Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Jean-Etienne Bertin

Modules de Gorenstein et modules canoniques

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 28, nº 1 (1974-1975), exp. nº 9, p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1974-1975__28_1_A5_0>

Séminaire P. DUBREIL
(Algèbre)
28e année, 1974/75, n° 9, 9 p.

10 février 1975

MODULES DE GORENSTEIN ET MODULES CANONIQUES

par Jean-Etienne BERTIN

Notations. - Dans tout ce qui suit, A et B désignent des anneaux commutatifs unitaires noethériens. On note Spec(A) le spectre premier de A . Si M est un A-module, et $\mathfrak{a}$ un idéal de A ,

$pf_A(M)$ désigne la profondeur de M sur A ,

$di_A(M)$ la dimension injective de M sur A ,

$\dim_A(M)$ la dimension de Krull de M sur A ,

$\mathrm{Ann}_A(M)$ l'annulateur de M dans A ,

$\mathrm{Supp}_A(M)$ le support de M dans Spec(A) ,

$E_A(M)$ une enveloppe injective de M sur A ,

$ht(\mathfrak{a})$ la hauteur de $\mathfrak{a}$,

$\mathrm{End}_A(M)$ la A-algèbre des endomorphismes de M sur A .

Etant donnés un entier positif n , et un A-module M , on note nM le A-module M^n , et on convient que $0M = 0$.

Enfin, étant donnés un idéal premier $\mathfrak{p}$ de A , un A-module M , et un entier positif ou nul i , $\mu^i(\mathfrak{p}, M)$ désigne le i-ième invariant de Bass de M en $\mathfrak{p}$, c'est-à-dire la dimension sur le corps $A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p} A_\mathfrak{p}$ de l'espace vectoriel

$$\mathrm{Ext}^i_{A_\mathfrak{p}}(A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p} A_\mathfrak{p} , M_\mathfrak{p}) .$$

Rappelons que si $0 \longrightarrow M \longrightarrow M_0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow M_n \longrightarrow \dots$ est une résolution injective minimale de M , on a

$$M_i \simeq \bigoplus_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Spec}\ A} \mu_i(\mathfrak{p} , M) E_A(A/\mathfrak{p}) .$$

Définition 1. - Soit A un anneau. Un A-module M de type fini et non nul est dit de Gorenstein s'il vérifie une des quatre conditions équivalentes suivantes :

(i) pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A , $pf_{A_\mathfrak{m}}(M_\mathfrak{m}) = di_{A_\mathfrak{m}}(M_\mathfrak{m})$;

(ii) les trois conditions suivantes sont vérifiées :

(a) $\mathrm{Hom}_A(M , M)$ est un A-module projectif,

(b) pour tout entier i positif, $\mathrm{Ext}^i_A(M , M) = 0$,

(c) pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A , $di_{A_\mathfrak{m}}(M_\mathfrak{m}) < +\infty$;

(iii) pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A , $\mu^i(\mathfrak{m} , M) = 0$ pour tout $i \neq ht(\mathfrak{m})$;

(iv) pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A , $\mu^i(\mathfrak{p} , M) = 0$ pour tout $i \neq ht(\mathfrak{p})$.

L'équivalence de (i), (iii) et (iv) est démontrée par SHARP [12], et celle de (i) et (iv) par FOXBY [5].

Un anneau A est dit de Gorenstein si A est un A-module de Gorenstein.

Définition 2. – Soit A un anneau. Un A-module de Gorenstein est dit A-module canonique s'il vérifie l'une des trois conditions équivalentes suivantes :

(ii') l'homomorphisme canonique $A \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, M)$ est un isomorphisme ;

(iii') pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A, on a $\mu^{ht(\mathfrak{m})}(\mathfrak{m}, M) = 1$;

(iv') pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, on a $\mu^{ht(\mathfrak{p})}(\mathfrak{p}, M) = 1$.

L'équivalence de ces conditions est démontrée par FOXBY [5].

Exemple. – Soit $(A, \mathfrak{m})$ un anneau local artinien. Il est clair que $E_A(A/\mathfrak{m})$ vérifie les conditions (iii) et (iii') ci-dessus ; donc $E_A(A/\mathfrak{m})$ est un A-module canonique, et pour tout entier positif n, $nE_A(A/\mathfrak{m})$ est un A-module de Gorenstein. Réciproquement, tout A-module de Gorenstein est un A-module injectif de type fini et non nul, donc isomorphe à un A-module de la forme $nE_A(A/\mathfrak{m})$ [8]. Et tout A-module canonique est isomorphe à $E_A(A/\mathfrak{m})$.

Question I. – Dans l'hypothèse où un anneau A possède un A-module canonique, a-t-on unicité (à isomorphe près) du A-module canonique, et la structure de tout A-module de Gorenstein se déduit-elle simplement de celle d'un A-module canonique ?

PROPOSITION 1. – Soient A un anneau à spectre premier, connexe, et M un A-module de Gorenstein. Alors :

(v) l'annulateur de M dans A est nul ;

(vi) un élément x de A divise 0 dans M si, et seulement si, il divise 0 dans A ;

(vii) si x est un élément de A non diviseur de 0 dans A et non inversible, alors M/xM est un A/xA-module de Gorenstein ; si, de plus, M est un A-module canonique, alors M/xM est un A/xA-module canonique ;

(viii) si A est un anneau local, et si x est un élément de A non diviseur de 0 dans A et non inversible, alors A est un anneau de Gorenstein si, et seulement si, A/xA est un anneau de Gorenstein.

Montrons (v). Pour tout $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(M)$, on a

$$(\mathrm{Ann}_A(M))_{\mathfrak{p}} = \mathrm{Ann}_{A_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) = \mathrm{Ann}_{A_{\mathfrak{p}}}(\mathrm{Hom}_{A_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}, M_{\mathfrak{p}})) = 0$$

puisque $\mathrm{Hom}_{A_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}, M_{\mathfrak{p}})$ est un $A_{\mathfrak{p}}$-module libre. Donc

$$\mathrm{Supp}(M) = \mathrm{Spec}(A) - \mathrm{Supp}(\mathrm{Ann}_A(M)) .$$

Ainsi le support de M est ouvert et fermé dans le spectre premier de A, qui est connexe ; donc $\mathrm{Supp}(M) = \mathrm{Spec}(A)$ et $\mathrm{Ann}_A(M) = 0$. Les propriétés (vi) et

(vii) sont démontrées par FOXBY [5], et (viii) par BASS [2] (2.6).

PROPOSITION 2. - Si un anneau A à spectre premier connexe possède un A-module de Gorenstein, alors A est de Cohen-Macaulay.

Pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A, on a $M_{\mathfrak{m}} \neq 0$ d'après la proposition 1, donc $M_{\mathfrak{m}}$ est un $A_{\mathfrak{m}}$-module de Gorenstein. On peut donc supposer l'anneau A local.

Soit $\mathfrak{x} = (x_1, \dots, x_n)$ une A-suite maximale ; posons $A' = A/\mathfrak{x}A$ et $M' = M/\mathfrak{x}M$.

Alors M' est un A'-module de Gorenstein de profondeur nulle, donc M' est un A'-module de type fini non nul et injectif, puisque $\mathrm{di}_{A'}(M') = \mathrm{pf}_{A'}(M') = 0$. Donc A est un anneau artinien.

LEMME 1. - Soient A un anneau local, M et N deux A-modules de Gorenstein, et x un élément de A non diviseur de 0 dans A et non inversible tel que M/xM et N/xN soient isomorphes. Alors M est isomorphe à N.

On a $\mathrm{di}_A(N) < +\infty$, et $\mathrm{pf}_A(M) = \mathrm{pf}_A(A)$; ainsi $\mathrm{Ext}^1_A(M, N) = 0$ puisque $1 > \mathrm{pf}_A(A) - \mathrm{pf}_A(M)$ d'après LEVIN-VASCONCELOS [6]. Soit $h : M/xM \longrightarrow N/xN$ un isomorphisme, $p : M \longrightarrow M/xM$ et $q : N \longrightarrow N/xN$ les homomorphismes canoniques. Puisque $\mathrm{Ext}^1_A(M, N) = 0$, il existe un homomorphisme $f : M \longrightarrow N$ tel que $f \circ q = p \circ h$. Posons $C = \mathrm{Coker}\, f$ et $K = \mathrm{Ker}\, f$; d'après le lemme du serpent, on obtient un diagramme commutatif où lignes et colonnes sont exactes, et où les flèches horizontales non précisées désignent la multiplication par x.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d] & K \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & M \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f"] & M/xM \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r, "q"] \arrow[d] & N/xN \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & C \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Ainsi la multiplication par x de C dans C [resp. de K dans K] est surjective. D'après le lemme de Nakayama, on a donc $C = K = 0$.

PROPOSITION 3. - Soit A un anneau local possédant un A-module canonique Ω. Alors pour qu'un A-module M soit de Gorenstein, il faut et il suffit que M soit isomorphe à $n\Omega$, où n est un entier positif. Tout A-module canonique est isomorphe à Ω [4].

La suffisance est évidente. Soient M un A-module de Gorenstein, et

$$\mathfrak{x} = (x_1, \dots, x_n)$$

une suite maximale. Posons $M' = M/\mathfrak{x}M$, $A' = A/\mathfrak{x}A$ et $\Omega' = \Omega/\mathfrak{x}\Omega$. D'après la proposition 2, A' est artinien ; et d'après l'exemple, il existe un entier positif n et un isomorphisme $M' \simeq n\Omega'$. D'après le lemme précédent, on en déduit que $M \simeq n\Omega$. Si M est canonique, M' est un A'-module canonique, donc $n = 1$, et $M \simeq \Omega$.

<u>Remarque</u> 1. - Soit A un anneau possédant un A-module canonique Ω et un A-module inversible non trivial P. Il est clair que $\Omega \otimes_A P$ est aussi un A-module canonique, et puisque, pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A, $P_{\mathfrak{m}} \simeq A_{\mathfrak{m}}$. Cependant $\mathrm{Hom}_A(\Omega , \Omega) \simeq A$, et $\mathrm{Hom}_A(\Omega \otimes_A P , \Omega) \simeq \mathrm{Hom}_A(P , \mathrm{Hom}_A(\Omega , \Omega)) \simeq \mathrm{Hom}_A(P , A)$ qui est un A-module inversible non trivial par hypothèse. Donc Ω n'est pas isomorphe à $\Omega \otimes_A P$, et on a un exemple de deux A-modules canoniques non isomorphes. En fait, si A est de dimension finie, tout A-module de Gorenstein est de la forme $\Omega \otimes_A Q$, où Q est un A-module projectif de type fini non nul [14].

<u>Question</u> II. - A quelle condition un anneau A possède-t-il un module canonique ? On a déjà vu qu'il est nécessaire que A soit de Cohen-Macaulay.

<u>Définition</u> 3. - Soient A un anneau, et M un A-module ; on appelle <u>extension triviale</u> de A par M, et on note $A \alpha M$, l'anneau dont le groupe additif est le groupe $A \times M$ muni de la multiplication $(a , m)(a' , m') = (aa' , am' + a' m)$ pour $a , a' \in A$ et $m , m' \in M$. Il est clair que A est le quotient de l'anneau $A \alpha M$ par l'idéal $0 \times M$. Comme $0 \times M$ est un idéal de carré nul de $A \alpha M$, tout idéal premier de $A \alpha M$ est de la forme $\mathfrak{p} \times M$, où $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$. Donc

$$\dim(A) = \dim(A \alpha M) ,$$

et si l'anneau A est local d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, $A \alpha M$ est local d'idéal maximal $\mathfrak{m} \times M$. Si $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$, on vérifie sans peine qu'on a un isomorphisme naturel que $(A \alpha M)_{\mathfrak{p} \times M}$ sur $A_{\mathfrak{p}} \alpha M_{\mathfrak{p}}$. Enfin, étant donné $x \in A$, x divise 0 dans A si, et seulement si, $(x , 0)$ divise 0 dans $A \alpha M$.

LEMME 2. - <u>Soient</u> A <u>un anneau de Cohen-Macaulay, et</u> M <u>un</u> A-<u>module canonique. Alors l'anneau</u> $A \alpha M$ <u>est de Gorenstein</u> [11].

On peut supposer l'anneau A local d'idéal maximal $\mathfrak{m}$.

Soit $\mathfrak{x} = (x_1 , \ldots , x_n)$ une A-suite maximale,; posons $A' = A/\mathfrak{x}A$, $M' = M/\mathfrak{x}M$, $\mathfrak{m}' = \mathfrak{m}/\mathfrak{x}\mathfrak{m}$. Alors $((x_1 , 0) , \ldots , (x_n , 0))$ est une $A \alpha M$-suite, et on obtient aisément un isomorphisme de $A \alpha M/((x_1 , 0) , \ldots , (x_n , 0))A \alpha M$ sur $A' \alpha M'$. Puisque A est de Cohen-Macaulay, $n = \dim A = \dim(A \alpha M)$, donc A' et $A' \alpha M'$ sont des anneaux locaux artiniens. Or M' est un A'-module canonique, donc M' est A'-injectif. Donc $\mathrm{Hom}_{A'}(A' \alpha M' , M')$ est un $A' \alpha M'$-module injectif. L'isomorphisme $A' \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{A'}(M' , M')$ définit donc un isomorphisme de A'-modules de

$$\mathrm{Hom}_{A'}(A' \alpha M' , M')$$

sur $M' \oplus A'$. Il résulte de la définition du produit sur $A' \alpha M'$ que cet isomorphisme est en fait un isomorphisme de $A' \alpha M'$-modules de $\mathrm{Hom}_{A'}(A' \alpha M' , M')$ sur $A' \alpha M'$. L'anneau local artinien $A' \alpha M'$ étant de dimension injective nulle est de

Gorenstein. Donc $A \propto M$ est un anneau de Gorenstein.

On en déduit immédiatement la proposition suivante :

PROPOSITION 4. - <u>Soit</u> A <u>un anneau admettant un module canonique</u> ; <u>alors</u> A <u>est quotient d'un anneau de Gorenstein de même dimension que</u> A .

THÉORÈME 1. - <u>Soient</u> B <u>un anneau de Gorenstein, et</u> A <u>un anneau quotient de</u> B . <u>Supposons que</u> A <u>soit un anneau de Cohen-Macaulay à spectre premier connexe, et posons</u> $d = \mathrm{grade}_B(A)$. <u>Alors</u> $\mathrm{Ext}_B^d(A , B)$ <u>est un</u> A-<u>module canonique</u> ([13], [14]).

Supposons d'abord B local. Posons $s = \dim B = \mathrm{pf}_B(B)$ et $n = \dim A = \mathrm{pf}_A(A) = \mathrm{pf}_B(A)$. Puisque $\mathrm{di}_B(B) < +\infty$, pour tout entier $j > s - n$, on a $\mathrm{Ext}_B^j(A , B) = 0$ d'après LEVIN-VASCONCELOS [6], mais $\mathrm{Ext}_B^{s-n}(A , B) \neq 0$. Posons $\Omega = \mathrm{Ext}_B^{s-n}(A,B)$. On a $\mathrm{grade}_B(A) = n - s$ puisque B est de Cohen-Macaulay. D'après REES [10], on a donc, pour tout entier $j < n - s$, $\mathrm{Ext}_B^j(A , B) = 0$.

Soit alors $0 \to B \to B_0 \to B_1 \to \dots \to B_m \to 0$ une résolution injective minimale de B ; on a $m = s$ puisque $\mathrm{di}(B) = \dim(B)$. Alors

$$B_i = \bigoplus_{q \in \mathrm{Spec}(B)} \mu^i(q , B)\, E(B/q) = \bigoplus_{q \in \mathrm{Spec}\, B,\ \mathrm{ht}\, q = i} E_B(B/q)$$

puisque $\mu^i(q , B) = \delta_{i,\mathrm{ht}(q)}$. Si q est un idéal premier de B de hauteur $j < s - n$, il existe $x \in \mathrm{Ann}_B(A)$ tel que $x \notin q$, ce qui montre que

$$\mathrm{Hom}_B(A , E(B/q)) = 0 .$$

Donc, pour tout $j < s - n$, $\mathrm{Hom}_B(A , B_j) = 0$. On a donc une suite exacte :

$$(*) \qquad 0 \to \Omega \to \mathrm{Hom}_B(A,B_{s-n}) \to \mathrm{Hom}_B(A,B_{s-n+1}) \to \dots \to \mathrm{Hom}_B(A,B_s) \to 0 .$$

Puisque B_j est un B-module injectif, $\mathrm{Hom}_B(A , B_j)$ est un A-module injectif pour $j \geqslant s - n$. Donc la suite $(*)$ est une résolution injective de Ω . Soit alors $0 \to \Omega \to \Omega_0 \to \Omega_1 \to \dots \to \Omega_n \to 0$ une résolution injective minimale de Ω ; on a alors des injections $E_j \to \mathrm{Hom}_B(A , B_{j+s-n})$ pour $0 \leqslant j \leqslant n$. De plus, si $\mathfrak{n}$ désigne l'idéal maximal de B et $\mathfrak{m}$ celui de A , on a

$$\mathrm{Hom}_B(A , B_s) = \mathrm{Hom}_B(A , E_B(B/\mathfrak{n})) = E(A/\mathfrak{m})$$

d'après MATLIS [7]. Ainsi $\mu^j(\mathfrak{m} , \Omega) = 0$ si $j \neq n$ et $\mu^n(\mathfrak{m} , \Omega) \leqslant 1$. Puisque $\Omega \neq 0$, on a $\mathrm{di}_A(\Omega) = \mathrm{pf}_A(A) = n$, et $\Omega_n \neq 0$; donc $\mu^n(\mathfrak{m} , \Omega) = 1$. Donc Ω est un A-module canonique.

Revenons au cas général. Soit $\varphi : B \to A$ un homomorphisme surjectif ; soit $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$, et posons $q = \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$, $s_{\mathfrak{p}} = \dim B_q$ et $n_{\mathfrak{p}} = \dim A_{\mathfrak{p}}$, de sorte que $(\mathrm{Ext}_B^j(A , B))_{\mathfrak{p}} = \mathrm{Ext}_{B_q}^j(A_{\mathfrak{p}} , B_q) = 0$ pour $j \neq s_{\mathfrak{p}} - n_{\mathfrak{p}}$ d'après ce qui précède. Soit $\mathfrak{p}' \in \mathrm{Spec}(A)$ tel que $\mathfrak{p}' \supset \mathfrak{p}$: alors $(\mathrm{Ext}_B^j(A , B))_{\mathfrak{p}}$ est un localisé de $(\mathrm{Ext}_B^j(A , B))_{\mathfrak{p}'}$; on en déduit que $s_{\mathfrak{p}} - n_{\mathfrak{p}} = s_{\mathfrak{p}'} - n_{\mathfrak{p}'}$. Notons $\psi :\ \mathrm{Spec}\, A \to \underline{N}$ l'application $\mathfrak{p} \mapsto s_{\mathfrak{p}} - n_{\mathfrak{p}}$: ainsi $\mathrm{Im}\, \psi = \{\psi(\mathfrak{p}_1) , \dots , \psi(\mathfrak{p}_p)\}$ où $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_p$ sont les idéaux premiers minimaux de A . Soit $d \in \mathrm{Im}\, \varphi$, et posons

$$J = \{i \text{ de } 1 \text{ à } p \ , \ \psi(\mathfrak{p}_i) = d\} .$$

Alors $\psi^{-1}(d) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A \ , \ \mathfrak{p} \supset \bigcap_{i\in J} \mathfrak{p}_i\} = \overline{\bigcup_{i\in J}\{\mathfrak{p}_i\}}$. Ainsi $\psi^{-1}(d)$ est fermé, et son complémentaire, qui est réunion finie d'ensemble du même type est aussi fermé. Puisque $\text{Spec}(A)$ est connexe, on a $\psi^{-1}(d) = \text{Spec}(A)$. Alors $\text{Ext}^j_B(A,B) = 0$ si $j < d$ et $\text{Ext}^d_B(A , B) \neq 0$. Donc $d = \text{grade}_B(A)$ et $\text{Ext}^d_B(A , B)$ est un A-module canonique.

COROLLAIRE 1. - Si A est un anneau de Cohen-Macaulay quotient d'un anneau de Gorenstein, alors A possède un A-module canonique.

A est de la forme $\bigoplus_{i=1}^n A_i$, où chacun des A_i a un spectre premier connexe. Alors chacun des A_i possède un module canonique Ω_i , et il est clair que $\bigoplus_{i=1}^n \Omega_i$ est un A-module canonique.

COROLLAIRE 2. - Tout anneau local complet de Cohen-Macaulay possède un module canonique.

Un tel anneau est quotient d'un anneau local régulier, qui est un anneau de Gorenstein.

Question III. - Soit A un anneau local possèdant un module de Gorenstein, l'anneau A possède-t-il un module canonique ? Tout facteur direct non nul d'un module de Gorenstein étant un module de Gorenstein, on peut supposer que A possède un module de Gorenstein indécomposable.

LEMME 3. - Soient $(A , \mathfrak{m})$ un anneau local, M un A-module de Gorenstein, et $\mathfrak{x} = (x_1 , \ldots , x_n)$ une A-suite maximale. Posons $\Lambda = \text{End}_A(M)$. Il existe un entier m positif et un isomorphisme d'algèbres de $\Lambda/\mathfrak{x}\Lambda$ sur l'algèbre $M_m(A/\mathfrak{x}A)$ des matrices carrées d'ordre m sur $A/\mathfrak{x}A$.

Posons $A' = A/\mathfrak{x}A$, $\mathfrak{m}' = \mathfrak{m}/\mathfrak{x}\mathfrak{m}$, $M' = M/\mathfrak{x}M$, $\Lambda' = \Lambda/\mathfrak{x}M$ et $E' = E_{A'}(A'/\mathfrak{m}')$. Alors il existe un entier m positif et un isomorphisme $M' \simeq E'^m$; donc

$$\Lambda' \simeq \text{End}_{A'}(E'^m) \simeq M_m(A') .$$

PROPOSITION 5. - Soit $(A , \mathfrak{m})$ un anneau local hensélien, admettant un module de Gorenstein M . Alors A admet un module canonique [4].

On peut supposer M indécomposable. D'après le lemme, si $\Lambda = \text{End}_A(M)$, il existe un entier positif m tel que $\Lambda/\mathfrak{m}\Lambda \simeq M_m(A/\mathfrak{m})$. Puisque A est hensélien, tout idempotent de $\Lambda/\mathfrak{m}\Lambda$ se relève en un idempotent de Λ ; donc $m = 1$, et M est un module canonique car, avec les notations du lemme,

$$\mu^{ht(\mathfrak{m})}(\mathfrak{m} , M) = \mu^0(\mathfrak{m}' , M') = m = 1 .$$

PROPOSITION 6. - Soit $(A , \mathfrak{m})$ un anneau local possédant un module de Gorenstein indécomposable M , et posons $\Lambda = \text{End}_A(M)$. Alors il existe une sous-A-algèbre commutative S de Λ ayant les propriétés suivantes :

(a) S est un A-module libre de type fini ;

(b) le spectre premier de S est connexe de dimension finie ;

(c) S admet un module canonique ;

(d) si Λ est considéré comme S-module à droite, le produit dans Λ induit un isomorphisme de S-algèbres $\Lambda \otimes_A S \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_S(\Lambda)$ [4].

Il résulte du lemme que Λ est une A-algèbre centrale séparable, puisque Λ est un A-module fidèle de type fini, et que $\Lambda/m\Lambda$ est une A/mA-algèbre centrale séparable. D'après AUSLANDER-GOLDMAN [1], puisque A est un anneau local il existe une sous-algèbre commutative maximale S de Λ qui est séparable (ce qui implique que S vérifie la propriété (d)) et telle que Λ soit un S-module libre de type fini et que S soit un A-module libre de type fini. Puisque $S \subset \Lambda$, et que M est indécomposable, S ne contient aucun idempotent distinct de 0 ou 1, donc le spectre premier de S est connexe. Puisque S est un A-module libre de type fini, on a

$$\mathrm{id}_S(M \otimes_A S) = \mathrm{id}_S(\mathrm{Hom}_A(S , M)) = \mathrm{id}_A(M) < +\infty ;$$

pour tout entier i positif,

$$\mathrm{Ext}^i_S(M \otimes_A S , M \otimes_A S) = \mathrm{Ext}^i_A(M , M) \otimes_A S = 0 ;$$

de plus,

$$\mathrm{Hom}^i_S(M \otimes_A S , M \otimes_A S) = \mathrm{Hom}_A(M , M) \otimes_A S$$

qui est un S-module projectif puisque $\mathrm{Hom}_A(M , M)$ est un A-module projectif. Enfin on a des isomorphismes d'algèbres

$$\mathrm{End}_S(M \otimes_A S) \simeq \mathrm{End}_A(M) \otimes_A S = \Lambda \otimes_A S \simeq \mathrm{End}_S(\Lambda) \simeq M_r(\Lambda) ,$$

où r désigne le rand du S-module libre de type fini Λ. Donc $M \otimes_A S$ possède un facteur direct Ω_0 tel que $\mathrm{End}_S(\Omega_0) \simeq S$; autrement dit, Ω_0 est un S-module canonique. Remarquons enfin que S, étant entier sur A, est un anneau semi-local, donc de dimension finie.

THÉORÈME 3. - Pour qu'un anneau local A admette un module de Gorenstein, il faut et il suffit que A soit de Cohen-Macaulay, et qu'il existe une A-algèbre B fidèlement plate finie à spectre connexe qui soit quotient d'un anneau de Gorenstein de dimension finie [3].

La nécessité résulte des propositions 4 et 6. S'il existe une telle algèbre B, l'anneau B est de Cohen-Macaulay ; donc B possède un module de Gorenstein M. Or $\mathrm{pf}_B(\Omega) = \mathrm{pf}_A(\Omega)$, et $\mathrm{di}_B(\Omega) = \mathrm{di}_A(\Omega)$ puisque tout B-module injectif est A-injectif. Donc Ω est aussi un A-module de Gorenstein.

LEMME 4. - *Soit* $\varphi : (A, \mathfrak{m}) \dashrightarrow (B, \mathfrak{n})$ *un homomorphisme local fidèlement plat d'anneaux locaux. Un* A-*module* M *est canonique si, et seulement si, le* B-*module* $M \otimes_A B$ *est canonique. Un* A-*module* M *est de Gorenstein si, et seulement si, le* B-*module* $M \otimes_A B$ *est de Gorenstein.*

C'est évident sur les conditions (iii) et (iii') des définitions 1 et 2 puisque $\mathrm{Ext}^i_B(B/\mathfrak{n}B, M \otimes_A B) = \mathrm{Ext}^i_A(A/\mathfrak{m}A, M) \otimes_A B$.

THÉORÈME 4. - *Soient* A *un anneau local, et* A^h *son hensélisé. Alors :*

(i) *Si* A *possède un module de Gorenstein,* A^h *possède un module canonique ;*

(ii) *Si* A^h *possède un module canonique, il existe une* A-*algèbre locale-étale qui admette un module canonique* [4].

Montrons (i). Si M est un A-module de Gorenstein, $M \otimes_A A^h$ est un A^h-module de Gorenstein d'après le lemme 4, et la conclusion résulte de la proposition 5.

Montrons (ii). Soit Ω un A^h-module canonique. Comme Ω est un A^h-module de présentation finie, et que A^h est limite inductive d'une famille de A-algèbres locales-étales, il existe une A-algèbre locale-étale B et un B-module M tels que $\Omega \simeq M \otimes_B A^h$. D'après le lemme 4, M est alors un B-module canonique.

Question IV. - Tout anneau local hensélien de Cohen-Macaulay possède-t-il un module canonique ?

Contre-exemple. - FERRAND et RAYNAUD [3] ont montré l'existence d'un anneau A possédant les propriétés suivantes :

1° A est local intègre de dimension 1 ;

2° la clôture intégrale A' de A dans son corps des fractions Q est un anneau local ;

3° si $\hat{A}$ désigne le complété de A, l'anneau $Q \otimes_A \hat{A}$ n'est pas de Gorenstein.

Notons A^h le hensélisé de A.

Alors l'anneau A^h *est local intègre de dimension* 1 *(donc de Cohen-Macaulay) mais ne possède pas de module canonique* [4].

Puisque A' est local, A^h est intègre [9]. De plus $\hat{A} \otimes_{A^h} Q = \hat{A} \otimes_A Q$, donc l'anneau $\hat{A} \otimes_{A^h} Q$ n'est pas de Gorenstein. Supposons que A^h possède un module canonique Ω. Alors, d'après le lemme 4, $\Omega \otimes_{A^h} \hat{A}$ est un $\hat{A}$-module canonique. De même, le localisé $(\Omega \otimes_{A^h} \hat{A}) \otimes_{A^h} Q$ de $\Omega \otimes_{A^h} \hat{A}$ par rapport à la partie multiplicativement stable $A^h - \{0\}$ de $\hat{A}$ est un $(\hat{A} \otimes_{A^h} Q)$-module canonique. Enfin le localisé $\Omega \otimes_{A^h} Q$ de Ω en l'idéal nul de A^h est un Q-module canonique. Donc, puisque Q est un corps, on a $\Omega \otimes_{A^h} Q \simeq Q$ d'après l'exemple. Ainsi

$$(\Omega \otimes_{A^h} \hat{A}) \otimes_{A^h} Q = (\Omega \otimes_{A^h} Q) \otimes_Q (\hat{A} \otimes_{A^h} Q) \simeq \hat{A} \otimes_{A^h} Q \ ;$$

donc $\hat{A} \otimes_{A^h} Q$ est un $(\hat{A} \otimes_{A^h} Q)$-module canonique, ce qui signifie que l'anneau $\hat{A} \otimes_{A^h} Q$ est de Gorenstein contrairement à ce qu'on a vu.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AUSLANDER (M.) and GOLDMAN (O.). - The Brauer group of a commutative ring, Trans. Amer. math. Soc., t. 97, 1960, p. 367-409.

[2] BASS (H.). - On the ubiquity of Gorenstein rings, Math. Z., t. 82, 1963, p. 8-28.

[3] FERRAND (D.) et RAYNAUD (M.). - Fibres formelles d'un anneau local noethérien, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 4e série, t. 3, 1970, p. 295-311.

[4] FOSSUM, GRIFFITH and REITEN. - The homological algebra of trivial extensions of abelian categories with application to ring theory (à paraître).

[5] FOXBY (H. B.). - Gorenstein modules and related modules, Math. Scand., t. 31, 1972, p. 267-284.

[6] LEVIN (G.) and VASCONCELOS (W. V.). - Homological dimensions and Macaulay rings, Pacific J. Math., t. 25, 1968, p. 315-323.

[7] MATLIS (E.). - Injective modules over noetherian rings, Pacific J. of Math., t. 8, 1958, p. 511-528.

[8] MATLIS (E.). - Modules with descending chain condition, Trans. Amer. math. Soc., t. 97, 1960, p. 495-508.

[9] RAYNAUD (M.). - Anneaux locaux henséliens. - Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1970 (Lecture Notes in Mathematics, 169).

[10] REES (D.). - The grade of an idéal or module, Proc. Cambridge phil. Soc., t. 53, 1957, p. 28-42.

[11] REITEN (I.). - The converse to a theorem of Sharp on Gorenstein modules, Proc. Amer. math. Soc., t. 32, 1972, p. 417-420.

[12] SHARP (R. Y.). - Gorenstein modules, Math. Z., t. 115, 1970, p. 117-139.

[13] SHARP (R. Y.). - On Gorenstein modules over complete Cohen-Macaulay local ring, Quart. J. of Math., Oxford Series, t.22, 1971, p. 425-434.

[14] SHARP (R. Y.). - Finitely generated modules of finite injective dimension over certain Cohen-Macaulay rings, Proc. London math. Soc., t. 25, 1972, p. 303-328.

(Texte reçu le 17 février 1975)

Jean-Etienne BERTIN
16 avenue Général Malleret-Joinville
94140 ALFORTVILLE