Séminaire Équations aux dérivées partielles – École Polytechnique

M. Derridj

Sur une classe d'opérateurs différentiels hypoelliptiques à coefficients analytiques

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1970-1971), exp. nº 12, p. 1-6

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1970-1971____A12_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77
(633)

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - S C H W A R T Z 1 9 7 0 - 1 9 7 1

SUR UNE CLASSE D'OPERATEURS DIFFERENTIELS HYPOELLIPTIQUES A COEFFICIENTS ANALYTIQUES

par M. DERRIDJ

Exposé N° 12

6 Janvier 1971

Le but de ce travail est d'énoncer un théorème sur les champs de vecteurs analytiques et de l'appliquer à l'étude de l'hypoellipticité d'une classe d'opérateurs différentiels du second ordre.

Le théoreme sur les champs de vecteurs analytiques que nous énoncerons est un cas particulier d'un théorème de Nagano [3]. Nous donnerons une démonstration assez simple de ce théorème, qui a été aussi démontré par Zachmanoglou [5].

Ce théorème nous permettra de donner une condition nécessaire et suffisante pour que les opérateurs de la forme $P = \sum_{j=1}^{r} X_j^2 + X_0 + c$, vérifiant certaines hypothèses, soient hypoelliptiques. Ces opérateurs ont été introduits et étudiés par L. Hörmander qui a donné une condition suffisante d'hypoellipticité pour ces opérateurs. Rappelons aussi que Oleinik et Radkévitch [4] ont donné une condition, moins restrictive, d'hypoellipticité. Nous verrons que les opérateurs d'Hörmander à coefficients analytiques, vérifiant une hypothèse supplémentaire naturelle, sont hypoelliptiques si et seulement si la condition de Hörmander est vérifiée.

NOTATIONS ET DEFINITIONS

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Si A_1 et A_2 sont deux champs de vecteurs dans Ω, on définit leur crochet par

$$[A_1 , A_2] = A_1 A_2 - A_2 A_1 \quad ; \quad A_1 \text{ et } A_2 \text{ sont de classe}$$

C^1.

On introduit aussi la notation

$$\operatorname{ad} A_1 (A_2) = [A_1 , A_2].$$

Soit $\{A_i\}_{i \in \mathfrak{I}}$ une famille de champs de vecteurs définis dans Ω. Pour tout multi-indice $I = (i_1, \ldots, i_k)$, $i_j \in \mathfrak{I}$, on définit le champ de vecteurs A_I

par : (les champs A_i sont de classe C^∞)

$$A_I = \operatorname{ad} A_{i_1} \dots \operatorname{ad} A_{i_{k-1}} (A_{i_k}) .$$

<u>Définition</u> : On dit que l'algèbre de Lie $\mathcal{L}(A_i)$ engendrée par la famille de champs de vecteurs $\{A_i\}_{i\in\mathfrak{J}}$, est de rang k en un point $x_o \in \Omega$, si l'espace vectoriel engendré par tous les vecteurs $A_I(x_o)$ est de dimension k.

<u>Théorème</u> : Soit $\{A_i\}_{i=1,\dots,p}$ une famille de champs de vecteurs à coefficients analytiques dans Ω. Si $\mathcal{L}(A_i)$ est de rang k en un point $x_o \in \Omega$, il existe, au voisinage de x_o, une variété analytique V de dimension k passant par x_o, telle que les champs A_i sont tangents à V.

<u>Démonstration</u> : Remarquons de suite que si $k=0$ ou $k=n$, il n'y a rien à démontrer, et dans ce cas le théorème est vrai même si les coefficients des champs A_i sont seulement de classe C^∞. En particulier si $n=1$, le théorème est vrai. Nous allons faire une récurrence sur la dimension de l'espace.

Supposons le théorème vrai, si la dimension de l'espace est égale à $n-1$.

Soit alors $\{A_i\}_{i\in I}$ une famille de champs de vecteurs telle que $\mathcal{L}(A_i)$ soit de dimension $1<k<n$ au point x_o. Nous pouvons supposer $x_o = 0$, et les champs A_i développables en série dans un voisinage de 0, ce qui est le cas si le nombre de champs de vecteurs est fini.

Soit $(x_1,\dots,x_n)$ un système de coordonnées. Par un changement de coordonnées analytique, nous pouvons supposer que $A_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}$ dans un voisinage de 0.

Les champs A_i étant analytiques, nous avons

$$A_i = \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_1} \quad \sum_{p\geq 0} x_1^p A_{i,p} \qquad |x_1| < x_1^o$$

où $A_{i,p}$ sont des champs de vecteurs, en les variables $(x_2,\dots,x_n)$ donc dans $\mathbf{R}^{n-1}$.

Il est aisé de voir que l'algèbre de Lie $\mathcal{L}(A_{i,p})$ est de rang $k-1$ en 0.

Donc, d'après l'hypothèse de récurrence, il existe, au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^{n-1}$ une variété V_1 de dimension $k-1$ telle que tous les champs $A_{i,p}$ sont tangents à V_1.

Prenons alors $V =]-x_1^o, x_1^o[\times V_1$. Nous voyons facilement que les champs de vecteurs A_i sont tangents à V, et V est bien une variété analytique de dimension k.

Remarque : Le théorème est faux si les champs A_i ne sont pas analytiques. En effet soient, dans $\mathbb{R}^2$, les deux champs

$$A_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} \qquad A_2 = \varphi(x_1)\frac{\partial}{\partial x_2}$$

et

$$\varphi(x_1) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x_1^2}} & x_1 > 0 \\ 0 & x_1 \leq 0 \end{cases} .$$

Le rang de $\mathcal{L}(A_1, A_2)$ est égal à 1 à l'origine. Visiblement il n'y a pas de variété de dimension 1 vérifiant la conclusion du théorème.

Nous allons appliquer le théorème précédent à l'étude de l'hypoellipticité d'une classe d'opérateurs différentiels.

Théorème : Soit P un opérateur différentiel du second ordre de la forme :

$$P = \sum_{j=1}^{r} X_j^2 + X_o + c$$

défini dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, à coefficients analytiques. Nous supposons que les champs $X_o, X_1, \ldots, X_r$ ne s'annulent simultanément en aucun point de Ω.

Une condition nécessaire et suffisante pour que P soit hypoelliptique dans Ω est que $\mathcal{L}(X_o, X_1, \ldots, X_r)$ soit de rang n dans Ω.

<u>Démonstration</u> : D'après un théorème de Hörmander [2], si $\mathcal{L}(X_o, X_1, \dots, X_r)$ est de rang n en tout point de Ω, alors P est hypoelliptique dans Ω. Supposons que $\mathcal{L}(X_o, X_1, \dots, X_r)$ est de rang $k < n$ en un point $x_o \in \Omega$. On a $k > 1$, d'après l'hypothèse faite sur P. D'autre part, on peut prendre $x_o = 0$.

Il existe une variété V de dimension k telle que les champs $X_o, X_1, \dots, X_r$ soient tangents à V. En effectuant un changement de coordonnées analytique, nous pouvons supposer que V est un plan. Si $(x_1, \dots, x_n)$ est un système de coordonnées, supposons que $(x_1, \dots, x_k)$ est un système de coordonnées dans V.

Chaque champ de vecteurs X_j, $j \in \{0, 1, \dots, r\}$ sera écrit

$$X_j = Y_j + Z_j \quad ; \quad Y_j = \sum_{i=1}^{k} a_{i,j}(x,y) \frac{\partial}{\partial x_j} \quad ; \quad Z_j = \sum_{i=k+1}^{n} a_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i}$$

et

$$x = (x_1, \dots, x_k) \qquad\qquad y = (x_{k+1}, \dots, x_n)$$

alors Z_j s'annule sur V ; $j = 0, 1, \dots, r$.

Nous allons montrer qu'il existe une distribution non nulle v à support dans V telle que $Pv = 0$.

Soit $\delta(y)$ la masse unité sur V. Nous cherchons une fonction analytique $u(x)$ telle que $v = \delta.u$ soit la distribution désirée. Dans les calculs $\delta(y)$ sera notée δ

$$X_j(\delta.u) = (Y_j u).\delta + u.(Z_j \delta)$$

mais

$$Z_j \delta = [-\sum_{i=k+1}^{n} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}(x,0)]\,\delta .$$

Donc on obtient :

$$X_j(\delta u) = \delta .[\sum_{i=1}^{k} a_{ij}(x,0) \frac{\partial u}{\partial x_i} - u \sum_{i=k+1}^{n} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}(x,0)] .$$

$$X_j^2(\delta.u) = Y_j(X_j(\delta.u)) + Z_j(X_j(\delta.u)) \quad , \quad \text{soit}$$

$$Y_j(X_j(\delta.u)) = \delta.\left[\sum_{p=1}^{k} a_{pj}(x,0)\frac{\partial}{\partial x_p}\left(\sum_{i=1}^{k} a_{ij}(x,0)\frac{\partial u}{\partial x_i} - u\sum_{i=k+1}^{n}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}(x,0)\right)\right]$$

$$Z_j(X_j(\delta u)) = -\delta\left[\left(\sum_{p=k+1}^{n}\frac{\partial a_{pj}}{\partial x_p}(x,0)\right)\left(\sum_{i=1}^{k} c_y(x,0)\frac{\partial u}{\partial x_i} - u\sum_{i=k+1}^{n}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}(x,0)\right)\right].$$

Nous pouvons finalement écrire :

$$P(u.\delta) = \delta.\left[\sum_{i,p=1}^{k}\theta_{ip}(.)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_p} + \sum_{i=1}^{k}\theta_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + \theta_o(x)u\right].$$

$$\theta_{ip}(x) = \sum_{j=1}^{r} a_{pj}(x,0)\,a_{ij}(x,0)$$

$$\theta_i(x) = \sum_{j=1}^{r}\left[\sum_{p=1}^{k} a_{pj}(x,0)\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_p}(x,0) - 2\left(\sum_{p=k+1}^{n}\frac{\partial a_{pj}}{\partial x_p}(x,0)\,a_{ij}(x,0)\right)\right] + a_{io}(x,0)$$

$$\theta_o(x) = \sum_{j=1}^{r}\sum_{p=1}^{k}\sum_{i=k+1}^{n} a_{pj}(x,0)\frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial x_i \partial x_p}(x,0) + \sum_{j=1}^{r}\left(\sum_{p=k+1}^{n}\frac{\partial a_{pj}}{\partial x_p}(x,0)\right)^2 - \sum_{p=k+1}^{n}\frac{\partial a_{po}}{\partial x_p}(x,0)$$

$$+ c(x,0).$$

Soit ω un voisinage de 0 dans V. Si dans ω il y a un champ X_j avec $j \in \{1,\dots,r\}$ non nul, alors dans ce voisinage, on a

$$\theta_{ii}(x) > 0 \quad \text{pour un indice } i \in \{1,\dots,k\}$$

alors le théorème de Cauchy-Kovalevska donne l'existence d'une fonction analytique u telle que $P(u.\delta) = 0$.

Si tous les champs X_j $j \in \{1,\dots,r\}$ sont nuls dans ω, alors le champ X_o est non nul dans ω.

Mais dans ce voisinage ω l'équation devient :

$$P(u.\delta) = \delta.\sum_{i=1}^{k}\theta_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + \theta_o(x)$$

$$\theta_i(x) = a_{i,o}(x,0)$$

$$\theta_o(x) = \sum_{j=1}^{r}\left(\sum_{p=k+1}^{n}\frac{\partial a_{pj}}{\partial x_p}(x,0)\right)^2 - \sum_{p=k+1}^{n}\frac{\partial a_{po}}{\partial x_p}(x,0) + c(x,0)$$

il existe un indice i tel que $a_{i,o} \neq 0$ dans ω.
Donc, dans ce cas aussi, le théorème de Cauchy-Kovalevska donne l'existence d'une fonction u analytique telle que $P(u.\delta) = 0$.

Donc P n'est pas hypoelliptique dans Ω.

<u>Remarque 1</u> : Si les coefficients de P ne sont pas tous analytiques, alors la condition de Hörmander n'est pas nécessaire d'après un résultat de O. A. Oleinik et Rakévitch [4].

<u>Remarque 2</u> : Soit $P = \sum_{j=1}^{r} X_j^2 + c$. Si la condition de Hörmander est vérifiée, nous savons d'après un travail de J. M. Bony [1] qu'on a l'unicité du problème de Cauchy. La démonstration du théorème nous montre que si la condition de Hörmander n'est pas vérifiée, on n'a pas unicité du problème de Cauchy, si les champs X_j ne s'annulent simultanément en aucun point de Ω.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. M. Bony : Principe du maximum et inégalité de Harnack pour les opérateurs elliptiques dégénérés, Séminaire de théorie du potentiel 1967-68 n° 10.

[2] L. Hörmander : Hypoelliptic second order differential equations, Acta Math. Uppsala t.119 (1967), p.147-171.

[3] T. Nagano : Linear differential systems with singularities and an application to transitive Lie algebras, J. of Math. Soc. of Japan 18, 398-404 (1966).

[4] O. A. Oleinik, E. V. Radkevitch : Equations du second ordre à forme caractéristique non négative, Itogi Nauki VINITI AN SSSR, Moscou 1971.

[5] E. C. Zachmanoglou : Propagation of zeros and uniqueness in the Cauchy problem for first order partial differential equations, Arch. for Rat. Mech. and An. 38 (1970) p.178-188.
