2} \ .$$

En calculant explicitement les expressions $G_x^{A_j, A'_j}$ et $G_t^{A_j, A'_j}$ on constate que l'on peut déterminer des constantes C_k de façon à avoir

$$\begin{cases} G_x^{A_j,A'_j}(X_o,z,\bar{z}) \geq |z_{m_j-1}|^2+\dots+|z_{m_j-m_j^-}|^2 - C\lambda^2(|z_{m_j-m_j^--1}|^2+\dots+|z_o|^2) \\ G_t^{A_j,A'_j}(X_o,\xi,\xi) \leq C\,\lambda^2 \end{cases}$$

où z_k est à la place du monôme $(\xi-\xi_j^o)^k \quad k=0,\dots,m_j-1$;
d'où l'on déduit d'après la définition des F_{jk}

$$\begin{cases} G_x^{A,S}(X_o,z,\bar{z}) \geq \sum\limits_{j=1}^{l}\sum\limits_{k=1}^{m_j}|F_{jk}(z)|^2 - C\,\lambda^2\,|z|^2 \\ G_t^{A,S}(X_o,\xi,\xi) \leq C\,\lambda^2(\xi^2+1)^{m-1} \end{cases}$$

où cette fois z_k est à la place du monôme $\xi^k \quad k=0,\dots,m-1$.
Enfin, pour contrôler les termes dans $\overline{\mathbb{R}}_+^{n+1}$ on ajoute $\frac{\partial A}{\partial \tau}$, soit finalement

$$A' = S\cdot\lambda\,\frac{\partial A}{\partial\tau}$$

et l'on fixe maintenant $\lambda>0$ assez petit de façon à avoir

$$(2)\qquad \begin{cases} G_x^{A,A'}(X_o,z,\bar{z}) \geq \Sigma\,\Sigma\,|F_{jk}|^2 - C\,\lambda\,|z|^2 \\ -\,G_t^{A,A'}(X_o,\xi,\xi) \geq C\,\lambda\,(\xi^2+1)^{m-1}\,. \end{cases}$$

En combinant (1) et (2) en X_o, puis en utilisant un argument de continuité, on obtient , pour X dans un voisinage $U(X_o)$,

$$\begin{cases} C\,|z|^2 \leq G_x^{A,A'}(X,z,\bar{z}) + \Sigma\,|E_j(X,z)|^2 + \Sigma\,|B_j(X,z)|^2 \\ C(\xi^2+1)^{m-1} \leq -\,G_t^{A,A'}(X,\xi,\xi)\,. \end{cases}$$

Ensuite on recolle les symboles au moyen d'une partition de l'unité dans une région de la forme $(K\times S_n)\cap(0\leq\gamma\leq\delta)$ pour un certain $\delta>0$. En prenant un symbole $\alpha(\sigma,\gamma,\eta)$ de degré zéro dont la restriction à S_n est nulle pour

$\gamma \geq \delta$ et identique à un pour $\gamma \leq \delta/2$ on obtient par un raisonnement du type inégalité de Gårding:

Proposition 4 : Il existe C et γ_o telles que

$$\gamma \, |\alpha u|^2_{m-1} + \sum_{j=o}^{m-1} \langle D_x^j \alpha u \rangle^2_{m-1-j,\gamma} \leq C \, [\, |Au|^2_{o,\gamma} + \Sigma \langle B_j u \rangle^2_{m-1-\tau_j,\gamma}$$

$$+ \Sigma \langle E_j u \rangle^2_{j-1,\gamma} + |u|^2_{m-1,\gamma}\,]$$

pour $\gamma \geq \gamma_o$.

Plaçons-nous maintenant dans la zone où $\gamma \geq \delta/2$ que Sakamoto appelle "zone elliptique". En effet $A(X,\xi)$ n'a aps de racines réelles et par conséquent on a $A = A_+ \cdot A_-$. En posant $E_k(X,\xi) = \xi^{m-\mu-k} A_+$ $\quad k = 1, \ldots, m-\mu$, on vérifie que les polynômes (E_k, B_j) forment une base des polynômes en ξ de degré $\leq$ m-1. On montre facilement que l'on a

$$\begin{cases} C\,|z|^2 \leq \Sigma \, |E_k(X,z)|^2 + \Sigma \, |B_j(X,z)|^2 \\ C(\xi^2+1)^m \leq |A(X,\xi)|^2 \end{cases}$$

d'où l'on déduit, en utilisant la technique des problèmes elliptiques, la

Proposition 5 : Il existe C et γ_o telles que

$$(4) \quad |\beta u|^2_{m,\gamma} + \sum_{j=o}^{m-1} \langle D_\alpha^j \beta u \rangle^2_{m-j-1/2,\gamma} \leq C \, [\, |Au|^2_{o,\gamma} + \Sigma \langle B_j u \rangle^2_{m-\tau_j-1/2,\gamma}$$

$$+ \Sigma \langle E_k u \rangle^2_{k-1/2,\gamma} + |u|^2_{m-1,\gamma}\,]$$

où $\beta = 1-\alpha$ et $\gamma \geq \gamma_o$.

Reste enfin à majorer les termes du type $\langle E_h u \rangle^2_{h-1,\gamma}$. Pour cela on remarque que le polynôme $A_o^-(X,\xi)$ ayant ses racines à partie imaginaire strictement négative, l'inégalité suivante a lieu

$$\int_0^\infty |A_o^-(X,D_x)\,v(x)|^2 dx \geq C \sum_{j=o}^{s} \int_o^\infty |D_x^j\,v(x)|^2\,dx \quad \text{pour } u \in H^s(\overline{\mathbb{R}}^+)$$

et en appliquant ceci à $v(x) = E_h(X,D_x)u = D_x^{s-h}\,\frac{A}{A_o^-}(X,D_x)$, on trouve, compte-tenu du théorème des traces

(5) $\quad \langle E_h\,u\rangle^2_{h-1,\gamma} \leq C\,(|\Lambda u|^2_{o,\gamma} + |u|^2_{m-1,\gamma}) \qquad k = 1,\ldots,s$.

On fait un raisonnement analogue pour majorer les termes

(5)' $\quad \langle E_k\,u\rangle^2_{k-1/2,\gamma} \leq C\,(|A\,u|^2_{o,\gamma} + |u|^2_{m-1,\gamma}) \qquad k = 1,\ldots,m-\mu$.

D'où finalement, en combinant les inégalités (3), (4), (5), (5)', on trouve l'inégalité du théorème 2.

Signalons pour terminer que Sakamoto démontre dans [7] un théorème existence en utilisant un problème transposé mais en se plaçant toujours dans un demi-espace $x \geq 0$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. Agmon : Problèmes mixtes pour les équations hyperboliques d'ordre supérieur, Colloque sur les équations aux dérivées partielles, CNRS (1962).

[2] J. Chazarain : Problèmes de Cauchy abstraits et applications à quelques problèmes mixtes, J. of Funct. Anal. (1971).

[3] L. Gårding : Solution directe du problème de Cauchy pour les équations hyperboliques, Proc. Coll. Inter. du CNRS Nancy (1956).

[4] L. Hörmander : Linear Partial Differential Operators, Springer (1963).

[5] J. Leray : Hyperbolic Differential Equations, Inst. for Adv. Study, Princeton (1952).

[6] R. Sakamoto : Mixed Problems for Hyperbolic Equations (I), J. of Math. Kyoto Univ. vol. 10 n°2 (1970).

[7] R. Sakamoto : Id. (II), J. of Math. Kyoto Univ. Vol. 10 n°3 (1970).

Exposé XIII

E R R A T A

Pages	Au lieu de :	Lire :
XIII.1 Ligne 10	$(t,x,\xi)\in\mathbb{R}^{n+1}\ (\mathbb{R}^n-\quad)$	$(t,x,\xi)\in\mathbb{R}^{n+1}\ (\mathbb{R}^n-\{0\})$
XIII.1 Ligne 2 du bas	Brezi	Brezis-
XIII.5 Ligne 1	$\tau_j \le m-1$	$r_j \le m-1$
XIII.5 Ligne 11	$\gamma\lvert u\rvert^2_{m-1,\gamma}+\Sigma\langle D_x^j u\rangle^2_{m-i-j,\gamma}\le C\,(\lvert Au\rvert^2_{o,\gamma}+\sum_{j=1}^{\mu}\langle B_j u\rangle^2_{m-1-\tau_j,\gamma})$	
lire	$\gamma\lvert u\rvert^2_{m-1,\gamma}+\Sigma\langle D_x^j u\rangle^2_{m-1-j,\gamma}\le C\,(\lvert Au\rvert^2_{o,\gamma}+\sum_{j=1}^{\mu}\langle B_j u\rangle^2_{m-1-r_j,\gamma})$	
XIII.6 Ligne 2	$\mathfrak{a}(t,x,y,\sigma,\gamma,\tau)$	$\mathfrak{a}(t,x,y,\sigma,\gamma,\eta)$
XIII.6 Ligne 4	(σ,γ,r)	(σ,γ,η)
XIII.8 Ligne 8	$+a_2^j(X)(\xi-\xi_j(X))^{m_j}$	$+a_2^j(X)(\xi-\xi_j(X))^{m_j-2}$
XIII.8 Ligne 9	racines réelles ; (•)	racines (•). Notons
XIII.9 Ligne 6 du bas	$2[m_j(2m_j-3)$	$2[m_j^-(2m_j-3)$
XIII.10 Ligne 6	$\sum_{j=1}^{1}\sum_{k=1}^{m_j}$	$\sum_{j=1}^{1}\sum_{k=1}^{m_j^-}$

.../...

Errata Sémininaire Goualouic-Schwartz, N° XIII (suite)

Pages	Au lieu de :	Lire :
XIII.11 Ligne 4	$+ \Sigma \langle B_j u \rangle^2_{m-1-\tau_j,\gamma}$	$+ \Sigma \langle B_j u \rangle^2_{m-1-r_j,\gamma}$
XIII.11 Ligne 8	aps	pas
XIII.11 Ligne 6 du bas	$+ \Sigma \langle B_j u \rangle^2_{m-\tau_j-1/2,\gamma}$	$+ \Sigma \langle B_j u \rangle^2_{m-r_j-1/2,\gamma}$
