Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Jean Guérindon

Séries restreintes et compacité linéaire

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 28, nº 1 (1974-1975), exp. nº 7, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1974-1975__28_1_A3_0>

Séminaire P. DUBREIL
(Algèbre)
28e année, 1974/75, n° 7, 6 p.
20 janvier 1975

SÉRIES RESTREINTES ET COMPACITÉ LINÉAIRE

par Jean GUÉRINDON

Introduction

Les séries restreintes sont des cas particuliers des limites projectives de quotients d'anneaux de polynômes. On étudiera, dans ce qui suit, de telles limites dans des cas généraux où interviennent des conditions usuelles de compacité linéaire qui entraîneront des propriétés de fermeture et de platitude maniables. On rencontre ces conditions par exemple dans l'étude des algèbres de Tate $K\{T\}/(f_i)$. Le plongement dans les séries formelles est en outre remplacé par un plongement dans un anneau des " $\mathcal{T}$-séries" qui a l'avantage d'être linéairement compact. On se réfère aux séries et topologies utilisées par P. SALMON et H. KURKE (cf. Bibliographie).

I. Séries formelles restreintes

On désignera, dans la suite, par A un anneau de coefficients, commutatif et unitaire que l'on munira d'une topologie linéaire $\mathcal{T}$, définie au moyen d'un système fondamental de voisinagesde 0, formé des m_i $(i \in I)$; on désignera par δ la "topologie discrète" sur A et par ω la "topologie grossière". Les définitions et les deux théorèmes suivants sont dus à SALMON (cf. [1] et [3]).

Soient $B = A[X_1, \ldots, X_r] = A[X]$, pour r entier fixé et sur cet anneau de polynômes, la topologie linéaire σ', définie par les idéaux

$$X^n m_i[X] = (X_1, \ldots, X_r)^n m_i A[X] .$$

Soit $C = A_{\mathcal{T}}\{X\}$ l'anneau des séries restreintes (pour $\mathcal{T}$), sous-anneau des séries formelles $A[[X]]$ qui convergent pour $\mathcal{T}$, et σ la topologie sur C qui est définie par les idéaux $m_i\{X\}.(X_1, \ldots, X_r)^n$, où $m_i\{X\} = M_i$ est l'idéal des séries restreintes à coefficients en m_i. On a $m_i A_{\mathcal{T}}\{X\} \subsetneq m_i\{X\}$ (inégalité en général), et les isomorphismes topologiques canoniques :

(1) $A\{X\}/X^r m_i\{X\} \approx A[X]/X^r m_i[X] \quad (r \geq 0)$,

(2) $A\{X\}/m_i\{X\} \approx (A/m_i)[X]$.

THÉORÈME I.1. - C est séparé et complet pour σ, c'est le séparé-complété de $A[X]$ pour la topologie σ'.

(cf. [3], §2, proposition 1, p. 388, ...)

Dans le cas où A est noethérien, et $\mathcal{T}$ est m-adique, on pose

$$A_{\mathfrak{T}}\{X\} = (A \ , \ m)\{X\} \ ,$$

et on a le théorème suivant.

THÉORÈME I.2. - Si A est noethérien m-adique, alors C est un anneau de Zariski. L'adhérence de tout idéal q de A est qC .

(cf. [3], §3, théorème 2, p. 393, et [2], §4.)

On remarque en outre que dans le théorème I.2, C est plat sur $A[X]$, car $A[X]$ est noethérien, et donc plat sur A . Il est même fidèlement plat sur A . Par contre, C n'est pas fidèlement plat sur $A[X]$ car, par exemple, $1 - X$ a un inverse en $A[[X]]$ $1 + X + X^2 + \dots$ puis n'est pas nécessairement une série restreinte.

Notons, en outre, que tout idéal $\mathfrak{I}$ de type fini de C est fermé. Cette condition (Φ) joue un rôle important dans la suite pour obtenir des conditions de platitude (§III). Elle intervient aussi dans la catégorie opposée de celle des espaces rigides affines à savoir les Algèbres de Tate ou encore les quotients

$$K\{T\}/(f_1 \ , \ \dots \ , \ f_r)$$

avec K corps valué complet non archimédien (cf. TATE [4]).

II. Conditions de compacité linéaire

Si, dans ce qui précède, A est semi-local (noethérien) complet, et $\mathfrak{T} = \omega$, alors A et $C = A[[X]]$ sont tous deux linéairement compacts. Ce fait, et le rôle joué par la condition (Φ) précédente, conduisent à introduire dans la théorie des anneaux de polynômes topologiques les conditions de "compacité linéaire". Les démonstrations des propositions suivantes sont dans ZELINSKY (cf. [6]) et KURKE (cf. [2]).

Définition (cf. [2], p. 50, 2.4.1.). - Soit M un A-module linéairement topologisé au moyen des sous-modules N_α $(\alpha \in L)$. On dit que M est linéairement compact (l. c.) si tout filtre de variétés linéaires affines $\{x_\alpha + N_\alpha\}$ a un point adhérent (c'est une forme abstraite du théorème chinois : Si les congruences $x \equiv x_k \pmod{N_k}$ ont des solutions par couples, elles en ont une dans leur ensemble).

Par exemple, un module artinien est l. c. (réciproque fausse). Si A est un anneau de valuation, A est l. c. si, et seulement si, il est "maximal". Si A est un anneau de valuation discrète complet, M un A-module, M est l. c. si, et seulement si, M est artinien : c'est un résultat ancien de KAPLANSKY.

Un module linéairement compact est complet, et un sous-module fermé est l. c., et de même le quotient (cf. [2], 2.1.1.).

Un module de type fini sur A l. c. est l. c. (cf. [2], 2.2.3.), et donc A satisfait à la condition (Φ) si A désigne un anneau linéairement compact quelconque.

Une limite projective (donc un produit cartésien) de modules l. c. sur A est l. c. (cf. [2], 2.1.1.).

Il n'en est pas de même pour les limites inductives quelconques ; par contre, nous donnerons plus loin un argument de limite inductive utile pour démontrer certains résultats de platitude.

La structure des modules l. c. est mal connue. Toutefois WARNER a résolu le cas des anneaux noethériens (cf. [5], théorème 5).

THÉORÈME. - Si A est noethérien et linéairement compact, il est semi-local complet, et sa topologie $\mathcal{T}$ est plus fine que la topologie naturelle (il est alors même l. c. pour la topologie discrète δ).

Une conséquence immédiate est qu'un anneau de polynômes $K[X_1, \dots, X_r]$ (K anneau commutatif) n'est jamais l. c. pour la topologie discrète (quotienter par un idéal maximal homogène).

Le problème se pose de déterminer, avec les notations de la première partie, quand $A_{\mathcal{T}}\{X\}$ est linéairement compacte pour la topologie σ . Nous allons établir le résultat suivant.

THÉORÈME II.1. - Pour que l'anneau de séries restreintes $C = A_{\mathcal{T}}\{X\}$ soit linéairement compact, il faut et il suffit que A soit un anneau linéairement compact pour la topologie discrète, et que l'on ait $C = A[[X]]$, et donc $\mathcal{T} = \omega$.

Supposons en effet C linéairement compacte pour σ , alors, pour tout i ,

$$A_{\mathcal{T}}\{X\}/m_i\{X\} \quad \text{ou} \quad A[X]/m_i[X] ,$$

d'après l'isomorphisme (2) est l. c. pour la topologie discrète, et donc $(A/m_i)[X]$. Il y a une contradiction si $m_i \neq A$, car si k est un corps, $k[X]$ n'est pas semi-local, et ceci contredit le théorème de Warner, et on appliquerait ce qui précède à $A[X]/(M + XA[X])$ si M est un idéal maximal contenant m_i . Donc $\mathcal{T} = \omega$ et $C = A[[X]]$. Alors $XA[[X]]$ est un voisinage pour σ et est fermé, donc $A[[X]]/(X) = A$ est l. c.

Inversement, si A est l. c. pour δ , et si $C = A[[X]]$, alors C est complet, et σ est définie par les $X^r A[[X]]$. Comme les quotients $A[[X]]/X^r A[[X]]$ sont encore $A[X]/X^r A[X]$, on a, pour $r \geqslant 1$, un A-module de type fini, donc linéairement compact puisque A l'est. Finalement C est l. c. pour σ , et le théorème est démontré.

Remarque. - Si A est noethérien, le seul cas d'application de ce théorème est donc celui où A est semi-local complet ; il en est alors de même de $C = A_{\mathcal{T}}\{X\}$, et on a $\mathcal{T} = \omega$. Le cas non noethérien dépendrait de la connaissance des anneaux l. c.

Notion de $\mathcal{T}$-série. – On va plonger $A_{\mathcal{T}}\{X\}$ en un anneau linéairement compact S , qui se réduit à $A[[X]]$ si $\mathcal{T} = \omega$ et si A l. c. pour la topologie discrète. On se bornera au cas usuel où $\mathcal{T}$ est tel que les A/m_i sont l. c. pour δ .

Définition. – Supposons que les quotients A/m_i soient linéairement compacts et soit $\mathcal{T}'$ la topologie définie sur $B = A[X]$ par les $W_{i,r} = m_i B + X^r B$ avec $X = (X_1 , \dots , X_h)$. On pose $S_{\mathcal{T}}(X) = \hat{B}_{\mathcal{T}'}$ soit le séparé-complété de B pour $\mathcal{T}'$ soit $\varprojlim_{i,r}(A[X]/W_{i,r})$. On a le lemme suivant.

LEMME II.1. – $\mathcal{T}'$ est moins fine que la topologie σ' .

En effet, σ' est définie par les $m_i[X] = m_i A[X]$ sur A , et on a donc un homomorphisme continu $\rho : A_{\mathcal{T}}\{X\} \dashrightarrow S_{\mathcal{T}}(X)$.

LEMME II.2. – Si $\mathcal{T}$ est séparée, ρ est injective.

En effet, on a

$$X^r m_i[X] = m_i[X] \cap X^r A[X] ,$$

et on a, pour chaque r ,

$$X^r A[X] = \bigcap_i \{X^r A[X] + m_i A[X]\}$$

(chaque coefficient de degré $< r$ est en m_i pour tout i), et donc $X^r A[X]$ est fermé, donc $X^r m_i[X]$ est fermé pour $\mathcal{T}'$, et on a donc une injection ρ d'après un théorème connu d'injectivité (par exemple [2], §1 et 2).

THÉORÈME II.2. – Si $\mathcal{T}$ est telle que A/m_i est l. c. pour la topologie discrète, alors l'anneau $S_{\mathcal{T}}(X)$ est l. c.

En effet, $\mathcal{T}'$ est telle que, pour $r \geq 1$, le quotient $A[X]/(X^r A[X] + m_i[X])$ est un A/m_i-module de type fini, donc est linéairement compact. Comme $S_{\mathcal{T}}(X)$ est complet, il est l. c. pour la topologie de la limite projective. Remarquons que, sous les hypothèses faites, A est lui-même l. c. pour $\mathcal{T}$ si, et seulement si, il est complet pour $\mathcal{T}$. Dans ce dernier cas, on a en général $S_{\mathcal{T}}(X) \neq A[[X]]$.

Remarque. – Soient A un anneau variable, de topologie linéaire $\mathcal{T}$, $CA = \hat{A}$ son séparé-complété, et i le foncteur d'inclusion dans la catégorie des A précédents de la sous-catégorie des anneaux complets, en sorte que C est adjoint à gauche de i . On a

$$C(\varinjlim P_i) = \lim \hat{P_i} ,$$

et si on munit $L_i = A_i[X_1 , \dots , X_r]$ de la topologie σ_i' (déduite de $\mathcal{T}_i$ sur A_i), alors sur

$$L = \varinjlim L_i = (\varinjlim A_i)[X] = A[X]$$

en posant $A = \varinjlim A_i$. Si $\mathcal{T}$ sur A est $\varinjlim \mathcal{T}_i$ sur les A_i , la topologie σ' sur L de celle des séries restreintes est $\sigma' = \varinjlim \sigma'_i$. On a donc

$$A\{X\} = \varinjlim A_{i_{\mathcal{T}_i}}\{X\} .$$

En particulier, si les $A_{i_{\mathcal{T}_i}}\{X\}$ sont A_i-plats pour tout i , alors $A_{\mathcal{T}}\{X\}$ est A-plat.

III. Propriétés de platitude

Dans la suite, on supposera A noethérien, et on donnera des conditions suffisantes pour que $\Delta = A_{\mathcal{T}}\{X\}$ ou $S_{\mathcal{T}}(X)$ soit plat sur A .

Par exemple, si pour tout idéal $\mathfrak{J}$ de A , on a l'égalité

$$\mathfrak{J}A[[X]] \cap A\{X\} = \mathfrak{J}A\{X\} ,$$

alors comme $A[[X]]$ est fidèlement plat, il en est de même de Δ sur A .

On utilise des conditions du type (Φ) suivant :

(Φ) Tout idéal de type fini du complété de $A[X]$ est fermé.

Cette condition (Φ) est réalisée dans les cas suivants :

(a) A est noethérien, $\mathcal{T}$ m-adique. Alors $A_{\mathcal{T}}\{X\}$ est un anneau de Zariski et satisfait à (Φ) .

(b) les A/m_i sont l. c. pour la topologie discrète, et on considère $S_{\mathcal{T}}(X) = \hat{B}_{\mathcal{T}}$ qui est l. c. pour la topologie de la limite projective ; alors $S_{\mathcal{T}}(X)$ satisfait à la condition (Φ) .

On a alors les deux théorèmes suivants.

THÉORÈME III.1. - Si A est noethérien, $\mathcal{T}$ la topologie artinienne sur A , alors l'anneau des $\mathcal{T}$-séries $S_{\mathcal{T}}(X)$ est linéairement compact et fidèlement plat sur A .

THÉORÈME III.2. - Si A est noethérien, si $\mathcal{T}$ est artinienne, définie par les $m_i A_{\mathcal{T}}\{X\}$ sont fermés en $A_{\mathcal{T}}\{X\}$, alors cet anneau est plat sur A .

Démonstration du théorème III.1. - La compacité linéaire résulte du théorème II.2 puisque les A/m_i sont artiniens, donc l. c. pour δ . On voit facilement, que, dans ce cas, $\mathcal{T}'$ définie par les $m_i A[X] + X^h A[X]$, est la borne supérieure des topologies m_λ-adiques associées aux divers maximaux homogènes de $A[X]$. Alors $S_{\mathcal{T}}(X)$ est le produit des complétés des anneaux a-diques $(A[X] , m_\lambda)$ qui sont chacun plats sur $A[X]$, et le produit est plat, car $A[X]$ est noethérien.

COROLLAIRE . - Si dans l'énoncé du théorème III.1, A est de Cohen-Macaulay (resp. Gorenstein), alors $S_{\mathcal{T}}(X)$ est de Cohen-Macaulay (resp. Gorenstein).

Pour établir le théorème III.2, on s'appuie sur le lemme suivant qui résulte de la définition du produit tensoriel de manière immédiate.

LEMME. - Si A est un anneau et E un A-module, tel qu'il existe une famille d'idéaux $\mathfrak{J}_\lambda$ $(\lambda \in L)$ de A telle que tout idéal de type fini $\mathfrak{J}$ de A soit $\mathfrak{J} = \bigcap_\lambda \mathfrak{J}_\lambda$ $(\lambda \in L'$, $L' \subseteq L)$; chaque $\mathfrak{J}_\lambda$ étant tel que $\mathfrak{J}_\lambda \otimes_A E \dashrightarrow \mathfrak{J}_\lambda E$ soit injective, alors E est A-plat.

Signalons enfin le problème suivant : Si A est linéairement compact pour la topologie discrète, est-ce que $A[[X]]$ est plat comme A-module (on sait que c'est vrai si A est noethérien, et alors A et $A[[X]]$ sont semi-locaux complets) ?

BIBLIOGRAPHIE

[1] GRECO (S.) and SALMON (P.). - Topics in m-adic topologies. - Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 1971 (Ergebnisse der Mathematik, 58).

[2] KURKE (H.). - Topologische Methoden in der Theorie der kommutative Ringe, Math. Nachr., t. 39, 1969, p. 33-85.

[3] SALMON (P.). - Sur les séries formelles restreintes, Bull. Soc. math. France, t. 92, 1964, p. 385-410.

[4] TATE (J.). - Rigid analytic spaces, Invent. Math., Berlin, t. 12, 1971, p. 257-289.

[5] WARNER (S.). - Linearly compact noetherian rings, Math. Annalen, t. 178, 1968, p. 53-61.

[6] ZELINSKY (D.). - Linearly compact modules and rings, Amer. J. Math., t. 75, 1953, p. 79-90.

(Texte reçu le 25 janvier 1975)

Jean GUÉRINDON
Département de Mathématiques et Informatique
Université de Rennes-I
Boîte postale 25-A
35031 RENNES CEDEX