

# SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

MASSOUD HALEK-SHAHMIRZADI

**Sur le nombre de générateurs des idéaux à gauche d'une algèbre de Weyl**

*Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres*, tome 28, n° 1 (1974-1975), exp. n° 27,  
p. 1-5

[http://www.numdam.org/item?id=SD\\_1974-1975\\_\\_28\\_1\\_A21\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SD_1974-1975__28_1_A21_0)

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1974-1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

SUR LE NOMBRE DE GÉNÉRATEURS DES IDÉAUX À GAUCHE  
 D'UNE ALGÈBRE DE WEYL

par Massoud MALEK-SHAHMIRZADI

(d'après T. Stafford [8])

Soit  $k$  un corps commutatif de caractéristique  $0$ . On appelle algèbre de Weyl, l'algèbre  $A_n(k)$ , définie par  $2n$  générateurs  $p_1, q_1, p_2, q_2, \dots, p_n, q_n$ , et les relations  $[p_i, q_j] = \delta_{ij} \cdot 1$  (où  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker)  $[p_i, p_j] = [q_i, q_j] = 0$  (où  $[x, y] = xy - yx$ ). L'algèbre  $A_n(k)$  est quasi simple (i. e. sans idéal bilatère propre), de centre  $k$ , noethérien à gauche et à droite ([1], chapitre 4) intègre ; sa dimension de Krull est égale à  $n$  (cf. [2]), ainsi que sa dimension homologique globale.

T. STAFFORD et ROBSON ([6] et [8]) viennent de démontrer, entre autres, que tout module projectif de type fini sur  $A_n(k)$ , dont le rang est  $> n$ , est libre, et que tout idéal à droite (resp. à gauche) de  $A_n(k)$  possède  $n + 1$  générateurs. Le but de cet exposé est de présenter le second de ces résultats.

Soient  $A$  un anneau,  $M$  un  $A$ -module à gauche. On note  $\Gamma(M)$  l'ensemble des couples  $(K, N)$ , où  $K$  et  $N$  sont des sous-modules de  $M$ , et  $N \not\subseteq K$ . On pose :

$$\Gamma_c(M) = \{(K, N) \in \Gamma(M) \text{ tel que } K/N \text{ est artinien}\}$$

⋮

$$\Gamma_n(M) = \{(K, N) \in \Gamma(M), \exists K \supseteq K_1 \supseteq \dots \supseteq K_i \supseteq \dots \supseteq K_1 \supseteq \dots \supseteq N \text{ tel que } (K_i, K_{i+1}) \in \bigcup_{m < n} \Gamma_m(M)\}.$$

Définition 1 (cf. [2], [5]). - La dimension de Krull de  $M$  (en abrégé  $K\text{-dim } M$ ) est (si elle existe) le plus petit entier  $n$  tel que  $\Gamma_n(M) = \Gamma(M)$ . On pose

$$K\text{-dim}(0) = -1.$$

La dimension de Krull de  $A$  est la  $K$ -dimension du  $A$ -module à gauche  $A_s$ .

PROPOSITION 1 (cf. [2], [4]). -

(a) On a  $K\text{-dim } M = \sup\{K\text{-dim } N, K \dim M/N\}$  pour tout sous-module  $N$  de  $M$ .

(b) Si  $A$  est un anneau semi-premier, et si  $K\text{-dim } A = n$ , alors  $A$  admet un anneau de quotient.

Définition 2 [5]. - Soient  $M$  un  $A$ -module, et  $p$  un entier  $\geq 0$ . Le module  $M$  est dit  $p$ -critique si  $K\text{-dim } M = p$  et si, pour tout sous-module  $N \neq 0$ ,  $K\text{-dim } M/N < p$ .

PROPOSITION 2 (cf. [3]).

- (a) Tout sous-module d'un module p-critique est p-critique.  
 (b) Si  $K\text{-dim } M < \infty$ , le module  $M$  possède des sous-modules critiques.

PROPOSITION 3. - Si  $M$  est un  $A$ -module noethérien et  $K\text{-dim } M = p$ , il existe une chaîne finie de sous-modules

$$0 = N_0 \subset N_1 \subset \dots \subset N_n = M,$$

telle que  $N_{i+1}/N_i$  ( $i = 0, \dots, n$ ) est un  $A$ -module monogène et critique.

Preuve. - On utilise la proposition 2 (b) et l'hypothèse noethérienne.

Définition 3. - Soit  $M$  un  $A$ -module noethérien, et  $K\text{-dim } M = p$ . On définit la longueur de  $M$  (en abrégé :  $\text{long } M$ ) comme la borne inférieure des longueurs des chaînes de sous-modules définies dans la proposition 3.

LEMME 1. - Soit  $D$  un  $A$ -module avec  $K\text{-dim } D = n$ . Soit  $C$  un sous-module p-critique de  $D$  avec  $p \leq n$ , et tel que  $D/C$  soit monogène. Si la suite exacte

$$(1) \quad 0 \longrightarrow C \longrightarrow D \longrightarrow D/C \longrightarrow 0$$

n'est pas scindée, il existe un sous-module  $D'$  de  $D$  monogène, tel que

$$K\text{-dim } D/D' < p.$$

Preuve. - Par hypothèse, il existe  $a \in D$  tel que  $D = C + Aa$  et, puisque la suite (1) n'est pas scindée,  $Aa \cap C \neq (0)$ . Posons  $D' = Aa$ ; on a

$$K\text{-dim } D/D' = K\text{-dim } C/(C \cap Aa) < p$$

puisque  $C$  est p-critique.

Définition 3. - On dit qu'un  $A$ -module  $M$  est complètement fidèle, s'il n'est pas nul et si, pour tout sous-module  $N$ ,  $N \neq M$ ,  $N \neq 0$ , on a

$$\text{Ann}_A(M/N) = \text{Ann}_A(N) = (0).$$

En particulier, sur un anneau quasi-simple tout module non nul est complètement fidèle.

LEMME 2. - Soit  $M$  un  $A$ -module noethérien et complètement fidèle. On suppose que  $K\text{-dim } M = n < K\text{-dim } A < \infty$ . Si  $C$  est un sous-module de  $M$  tel que  $M/C$  est monogène, il existe un sous-module monogène  $D$  de  $M$  tel que  $K\text{-dim } M/D < n$ .

Preuve. - On raisonne par récurrence sur la longueur  $m_C$  de  $C$ . Si  $m_C = 0$ , alors  $C = (0)$ , et il suffit de prendre  $D = M$ . Supposons le lemme démontré pour tous les couples  $(M', C')$ ,  $C' \subseteq M'$ ,  $K\text{-dim } M' \leq n$ ,  $M'$  complètement fidèles et noethériens,  $M'/C'$  monogène, et  $\text{long}(C') \leq m_C - 1$ . Par définition de la longueur de  $C$ , il existe une chaîne :

$$C = C_0 \supset C_1 \supset \dots \supset C_{m_C} = (0),$$

où  $C_i/C_{i+1}$  est un  $A$ -module monogène et critique. Posons  $m = \hat{m}_C - 1$ . Alors  $(M/C_m, C/C_m)$  vérifie l'hypothèse de récurrence.

Donc il existe un sous-module monogène  $D'/C_m$  tel que  $K\text{-dim } M/D' < n$ . Si la suite exacte

$$(2) \quad 0 \longrightarrow C_m \longrightarrow D' \longrightarrow D'/C_m \longrightarrow 0$$

n'est pas scindée, il existe, d'après le lemme 1, un sous-module monogène  $D''$  tel que  $K\text{-dim } D'/D'' < n$ . D'où

$$K\text{-dim } M/D'' = \sup\{K\text{-dim } D'/D'', K\text{-dim } M/D'\} < n.$$

Etudions le cas où la suite (2) est scindée. On a alors  $D'' \simeq D'/C_m \oplus C_m$ ; puisqu'il est monogène,  $D'/C_m$  est isomorphe à  $A/J$ , où  $J$  est un idéal à gauche de  $A$ , nécessairement non nul car

$$K\text{-dim } A > K\text{-dim } M \geq K\text{-dim } C_m.$$

Puisque  $C_m$  est un sous-module non nul du module complètement fidèle  $M$ , on a  $J.C_m \neq (0)$ , donc il existe  $c \in C_m$  tel que  $\text{Ann}_A(c) \not\subseteq J$ . Soit  $D'' = D'/C_m \oplus Ac$ ; alors  $D'' \simeq A/J \oplus A/I$ , où  $I = \text{Ann}_A(c) = \{y \in A, yc = 0\}$ . On a

$$K\text{-dim}(D'/D'') = K\text{-dim}(C_m/Ac) < p$$

puisque  $C_m$  est  $p$ -critique. Considérons la suite exacte bien connue

$$0 \longrightarrow A/(I \cap J) \xrightarrow{\alpha} \left(\frac{A}{I}\right) \oplus \left(\frac{A}{J}\right) = D'' \longrightarrow A/(I + J) \longrightarrow 0.$$

Puisque  $A/I \simeq Ac$  est  $p$ -critique, on a  $K\text{-dim}(A/(I + J)) < p$ . Posons  $\text{Im } \alpha = D$ ; alors  $D$  est un module monogène, et  $K\text{-dim } D''/D < p$ . Il suffit alors de remarquer que :

$$K\text{-dim } M/D = \sup\{K\text{-dim } D''/D, K\text{-dim } M/D''\}$$

$$K\text{-dim } M/D'' = \sup\{K\text{-dim } M/D', K\text{-dim } D'/D''\}.$$

De la seconde de ces égalités, il résulte que  $K\text{-dim } M/D'' < n$ , et de la première que  $K\text{-dim } M/D < n$ .

**THÉORÈME.** - Si  $M$  est un  $A$ -module noethérien complètement fidèle, et

$$K\text{-dim } M = n < K\text{-dim } A < \infty,$$

alors  $M$  peut être engendré par  $n + 1$  éléments.

Preuve. - Puisque  $M$  est noethérien, il possède un sous-module maximal  $N$  et, par suite,  $M/N$  est monogène. Le lemme 2 prouve alors l'existence d'un sous-module monogène  $D_1$  tel que  $K\text{-dim } M/D_1 = n_1 < n$ . En appliquant à  $M/D_1$ , etc. le raisonnement précédent, et en utilisant l'hypothèse noethérienne, il existe une chaîne finie :

$$0 \subset D_1 \subset D_2 \subset \dots \subset D_r \subset M, \quad r \leq n,$$

dont chaque facteur est monogène. Donc  $M$  peut être engendré par  $r + 1 \leq n + 1$

éléments.

PROPOSITION 4. - Soit  $A$  un anneau semi-premier tel que  $K\text{-dim } A = n$ . Si  $I$  est un idéal à gauche de  $A$ , il existe  $c \in I$ , tel que  $K\text{-dim } I/Ac < n$ .

Preuve. - Si  $I$  est  $n$ -critique, ou bien si  $I$  est monogène, ou bien si  $K\text{-dim } I < n$ , le résultat est évident.

Supposons donc que  $K\text{-dim } I = n$ . Puisque l'anneau  $A$  admet un anneau de quotient, l'idéal  $I$  n'est pas nilpotent. Donc il existe  $c \in I$  tel que

$$\text{Ann}_A(c) \cap I = (0).$$

Considérons la suite :

$$I \not\subseteq Ic \not\subseteq Ic^2 \not\subseteq \dots \not\subseteq Ic^i \not\subseteq \dots$$

Puisque  $K\text{-dim } I = n$ , il existe  $m \in \mathbb{N}$  tel que

$$K\text{-dim } \frac{Ic^m}{Ic^{m+1}} < n.$$

De l'isomorphisme  $Ic^m/Ic^{m+1} \simeq I/Ic$  (induit par la multiplication par  $c^m$ ) résulte alors que  $K\text{-dim } I/Ic < n$ . Comme  $Ic \subseteq Ac$ , on a  $K\text{-dim } I/Ac < n$ . Il suffit d'appliquer le théorème à  $M = I/Ac$  et à  $K\text{-dim } I/Ac = n_1 \leq n - 1$ .

COROLLAIRE. - Soit  $A$  un anneau quasi simple, noethérien à gauche, tel que  $K\text{-dim } A = n$ . Tout idéal à gauche  $I$  de  $A$  peut être engendré par  $n + 1$  éléments.

Preuve. - D'après la proposition 4, il existe  $c \in J$  tel que  $K\text{-dim}(I/Ac) = p < n$ . Le  $A$ -module  $I/Ac$  est noethérien et complètement fidèle, de dimension de Krull  $p < n = K\text{-dim } A$ . D'après le théorème,  $I/Ac$  peut être engendré par  $p + 1$  éléments. Donc il suffit de  $n + 1$  éléments pour engendrer  $I$ .

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] DIXMIER (J.). - Algèbres enveloppantes. - Paris, Gauthier-Villars, 1974 (Cahiers scientifiques, 37).
- [2] GABRIEL (P.) et RENTSCHLER (R.). - Sur la dimension des anneaux et des ensembles ordonnés, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 265, 1967, Série A, p. 712-714.
- [3] GOLDIE (A.). - The structure of noetherian rings, "Lectures on rings and modules", p. 213-321. - Berlin, Springer-Verlag, 1972 (Lecture Notes in Mathematics, 246).
- [4] KRAUSE (G.). - On the Krull-dimension of left noetherian left Matlis rings, Math. Z., t. 118, 1970, p. 207-214.
- [5] ROOS (J. E.). - Détermination de la dimension homologique globale des algèbres de Weyl, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 274, 1972, Série A, p. 23-26.
- [6] ROBSON (J. C.). - Noetherian simple rings, Oberwolfach, Mai 1975.

- [7] STAFFORD (T.). - On the number of generators of right ideals in simple rings, Oberwolfach, Avril 1975.
- [8] GOLDIE (A.). - Some recent developments in ring theory, Israel J. of Math., t. 19, 1974, p. 153-168.

(Texte reçu le 10 juin 1975)

Massoud MALEK-SHAHMIRZADI  
Maison des Arts et Métiers  
Rue Pierre Massé  
75014 PARIS

---