Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

J. M. Bony

Quasi-analyticité et unicité du problème de Cauchy pour les solutions d'équations aux dérivées partielles

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1970-1971), exp. n° 10, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1970-1971____A10_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77
(633)

SEMINAIRE GOULAOUIC-SCHWARTZ 1970-1971

QUASI-ANALYTICITE ET UNICITE DU PROBLEME DE CAUCHY POUR LES SOLUTIONS D'EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

par J. M. BONY

Exposé N° 10 9 Décembre 1970

Dans cet exposé, nous démontrons une extension du théorème de Holmgren sur l'unicité du problème de Cauchy, ainsi qu'un théorème de quasi-analyticité qui étend le résultat classique pour les opérateurs elliptiques. Les méthodes utilisées relèvent de la géométrie infinitésimale directe, après qu'on ait traduit le théorème de Holmgren en termes géométriques.

§ 1. NOTATIONS.

Nous considérerons dans tout cet exposé un opérateur différentiel P défini dans un ouvert connexe Ω de $\mathbb{R}^m$. Nous supposerons toujours que les coefficients de P sont analytiques. Soit p l'ordre de P et P_p sa partie principale.

$$P(x,\frac{\partial}{\partial x}) = \sum_{|\alpha|\leq p} a_\alpha(x) \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}$$

$$P_p(x,\frac{\partial}{\partial x}) = \sum_{|\alpha|=p} a_\alpha(x) \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \quad .$$

$P_p(x,\xi)$ est un polynôme homogène de degré p en ξ, dont les coefficients sont des fonctions analytiques de x.

Rappelons qu'une surface S de classe C^1 est dite caractéristique en un de ses points x, si, en désignant par n la normale en x à S, on a $P_p(x,n) = 0$.

Le théorème de Holmgren peut s'énoncer ainsi (voir [3]) :

Soit u une solution de $Pu=0$ et soit S une surface de classe C^1 non caractérisitique au point x_o. Alors, si u est nulle d'un côté de la surface S, on a $u=0$ au voisinage de x_o.

§ 2. ENONCE DES RESULTATS.

Rappelons que si $Q_1(x,\xi)$ et $Q_2(x,\xi)$ sont deux polynômes homogènes en ξ, à coefficients différentiables en x, on définit leur crochet de Poisson par :

$$[Q_1,Q_2](x,\xi) = \sum_i \frac{\partial Q_1}{\partial \xi_i}\frac{\partial Q_2}{\partial x_i} - \frac{\partial Q_2}{\partial \xi_i}\frac{\partial Q_1}{\partial x_i} \quad .$$

Dans le cas de champs de vecteurs, on obtient la définition classique du crochet (en identifiant le champ de vecteurs de composantes $a_1(x),\dots,a_m(x)$ à l'opérateur différentiel $a_1 \frac{\partial}{\partial x_1}+\dots+a_m \frac{\partial}{\partial x_m}$, et en lui associant le polynôme $a_1 \xi_1+\dots+a_m \xi_m$).

Définition 1 : Nous appellerons idéal caractéristique l'ensemble des polynômes $Q(x,\xi)$, homogènes en ξ, dont les coefficients sont des fonctions de x de classe C^∞, tels que Q s'annule sur les zéros réels de $P_p(x,\xi)$. Nous noterons K cet idéal.

Définition 2 : Nous noterons Lie(K) l'algèbre de Lie engendrée par K.

Pour que $R(x,\xi)$ appartienne à Lie(K), il faut et il suffit qu'il soit somme finie de termes du type :

$$\lambda(x,\xi)[Q_{i_1},[Q_{i_2},\dots,Q_{i_K}]\dots]$$

où les Q_{i_j} appartiennent à K.

Nous pouvons énoncer les résultats essentiels de cet exposé.

Théorème 1 (Quasi-analyticité) : Supposons que Lie(K) possède la propriété suivante : pour tout couple (x,ξ) tel que $\xi\neq 0$, il existe R appartenant à Lie(K) tel que $R(x,\xi)\neq 0$. Alors, si une solution u de $Pu=0$ est nulle au voisinage d'un point, elle est identiquement nulle.

Ce résultat, classique lorsque P est elliptique, est ainsi étendu au cas où, en un sens évident, Lie(K) est elliptique.

Théorème 2 (Unicité du problème de Cauchy) : Soit S une surface de classe C^1 contenant x_0, et telle qu'en ce point, il existe R appartenant à Lie(K) vérifiant $R(x,n)\neq 0$, en désignant par n la normale en x_0 à S. Soit u une solution de $Pu=0$, nulle d'un côté de S. Alors, u est nulle au voisinage de x_0.

L'énoncé est tout-à-fait analogue à celui du théorème de Holmgren, la condition sur S étant remplacée par la condition moins restrictive ci-dessus, exprimant que "S est non caractéristique par rapport à Lie(K)".

§ 3. EXEMPLES ET APPLICATIONS.

Avant de passer à la démonstration des théorèmes précédents, nous allons donner quelques applications de ceux-ci.

a) L'exemple type est celui d'un opérateur elliptique dégénéré du second ordre qui peut s'écrire sous la forme

$$Pu = \sum_{i=r}^{r} X_i^2 u + X_o u + c u$$

où les X_i sont des champs de vecteurs réels de classe C^∞. Alors, si $\mathrm{Lie}(X_1,\ldots,X_r)$ est de rang m en tout point, on a la propriété de quasi-analyticité.

b) De même, pour un opérateur du premier ordre $Pu = X_1 u + iX_2 u$, où les champs de vecteurs X_1 et X_2 sont à coefficients réels, si $\mathrm{Lie}(X_1,X_2)$ est de rang m en tout point, la quasi-analyticité est vérifiée.

c) Plus généralement, soient $Q_1,\ldots,Q_r$ des opérateurs différentiels de même ordre, tels que pour chaque couple (x,ξ) avec $\xi \neq 0$, il existe R appartenant à l'algèbre de Lie engendrée par leurs parties principales tel que $R(x,\xi) \neq 0$. Soit d'autre part $M(x,y_1,\ldots,y_r)$ un polynôme homogène en $y_1,\ldots,y_r$ dont le seul zéro réel est $y_1 = \ldots = y_r = 0$. Alors, tout opérateur différentiel de partie principale $M(x,Q_1,\ldots,Q_r)$ a la propriété de quasi-analyticité. Si l'hypothèse sur l'algèbre de Lie n'est pas satisfaite, on peut néanmoins à l'aide du théorème 2 déterminer les surfaces pour lesquelles on a l'unicité de Cauchy.

d) Dans le cas où l'idéal caractéristique est engendré par des champs de vecteurs $X_1,\ldots,X_r$, nous avons donné dans [1] § 4 des résultats plus précis qui entraînent les théorèmes 1 et 2 : Si un point x_o appartient au support d'une solution de $Pu = 0$, et si Z est un champ de vecteurs de Lie$(X_1, \ldots, X_r)$, alors toute la courbe intégrale de Z issue de x_o est contenue dans le support de u. Ceci s'applique en particulier en a) et b). Dans le cas b), ces résultats ont été également démontrés par Zachmanoglou [4] qui obtient de plus une réciproque du théorème 1.

e) Les théorèmes 1 et 2 ne fournissent pas de résultat intéressant lorsque la variété caractéristique (ensemble des ξ réels tels que $P_p(x,\xi) = 0$) est en chaque point de dimension m-1. En effet, dans ce cas, l'idéal caractéristique est principal et on a Lie$(K) = K$. Par contre, lorsque la dimension est strictement inférieure à m-1 (c'est la cas général lorsque les coefficients sont complexes, dans le cas réel, c'est une hypothèse qui élimine entre autres les opérateurs hyperboliques ou de type principal), les hypothèses du théorème 1 sont en général vérifiées. Pour qu'il n'en soit pas ainsi, il faut que les coefficients de P et leurs dérivées satisfassent à une infinité de relations linéaires.

§ 4.

Nous allons maintenant introduire les notions de géométrie infinitésimale qui nous sont nécessaires.

<u>Définition 3</u> : Soit F un ensemble fermé de $\mathbb{R}^m$. Nous dirons que le vecteur n est normal (extérieurement) à F en un de ses points x_o, s'il existe une sphère passant par x_o, telle que n lui soit normal en x_o et telle qu'aucun point de F ne lui soit intérieur.

Cette définition va nous permettre de traduire géométriquement le théorème de Holmgren par l'énoncé suivant :

Soit F le support d'une solution de $Pu = 0$, alors, pour chaque point x de F et chaque normale n en x, on a $P_p(x,n) = 0$.

Le théorème suivant, que nous démontrerons plus loin, va nous permettre d'en déduire les théorèmes 1 et 2.

<u>Théorème 3 : Soient</u> $Q_1(x,\xi)$ <u>et</u> $Q_2(x,\xi)$ <u>deux fonctions homogènes en</u> ξ <u>et de classe</u> C^1 <u>pour</u> $\xi \neq 0$. <u>Supposons que, pour tout point</u> x <u>de</u> F, <u>et pour toute normale</u> n <u>à</u> F <u>en</u> x, <u>on ait</u> :

$$Q_1(x,n) = Q_2(x,n) = 0 .$$

<u>On a alors</u> $[Q_1,Q_2](x,n) = 0$.

<u>Démonstration des théorèmes 1 et 2</u> :

Soit donc F le support d'une solution u. Nous avons vu que l'on a $P_p(x,n) = 0$ dès que n est normal à F en x. Par définition de K, pour tout Q appartenant à K, on a donc $Q(x,n) = 0$. Enfin, en utilisant le théorème 3, on obtient par récurrence que pour tous les R de Lie(K), on a $R(x,n) = 0$.

Plaçons-nous sous les hypothèses du théorème 1. Montrons que le support de u est nécessairement soit vide, soit égal à Ω. En effet, dans le cas contraire, on pourrait trouver un point y plus proche de F que du bord de Ω. La sphère centrée en y et dont le rayon est égal à la distance de y à F rencontrerait F en au moins un point x et le vecteur $y - x$ serait normal à F en x. D'après ce qui précède, on devrait avoir $R(x,y-x) = 0$ pour tout R de Lie(K), tandis que, d'après l'hypothèse, il devrait exister un R de Lie(K) tel que $R(x,y-x) \neq 0$. Il est donc impossible que F ne soit ni vide ni Ω lui-même. Si une solution est nulle au voisinage d'un point, son support ne peut être Ω, il est donc vide et on a $u = 0$.

Plaçons-nous maintenant sous les hypothèses du théorème 2. Soit u une solution de $Pu = 0$, soit S vérifiant la condition de l'énoncé, et supposons par l'absurde que u soit nulle d'un côté de S, et que x_o appartienne au support de u. Sur la normale en x_o à S, choisissons une suite de points x_n, tendant vers x_o, et situés du côté opposé à celui du support de u. Soit y_n une des projections de x_n sur le support de u. Le vecteur $y_n - x_n$ est normal en y_n à ce support. On a donc $R(y_n, y_n - x_n) = 0$ pour tout R appartenant à Lie(K). Or, lorsque x_n tend vers x_o, le point y_n tend vers x_0, et la direction de $y_n - x_n$ tend vers celle de la normale n à S en x_0. On aurait donc $R(x_0, n) = 0$ pour tout R de Lie(K) ce qui contredirait l'hypothèse.

§ 5. ETUDE DE LA DISTANCE D'UN POINT VARIABLE A UN ENSEMBLE FERME DE L'ESPACE EUCLIDIEN.

Ce paragraphe et les suivants nous conduiront à la démonstration du théorème 3.

Soit F un ensemble fermé de $\mathbb{R}^m$. Nous désignerons par $d(x)$ la distance de x à F. Dans le cas où x n'admet qu'une projection sur F, nous désignerons celle-ci par $p(x)$.

La fonction d est lipschitzienne de rapport 1. Elle est donc différentiable presque partout. En un point x où elle est différentiable, si on appelle y une projection de x, on voit que d décroît avec une dérivée égale à 1 dans la direction de $y-x$. Il en résulte qu'un tel point x possède une projection unique et que le gradient de d est le vecteur unitaire $u(x) = \frac{x-p(x)}{|x-p(x)|}$.

Notre but est de montrer que d possède en un certain sens des dérivées secondes. Pour cela, nous introduisons une classification des points du complémentaire de F. Elle repose sur la remarque suivante : si un point z admet le point y pour projection, tout point intérieur au segment joignant z à y admet y comme projection unique.

Nous dirons que x est <u>régulier d'ordre au moins t</u>, $(0 < t < 1)$ s'il existe deux points z et y tels que y soit l'une des projection de z et que l'on ait $x = z + t(y - z)$. L'ensemble de ces points sera noté M_t.

Nous dirons que x est <u>régulier d'ordre exactement t</u>, $(0 < t < 1)$ s'il est régulier d'ordre t et s'il n'appartient à aucun M_s pour $s > t$. L'ensemble de ces points sera noté N_t.

Enfin, nous dirons que x est <u>singulier</u> s'il n'appartient à aucun M_t. Nous noterons S l'ensemble de ces points. Tout point possèdant plusieurs projections est singulier.

Tous ces ensembles sont mesurables. En effet, l'ensemble des points admettant au moins deux projections distantes d'au moins $1/n$ est fermé, et donc, l'ensemble des points admettant au moins deux projections est mesurable. Sur le complémentaire de cet ensemble, la fonction $p(x)$ est définie et continue. Or un point x appartient à M_t si et seulement si on a

$$d\left[x + \frac{t}{1-t}\,(x - p(x))\right] = \frac{d(x)}{1-t} \quad .$$

L'ensemble M_t est donc mesurable, et donc aussi les ensembles N_t et S.

<u>Lemme</u> : L'ensemble S est de mesure nulle.

Remarquons d'abord le fait suivant. Soient z_1 et z_2 extérieurs à F et y_1 et y_2 choisis parmi leurs projections respectives. Posons $x_i = z_i + t(y_i - z_i)$. On a alors

$$|x_1 - x_2| \geq (1 - t)\,|z_1 - z_2| \ .$$

Cela résulte simplement du fait que z_1 et z_2 sont situés de part et d'autre de l'hyperplan médiateur du segment joignant y_1 à y_2.

Considérons maintenant l'application qui à un point x de N_t fait correspondre le point

$$z = x + \frac{t}{(1-t)}\,(x - p(x)) \ .$$

Cette application est surjective de N_t sur S. D'autre part, d'après ce qui précède, elle est lipschitzienne de rapport $1/(1-t)$. L'image d'un ensemble de mesure nulle par une application lipschitzienne étant de mesure nulle, si l'on supposait S de mesure strictement positive, il en résulterait que les N_t constitueraient une famille non dénombrable d'ensembles disjoints de mesure strictement positive, ce qui est impossible.

§ 6.

Nous allons prouver le résultat suivant :

<u>Théorème 4</u> : <u>Pour tout compact</u> H <u>disjoint de</u> F, <u>il existe un compact</u> K <u>contenu dans</u> H, <u>dont la mesure diffère de celle de</u> H <u>d'aussi peu que l'on veut, et une fonction</u> δ <u>définie dans tout l'espace, tels que l'on ait</u>

- <u>La fonction</u> δ <u>possède des dérivées partielles lipschitziennes</u>
- <u>En tout point</u> x <u>de</u> K, <u>on a</u> $\delta(x) = d(x)$
- <u>Chaque point</u> x <u>de</u> K <u>a une projection unique, et on a</u>

$$\operatorname{grad} \delta(x) = u(x) = \frac{x-p(x)}{|x-p(x)|} .$$

Pour cela démontrons d'abord le lemme suivant :

<u>Lemme</u> : Soit x_o un point de M_t, et soit $u_o = \dfrac{x_o-p(x_o)}{|x_o-p(x_o)|}$. Il existe une constante C telle que, pour tout point x extérieur à F et pour toute projection y de x, on ait

$$|d(x) - d(x_o) - (x - x_o) \cdot u_o| \leq C\,|x - x_o|^2$$

et

$$\left| \frac{x-y}{|x-y|} - u_o \right| \leq C\,|x - x_o| .$$

Si on a $0 < a \leq d(x_o) \leq b$, on peut choisir C ne dépendant que de t, a et b.

Soient $y_o = p(x_o)$ et $z_o = x_o + (t/(1-t))(x_o - y_o)$. Soit k ne dépendant que de t, a et b, tel que $k < \inf\,(x_o-y_o\ ,\ x_o-z_o)$. Il suffit évidemment de démontrer le lemme pour $|x - x_o| \leq k$. Dans ce cas, le point y est nécessairement situé dans le ménisque sphérique constitué des points extérieurs à la sphère centrée en z_o et passant par y_o d'une part, et intérieure à la sphère centrée en x et passant par y_o d'autre part. Ce ménisque sphérique est vu du point z_o sous un angle majoré par $C_1|x - x_o|$, d'où il résulte que sa plus grande dimension est majorée par $C_2|x - x_o|$ et que la longueur de sa projection sur la droite joignant x_0 à y_0 est majorée par $C_3|x-x_0|^2$, toutes ces constantes pouvant être choisies de façon à ne dépendre que de t, a et b. Les inégalités du lemme expriment exactement les inégalités précédentes.

Passons maintenant à la démonstration du théorème 4. Soit H un compact disjoint de F. La réunion des ensembles M_t recouvrant H à un ensemble de mesure nulle près, on peut choisir t assez petit, puis choisir un compact K contenu dans $H \cap M_t$, de façon que la mesure de K diffère de celle de H d'aussi peu que l'on veut.

Rappelons le théorème de prolongement de Whitney avec conservation du module de continuité (voir [2]) (nous ne l'énonçons que pour les dérivées premières, seul cas dont nous ayons besoin) :

Soit, sur un compact K, la donnée de m + 1 fonctions $f(x)$, $f^i(x)$ $(i = 1,\dots,m)$ vérifiant les relations suivantes :

$$|f(y) - f(x) - \Sigma(y_i - x_i)\, f^i(x)| \le C|y-x|\, \omega(|y-x|)$$

$$|f^i(y) - f^i(x)| \le C\, \omega(|y-x|)$$

où ω est une fonction continue concave croissante sur $[0,\infty[$, nulle en 0. Il existe alors une fonction g de classe C^1 dans $\mathbb{R}^m$, coïncidant avec f sur K, dont les dérivées partielles $g^{(i)}$ coïncident avec les f^i sur K et telle que l'on ait

$$|g^{(i)}(y) - g^{(i)}(x)| \le C'\, \omega(|y-x|) \ .$$

Le lemme ci-dessus affirme exactement que la donnée sur K de $d(x)$ et des m composantes du vecteur $u(x) = \dfrac{x-p(x)}{|x-p(x)|}$ satisfont à ces hypothèses, avec le module de continuité $\omega(t) = t$. Le théorème 4 ne fait qu'exprimer la conclusion.

§ 7. DEMONSTRATION DU THEOREME 3.

Soient donc $Q_1(x,\xi)$ et $Q_2(x,\xi)$ homogènes en ξ, et F un fermé tel que l'on ait $Q_1(x,n) = Q_2(x,n) = 0$ pour tout x de F et toute normale n en x à F. Il faut démontrer que $[Q_1,Q_2](x,n) = 0$.
Ce résultat est classique lorsque le bord de F est défini par une équation $f(x) = 0$, où f est de classe C^2. Il suffit d'écrire $Q_1(x, \operatorname{grad} f(x)) = 0$ et la relation analogue pour Q_2, de différencier ces relations et d'en éliminer les dérivées secondes en utilisant la propriété :
$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$. C'est cette méthode que nous étendons ici, ce qui explique que nous ayions dû préalablement introduire des notions jouant le rôle de dérivées secondes de la distance de x à F.

Soient K et δ obtenus à l'aide du théorème 4. Posons $h(x) = \frac{1}{2}\,\delta^2(x)$. La fonction h possède un gradient lipschitzien. elle est donc deux fois différentiable presque partout, et de plus, les dérivées partielles secondes ainsi obtenues appartiennent à L^∞, et coïncident avec les dérivées partielles secondes au sens des distributions. Comme on a $\frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 h}{\partial x_j \partial x_i}$ au sens des distributions, il en résulte que les fonctions $\frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j}$ et $\frac{\partial^2 h}{\partial x_j \partial x_i}$ sont égales presque partout.

Tout point x de K possède une projection unique égale à $x - \operatorname{grad} h(x)$. On a donc en tout point de K :

$$Q_1(x-\operatorname{grad} h(x)\ ;\ \operatorname{grad} h(x)) = Q_2(x-\operatorname{grad} h(x)\ ;\ \operatorname{grad} h(x)) = 0 \ .$$

Or, si une fonction est nulle sur K, et si elle est différentiable en presque tout point de K, sa différentielle est nulle presque partout sur K (il est évident qu'un point où la fonction a une différentielle non nulle ne peut pas être un point de densité, or d'après le théorème de Lebesgue, presque tous les points sont points de densité). On a donc en presque tout point x de K :

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x_i} + \sum_k \left(\frac{\partial Q_1}{\partial \xi_k} - \frac{\partial Q_1}{\partial x_k}\right) \frac{\partial^2 h}{\partial x_k \partial x_i} = 0 \quad .$$

En multipliant la relation précédente par $(\frac{\partial Q_2}{\partial \xi_i} - \frac{\partial Q_2}{\partial x_i})$, en en retranchant la relation analogue relative à Q_2 et en sommant par rapport à i, on obtient

$$[Q_1, Q_2](x-\mathrm{grad}\, h(x) \; ; \mathrm{grad}\, h(x)) = 0$$

presque partout sur K.

Soit enfin x_o un point de F et n une normale en ce point. Soit x_1 un point n'appartenant pas à F, dont la seule projection sur F est x_o et tel que $x_1 - x_o$ soit proportionnel à n. En choisissant pour compacts H une suite de boules contenant x_1 et de rayons tendant vers 0, les résultats précédents fournissent une suite de points x_p tendant vers x_1, tels tels que l'on ait $[Q_1, Q_2](y_p \, , x_p - y_p) = 0$

en désignant par y_p la projection de x_p. Lorsque p tend vers l'infini, y_p tend vers x_o, et on a par continuité

$$[Q_1, Q_2](x_o \, , n) = 0 \quad .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. M. Bony : Principe du maximum, inégalité de Harnack et unicité du problème de Cauchy pour les opérateurs elliptiques dégénérés, Ann. Inst. Fourier Grenoble 19,1 (1969), 277-304.

[2] G. Glaeser : Journal d'analyse mathématique 6 (1958), 1-124.

[3] L. Hörmander : Linear partial differential operators, Springer-Verlag (1963).

[4] E. C. Zachmanoglou : Propagation of zeroes and uniqueness in the Cauchy problem for first order partial differential equations, Arch. Rat. Mech. Anal. 38,3 (1970), 178-188.
