Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Joachim Lambeck

Localisation et dualité

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 28, nº 1 (1974-1975), exp. nº 25, p. 1

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1974-1975__28_1_A19_0>

Séminaire P. DUBREIL
(Algèbre)
28e année, 1974/75, n° 25, 1 p.

20 mai 1975

LOCALISATION ET DUALITÉ

par Joachim LAMBECK

Cet exposé est le résumé d'un travail en commun avec B. A. RATTRAY.

Tout couple de foncteurs adjoints $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$, $U : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$, avec adjonctions $\eta : \mathrm{id} \longrightarrow UF$ et $\varepsilon : FU \longrightarrow \mathrm{id}$, donne une équivalence entre la sous-catégorie pleine $\mathrm{Fix}(UF , \eta)$ de $\mathcal{A}$ telle que $\eta(A)$ est un isomorphisme et la sous-catégorie pleine $\mathrm{Fix}(FU , \varepsilon)$ de $\mathcal{B}$ telle que $\varepsilon(A)$ est un isomorphisme. D'un intérêt particulier est le cas où (UF , η) est idempotent, ce qui est la même chose que dire que (FU , ε) est idempotent. Cette situation est illustrée par les dualités bien connues de STONE et GEL'FAND. Si $\mathcal{A}$ est une catégorie additive complète, et I un objet de $\mathcal{A}$, K-injectif et co-petit, on peut prendre $F = \mathrm{Hom}(- , I)$, et obtenir que $\mathrm{Fix}(UF , \eta)$ est la fermeture $\mathcal{L}(I)$ de I par limites dans $\mathcal{A}$. La situation est illustrée par la dualité de Pontrjagin et par l'équivalence de Morita. En particulier, si $\mathcal{A}$ est la catégorie des R-modules continus, et I un R-module quasi-injectif muni de la topologie discrète, nous obtenons une dualité entre $\mathcal{L}(I)$ et la sous-catégorie pleine de E Mod cogénérée par ${}_E I$. Si I est un cogénérateur quasi-injectif ou complètement réductible, $\mathcal{L}(I)$ contient exactement les R-modules séparés et complets dans une topologie continue dans la topologie I-adique.

Si I est un injectif "joli", on doit supposer aussi que ces modules sont divisibles sans torsion par rapport à I . Si I est injectif et artinien, $\mathcal{L}(I)$ comprend toutes les limites inverses des R-modules artiniens et divisibles sans torsion par rapport à I . En particulier, si R est noethérien commutatif, et si I est l'enveloppe injective de R/P , où P est un idéal premier, on obtient une dualité entre les catégories des R_p-modules pro-artiniens et des $\hat{R}_p$-modules abstraits. On peut en déduire des résultats connus de LEFSCHETZ, KAPLANSKY et MATLIS.

(Texte reçu le 2 juin 1975)

Joachim LAMBECK
Mathématiques
Université McGill
MONTREAL, Québec
(Canada)