MICHEL PAUGAM

Comportement des μ_i de Bass dans les extensions plates

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 28, n° 1 (1974-1975), exp. n° 22, p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1974-1975__28_1_A16_0>

Séminaire P. DUBREIL
(Algèbre)
28e année, 1974/75, n° 22, 9 p.

28 avril 1975

COMPORTEMENT DES μ_i DE BASS DANS LES EXTENSIONS PLATES

par Michel PAUGAM

Tous les anneaux considérés sont commutatifs unitaires et noethériens. Un homomorphisme d'anneaux met en correspondance les éléments unités. Tous les modules sont unitaires.

RÉSUMÉ. - Si $\varphi : A \dashrightarrow B$ est un homomorphisme local d'anneaux locaux A et B, tel que B soit plat sur A, et si k désigne le corps résiduel de A, on étudie ici des cas particuliers où, étant donné un A-module M, on a pour les invariants μ_i relatifs aux idéaux maximaux, la relation :

$$\mu_n^B(M \otimes_A B) \leqslant \sum_{i+j=n} \mu_i^A(M)\ \mu_j^{B\otimes_A k}(B \otimes_A k) .$$

0. Introduction.

0.1. Définition ([2], §2). - Soient A un anneau, M un A-module ; on appelle résolution injective minimale de M une suite exacte

$$0 \dashrightarrow M \dashrightarrow E_0(M) \dashrightarrow \ldots \dashrightarrow E_i(M) \xrightarrow{d_i} E_{i+1}(M) \dashrightarrow \ldots$$

où, pour tout $i \geqslant 0$, $E_i(M)$ est une enveloppe injective de $\ker d_i$.

La décomposition de $E_i(M)$ en somme directe de modules injectifs indécomposables permet de définir les $\mu_i^A(\mathfrak{p}, M)$ par l'équation

$$E_i(M) = \bigoplus_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Spec}(A)} \mu_i^A(\mathfrak{p}, M).E_A(A/\mathfrak{p}) ,$$

où μE désigne une somme directe de μ copies de E, et $E_A(A/\mathfrak{p})$ l'enveloppe injective de $A/\mathfrak{p}$.

0.2. Propriétés des μ_i de Bass ([2], §2). - Soient A un anneau, $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A, et M un A-module ; alors :

0.2.1 : Si S est une partie multiplicative de A et si $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$, pour tout entier i, on a

$$\mu_i(\mathfrak{p}, M) = \mu_i(S^{-1}\mathfrak{p}, S^{-1}M) .$$

0.2.2 : $\mu_i(\mathfrak{p}, M) = \dim_{k(\mathfrak{p})} \mathrm{Ext}^i_{A_\mathfrak{p}}(k(\mathfrak{p}), M_\mathfrak{p})$, où $k(\mathfrak{p}) = A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$.

En particulier, si M est de type fini, $\mu_i(\mathfrak{p}, M) < +\infty$ quel que soit $\mathfrak{p}$ et $i \geqslant 0$.

0.2.3 : Si $x \in \mathfrak{p}$ n'est diviseur de zéro ni dans A ni dans M, pour tout $i \geqslant 0$, on a

$$\mu_i^{A/xA}(\mathfrak{p}/xA, M/xM) = \mu_{i+1}^A(\mathfrak{p}, M) .$$

0.3. Définition ([12] 1-4).- Soit A un anneau local de radical $\mathfrak{m}$. Soit M un A-module de type fini non nul, on appelle profondeur de M, et l'on note $\operatorname{prof}_A M$, l'entier défini par

$$\operatorname{prof}_A M = \inf \{i \in \underline{N} \ ; \ \mu_i^A(\mathfrak{m}, M) \neq 0\} .$$

0.4. PROPOSITION ([2] 3-3). - Soient A un anneau local, et M un A-module de type fini non nul de dimension injective finie, alors on a

$$\operatorname{prof}_A M \leqslant \dim_A M \leqslant \operatorname{di}_A M \quad \text{et} \quad \operatorname{di}_A M = \operatorname{prof}_A A .$$

($\operatorname{di}_A M$ désigne la dimension injective de M, et $\dim M$ la dimension de Krull.)

1. Sur les μ_0 d'un produit tensoriel de modules.

1.1. LEMME. - Soient A et B deux anneaux, $\varphi : A \longrightarrow B$ un homomorphisme, et F un B-module muni d'une structure de A-module plat par φ. Si $u : M \longrightarrow N$ est un homomorphisme essentiel de A-modules, alors $u \otimes 1_F : M \otimes_A F \longrightarrow N \otimes_A F$ est un homomorphisme essentiel de B-modules.

Preuve. - D'après [9] (th. 1.2 (iii)), il existe un ensemble ordonné filtrant I et un système inductif de A-modules libres de type fini F_i $(i \in I)$ tel que $F = \varinjlim F_i$ en tant que A-module.

D'après [5] (lemme 2, p. 358), $M \otimes F_i \longrightarrow N \otimes_A F_i$ est A-essentiel, $\forall\, i \in I$; il en est donc de même du A-homomorphisme

$$\varinjlim(M \otimes F_i) \longrightarrow \varinjlim(N \otimes F_i) \quad \text{par [1] (Th. 1.1 (5))},$$

et comme le produit tensoriel commute aux limites inductives, on en déduit que $u \otimes 1_F$ est A-essentiel. Mais puisque $u \otimes 1_F$ est de plus B-injectif, $u \otimes 1_F$ est aussi B-essentiel.

1.2. PROPOSITION. - Soient A et B deux anneaux, M un A-module, F un B-module, et $\varphi : A \longrightarrow B$ un homomorphisme tel que F soit un A-module plat. Alors, pour tout idéal premier $\mathfrak{q}$ de B, si $\mathfrak{p} = \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$, on a

$$\mu_0^B(\mathfrak{q}, M \otimes_A F) = \mu_0^A(\mathfrak{p}, M).\mu_0^B(\mathfrak{q}, F/\mathfrak{p}F) .$$

Preuve. - Appliquons (1.1) en prenant pour N une enveloppe injective $E_A(M)$ du A-module M ; l'homomorphisme canonique de $M \otimes_A F$ dans $E_A(M) \otimes_A F$ est alors B-essentiel. On a donc, par [5] (prop. 8, p. 359) un isomorphisme de B-modules

$$E_B(M \otimes_A F) \simeq E_B(E_A(M) \otimes_A F) ,$$

et en particulier, pour tout $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} M$,

$$E_B(A/\mathfrak{p} \otimes_A F) \simeq E_B(E_A(A/\mathfrak{p}) \otimes_A F) .$$

En écrivant alors les décompositions de $E_A(M)$ et des $E_B(F/\mathfrak{p}F)$ en injectifs indécomposables (0.1), et compte tenu de [3] (chapitre IV, §2, n° 6, lemme 1 et théorème 2), on obtient la décomposition :

$$E_B(M \otimes_A F) = \bigoplus_{q \in \mathrm{Ass}_B(M \otimes_A F)} \mu_0^A(\varphi^{-1}(q) , M) . \mu_0^B(q , F/\varphi^{-1}(q).F) . E_B(B/q)$$

et la formule annoncée qui améliore les propositions 1 et 2 de [7].

1.3. Remarque. - Sous les hypothèses de la proposition (1.2), on a aussi

$$\mu_0^B(q , M \otimes_A F) = \mu_0^A(\mathfrak{p} , M) . \mu_0^{B \otimes_A k(\mathfrak{p})}(q.B \otimes_A k(\mathfrak{p}) , F \otimes_A k(\mathfrak{p})) ,$$

où $k(\mathfrak{p})$ est le corps résiduel de $A_{\mathfrak{p}}$. En effet, en vertu de (0.2.1), il suffit de prouver que

$$\mu_0^{B_q}(q.B_q , F_q/\mathfrak{p}F_q) = \mu_0^{B_q/\mathfrak{p}B_q}(q.B_q/\mathfrak{p}B_q , F_q/\mathfrak{p}F_q) ,$$

mais l'homomorphisme $A_{\mathfrak{p}} \longrightarrow B_q$ déduit de φ étant local, il suffit d'établir la relation lorsque A et B sont locaux d'idéaux maximaux respectifs $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{n}$ avec $\varphi^{-1}(\mathfrak{n}) = \mathfrak{m}$. Or l'isomorphisme de $(B/\mathfrak{n})$-espaces vectoriels

$$\mathrm{Hom}_B(B/\mathfrak{n} , F/\mathfrak{m}F) \simeq \mathrm{Hom}_{B/\mathfrak{m}B}(B/\mathfrak{n} , F/\mathfrak{m}F)$$

implique

$$\mu_0^B(\mathfrak{n} , F/\mathfrak{m}F) = \mu_0^{B/\mathfrak{m}B}(\mathfrak{n}/\mathfrak{m}B , F/\mathfrak{m}F) \quad \text{par } (0.2.2).$$

2. Sur le μ d'indice égal à la profondeur, d'un produit tensoriel de modules de type fini.

2.1. LEMME. - *Soit A un anneau local d'idéal maximal $\mathfrak{m}$; soit M un A-module de type fini non nul de profondeur $n \geq 1$. Soit x un élément de $\mathfrak{m}$ non diviseur de zéro dans M, alors on a :*

$$\mu_{n-1}^{A/xA}(\mathfrak{m}/xA , M/xM) = \mu_{n-1}^A(\mathfrak{m} , M/xM) = \mu_n^A(\mathfrak{m} , M) .$$

Preuve. - La deuxième égalité est connue ([11], IV. 13 et 14) ; établissons la première. Soit $\xi = (x , \dots , x_n)$ une M-suite maximale de A ; posons $A' = A/xA$, $M' = M/xM$, $k = A/\mathfrak{m}$. On a un isomorphisme de k-espaces vectoriels

$$\mathrm{Hom}_{A'}(k , M/\xi M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(k , M/\xi M) .$$

Par suite, $\dim_k \mathrm{Ext}_{A'}^{n-1}(k , M') = \dim_k \mathrm{Ext}_A^{n-1}(k , M')$ par [11] (IV. 13, prop. 5), et finalement

$$\mu_{n-1}^{A/xA}(\mathfrak{m}/xA , M/xM) = \mu_{n-1}^A(\mathfrak{m} , M/xM) \quad \text{par } (0.2.2).$$

La proposition qui suit généralise (1.24) de [8].

2.2. PROPOSITION. - *Soient A et B deux anneaux locaux d'idéaux maximaux respectifs $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{n}$. Si M est un A-module de type fini non nul de profondeur m, si N est un B-module de type fini non nul plat sur A, et si $N \otimes_A k$ est un $(B \otimes_A k)$-module de profondeur n, alors $M \otimes_A N$ est de profondeur $m + n$, et l'on a*

$$\mu^B_{m+n}(\mathfrak{n}\ ,\ M \otimes_A N) = \mu^A_m(\mathfrak{m}\ ,\ M).\mu_n^{B\otimes_A k}(\mathfrak{n}/\mathfrak{m}B\ ,\ N \otimes_A k)\ .$$

Démonstration. - D'après [6] (6.3.1), on sait que $\mathrm{prof}_B(M \otimes_A N) = m + n$. Raisonnons par récurrence sur $p = \mathrm{prof}_B(M \otimes_A N)$.

1° Si $p = 0$, alors $\mathrm{prof}\ M = \mathrm{prof}(N \otimes k) = 0$, et la formule de la remarque (1.3) dans le cas local donne le résultat voulu.

2° Si $p > 0$, supposons la formule vraie à l'ordre $p - 1$.

(a) Si $m > 0$, soit $x \in \mathfrak{m}$ un élément M-régulier, et posons $A' = A/xA$, $B' = B/xB$, $M' = M/xM$, $N' = N/xN$; on a

$$B' \otimes_{A'} k = B \otimes_A k \quad \text{et} \quad N' \otimes_{A'} k = N \otimes_A k\ .$$

La suite exacte $0 \longrightarrow M \xrightarrow{x.} M \longrightarrow M' \longrightarrow 0$ (où $x.$ désigne la multiplication par x), donne, puisque N est A-plat, la suite exacte :

$$0 \longrightarrow M \otimes N \xrightarrow{x.} M \otimes N \longrightarrow M' \otimes N \longrightarrow 0\ .$$

Donc x est aussi $(M \otimes N)$-régulier et, de plus,

$$M' \otimes_{A'} N' = (M \otimes_A N)/x.(M \otimes_A N)\ .$$

Comme

$$\mathrm{prof}_{A'} M' = m - 1\ , \qquad \mathrm{prof}_{B'}(M' \otimes_{A'} N') = \mathrm{prof}_B(M \otimes N) - 1$$

et

$$\mathrm{prof}_{B'\otimes_{A'}k'}(N' \otimes_A k) = \mathrm{prof}_{B\otimes_A k}(N \otimes k) = n\ ,$$

l'hypothèse de récurrence appliquée à A' , B' , M' , N' donne

$$\mu^{B'}_{m+n-1}(\mathfrak{n}'\ ,\ M' \otimes_{A'} N') = \mu^{A'}_{m-1}(\mathfrak{m}'\ ,\ M').\mu^{B'\otimes_{A'}k}(\mathfrak{n}'/\mathfrak{m}' B'\ ,\ N' \otimes_{A'} k)$$

avec $\mathfrak{m}' = \mathfrak{m}/xA$, $\mathfrak{n}' = \mathfrak{n}/xB$. Comme $\mathfrak{n}'/\mathfrak{m}' B' = \mathfrak{n}/\mathfrak{m}B$, d'après le lemme (2.1), on peut écrire

$$\mu^B_{m+n}(\mathfrak{n}\ ,\ M \otimes_A N) = \mu^A_m(\mathfrak{m}\ ,\ M).\mu_n^{B\otimes k}(\mathfrak{n}/\mathfrak{m}B\ ,\ N \otimes_A k)\ .$$

(b) Si $n = \mathrm{prof}(N \otimes k) > 0$, soit $y \in \mathfrak{n}$ un élément $(N \otimes_A k)$-régulier, alors y est N-régulier d'après [8] (1.23), et $N' = N/yN$ est un A-module plat. La suite exacte

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{y.} N \longrightarrow N' \longrightarrow 0$$

donne les isomorphismes

$$(M \otimes_A N)/(y(M \otimes_A N)) = M \otimes_A N'\ , \qquad (N \otimes_A k)/(y(N \otimes_A k)) = N' \otimes_A k$$

et montre alors que y est $(M \otimes_A N)$-régulier. On a alors

$$\mathrm{prof}_B(M \otimes_A N') = \mathrm{prof}_B(M \otimes_A N) - 1\ , \quad \mathrm{prof}_{B\otimes k}(N' \otimes_A k) = \mathrm{prof}_{B\otimes k}(N \otimes_A k) - 1\ .$$

L'hypothèse de récurrence montre que la formule est valable pour A , B , M et N' ; c'est-à-dire :

$$\mu^B_{m+n-1}(n\ ,\ M\otimes_A N') = \mu^A_m(m\ ,\ M).\mu^{B\otimes_A k}_{n-1}(n/mB\ ,\ N'\otimes_A k)\ ,$$

mais

$$\mu^{B\otimes_A k}_{n-1}(\tfrac{n}{mB}\ ,\ N'\otimes_A k) = \mu^{B\otimes_A k}_n(\tfrac{n}{mB}\ ,\ N\otimes_A k) \quad \text{et} \quad \mu^B_{m+n-1}(n\ ,\ M\otimes_A N') = \mu^B_{m+n}(n\ ,\ M\otimes_A N)$$

d'après (2.1), ce qui prouve la formule annoncée.

3. Sur les μ_i de BASS d'un module obtenu par extension plate des scalaires.

Tous les anneaux considérés dans cette dernière partie étant locaux, si A est un tel anneau et si M est un A-module, nous notons $\mu^A_i(M)$ ou $\mu_i(M)$ le μ_i relatif à l'idéal maximal de A.

3.1. PROPOSITION. - *Soient A et B deux anneaux locaux, soit k le corps résiduel de A, et $\varphi : A \longrightarrow B$ un homomorphisme local tel que B soit plat sur A. Soit M un A-module de type fini non nul, de profondeur m et de dimension injective finie $m+1$, alors, pour tout $n \geqslant m+1$, on a*

$$\mu^B_n(M\otimes_A B) \leqslant \mu^A_m(M).\mu^{B\otimes_A k}_{n-m}(B\otimes_A k) + \mu^A_{m+1}(M).\mu^{B\otimes_A k}_{n-m-1}(B\otimes_A k)\ .$$

Démonstration. - Soit L le corps résiduel de B. D'après [4] (§4 (2), p. 345 et §5 $(2)_4$, p. 349), le changement d'anneaux $B \longrightarrow B\otimes_A k$ donne naissance à la suite spectrale ayant pour terme initial et pour limite :

$$E_2^{p,q} = \mathrm{Ext}^p_{B\otimes_A k}(L\ ,\ \mathrm{Ext}^q_B(B\otimes k\ ,\ M\otimes_A B)) \underset{p}{\Longrightarrow} \mathrm{Ext}^n_B(L\ ,\ M\otimes_A B)\ .$$

Du fait que B est plat sur A, on a un isomorphisme de B-modules :

$$\mathrm{Ext}^q_B(B\otimes_A k\ ,\ M\otimes_A B) \simeq \mathrm{Ext}^q_A(k\ ,\ M)\otimes_A B\ .$$

Grâce à la propriété (0.2.2) des μ_i, on déduit de ces relations les isomorphismes de L-espaces vectoriels :

$$E_2^{p,q} \simeq L^{\mu_q(M).\mu_p(B\otimes k)} \quad \text{et} \quad \mathrm{Ext}^n_B(L\ ,\ M\otimes B) \simeq L^{\mu_n(M\otimes B)}\ .$$

Comme $\mathrm{prof}_A\ M = m$ et $\mathrm{di}_A\ M = m+1$, on a $E_2^{p,q} = 0$ pour $q \neq m\ ,\ m+1$ d'après (0.2.2) et (0.3). Pour tout $n \geqslant m+1$, on a donc $E_2^{u,n-u} = 0$ pour $n-u \neq m\ ,\ m+1$ et par suite ([4] XV, prop. 5.1), pour tout $n \geqslant m+1$, $E_\infty^{u,n-u} = 0$ pour $u \neq n-m-1\ ,\ n-m$. La proposition (XV, 5.5) de [4] donne alors la suite exacte

$$0 \longrightarrow E_\infty^{n-m,m} \longrightarrow H^n \longrightarrow E_\infty^{n-m-1,m+1} \longrightarrow 0\ .$$

Il en résulte que, paur $n \geqslant m+1$,

$$\mu^B_n(M\otimes B) = \dim_L H^n = \dim_L E_\infty^{n-m,m} + \dim_L E_\infty^{n-m-1,m+1}\ .$$

Afin de comparer les termes E_∞ aux termes E_2, rappelons les deux résultats suivants ([4] (5.2) et (5.2a), page 325) :

3.2. LEMME. - *Soient r et s des entiers tels que $r < s \leqslant +\infty$; si $E_r^{u,v} = 0$ pour $u+v = p+q-1$, $p-s < u \leqslant p-r$, alors on a un monomorphisme*

$$E_s^{p,q} \longrightarrow E_r^{p,q}$$

3.3. LEMME. - Soient r et s des entiers tels que $r < s \leq +\infty$. Si $E_r^{u,v} = 0$ pour $u + v = p + q + 1$, $p + r \leq u < p + s$ et si de plus s est fini ou si la filtration est faiblement convergente, alors on a un épimorphisme $E_r^{p,q} \longrightarrow E_s^{p,q}$.

Comparons d'abord $E_\infty^{n-m-1,m+1}$ et $E_2^{n-m-1,m+1}$; appliquons (3.2) avec $r = 2$, $s = +\infty$, $p = n - m - 1$, $q = m + 1$. On a $E_2^{u,v} = 0$ pour $u + v = n - 1$ et $u \leq n - m - 3$ d'après les hypothèses sur le module M et parce que la suite spectrale est du premier quadrant.

On en déduit un monomorphisme

$$E_\infty^{n-m-1,m+1} \longrightarrow E_2^{n-m-1,m+1}$$

et par conséquent,

$$\dim_L E_\infty^{n-m-1,m+1} \leq \dim_L E_2^{n-m-1,m+1} .$$

En appliquant (3.3) avec $r = 2$, $s = +\infty$, $p = n - m$, $q = m$, puisque $E_2^{u,v} = 0$ pour $u + v = n + 1$ et $u \geq n - m + 2$, on obtient un épimorphisme

$$E_2^{n-m,m} \longrightarrow E_\infty^{n-m,m}$$

et alors

$$\dim_L E_\infty^{n-m,m} \leq \dim_L E_2^{n-m,m} ,$$

ce qui implique, pour tout $n \geq m + 1$,

$$\mu_n(M \otimes B) = \dim_L H^n \leq \dim_L E_2^{n-m,m} + \dim_L E_2^{n-m-1,m+1}$$

et enfin

$$\mu_n^B(M \otimes B) \leq \mu_m^A(M).\mu_{n-m}^{B\otimes k}(B \otimes k) + \mu_{m+1}^A(M).\mu_{n-m-1}^{B\otimes k}(B \otimes k) .$$

3.4. Remarque. - Les lemmes (3.2) et (3.3) permettent de montrer qu'en fait, on a, pour $r \geq 3$,

$$\mu_n(M \otimes_A B) = \dim_L E_r^{n-m,m} + \dim_L E_r^{n-m-1,m+1} .$$

3.5. PROPOSITION. - Soient A et B deux anneaux locaux, soit k le corps résiduel de A, et $\varphi : A \longrightarrow B$ un homomorphisme local tel que B soit plat sur A. Soit M un A-module de type fini non nul de profondeur m et de dimension injective finie $m + 1$, et soit s la profondeur de $B \otimes_A k$. Si $M \otimes_A B$ est un B-module de dimension injective finie, alors on a

$$di_B(M \otimes B) = m + s + 1$$

et

$$\mu_{m+s+1}(M \otimes B) = \mu_m(M).\mu_{s+1}(B \otimes k) + \mu_{m+1}(M).\mu_s(B \otimes k) - \mu_m(M)\ \mu_{s+2}(B \otimes k) .$$

Preuve. - Par (0.4), on a

$$di(M) = \text{prof } A = m + 1 \quad \text{et} \quad di(M \otimes B) = \text{prof}(B) ,$$

or, par [6] (6.3.1),

$$\text{prof } B = \text{prof } A + \text{prof}(B \otimes k) = m + s + 1 .$$

En utilisant à nouveau la suite spectrale introduite dans la démonstration de (3.1), comme $E_2^{u,v} = 0$ pour $v \neq m$, $m+1$, on a en vertu de [4] (XV, 5.11) et en posant $n = \text{prof}(M \otimes B) = m + s$, les suites exactes

$$E_2^{n-1-m-1,m+1} \longrightarrow E_2^{n-m,m} \longrightarrow H^n \longrightarrow E_2^{n-m-1,m+1}$$

$$E_2^{n-m-1,m+1} \longrightarrow E_2^{n+1-m,m} \longrightarrow H^{n+1} \longrightarrow E_2^{n-m,m+1} \longrightarrow E_2^{n+2-m,m} \longrightarrow H^{n+2} .$$

Comme $\text{prof}(B \otimes k) = s = n - m$,

$$E_2^{n-m-2,m+1} = E_2^{s-2,m+1} \simeq L^{\mu_{m+1}(M)\mu_{s-2}(B\otimes k)} = 0$$

par (0.3), et $E_2^{n-m-1,m+1} = 0$. La première suite exacte donne

$$E_2^{n-m,m} \simeq H^n$$

et l'on retrouve la relation $\mu_n(M \otimes B) = \mu_m(M).\mu_{n-m}(B \otimes k)$ du §2 (prop. 2.2).

La deuxième suite exacte peut encore s'écrire

$$0 \longrightarrow E_2^{s+1,m} \longrightarrow H^{n+1} \longrightarrow E_2^{s,m+1} \longrightarrow E_2^{s+2,m} \longrightarrow 0$$

et, compte tenu de l'isomorphisme de L-espaces vectoriels,

$$E_2^{p,q} \simeq L^{\mu_q(M).\mu_p(B\otimes k)} ,$$

on obtient la relation annoncée qui confirme l'inégalité obtenue dans (3.1).

3.6. <u>Remarque</u>. - Si A est un anneau local régulier de dimension $m + 1$ $(m \geq 0)$ et si x est un élément du radical de A non diviseur de zéro dans A, alors $M = A \oplus (A/xA)$ vérifie les hypothèses de (3.1).

3.7. <u>Définition</u> (cf. [12]). - Soit A un anneau local. On dit qu'un A-module de type fini non nul M est de Gorenstein si sa profondeur est égale à sa dimension injective.

3.8. PROPOSITION. - <u>Soient</u> A <u>et</u> B <u>deux anneaux locaux, soit</u> k <u>le corps résiduel de</u> A, <u>et</u> $\varphi : A \longrightarrow B$ <u>un homomorphisme local tel que</u> B <u>soit plat sur</u> A. <u>Soit</u> M <u>un</u> A-<u>module de type fini non nul de profondeur</u> m ; <u>si</u> M <u>est un</u> A-<u>module de Gorenstein, alors on a, pour</u> $n \geq m$,

$$\mu_n^B(M \otimes B) = \mu_m^A(M).\mu_{n-m}^{B\otimes k}(B \otimes k) .$$

La proposition (3.8) améliore certains résultats de [13] (th. 2.8, page 86) ainsi que la proposition 7 de [10]. En effet, on a le résultat suivant.

3.9. COROLLAIRE. - <u>Soient</u> A <u>et</u> B <u>deux anneaux locaux, et</u> $\varphi : A \longrightarrow B$ <u>un homomorphisme local tel que</u> B <u>soit plat sur</u> A. <u>Soit</u> M <u>un</u> A-<u>module de type fini non nul ; si</u> M <u>est un</u> A-<u>module de Gorenstein et si</u> $B \otimes_A k$ <u>est un anneau de Gorenstein de dimension</u> s, <u>alors</u> $M \otimes_A B$ <u>est un</u> B-<u>module de Gorenstein, et</u>

l'on a :

$$\mu^B_{s+i}(M \otimes B) = \mu^A_i(M) \ , \quad \forall\ i \geqslant 0 \ .$$

Preuve du corollaire. - Avec les notations et le résultat de (3.8), on a :

$$\mu_n(M \otimes B) = 0 \quad \text{pour} \quad n > m + s \ ,$$

donc $di_B(M \otimes B) \leqslant m + s$ ([12], 3.3) et alors :

$$di_B(M \otimes B) = \text{prof } B = \text{prof } A + \text{prof}(B \otimes k) \quad \text{par (0.4) et [6] (6.3.1).}$$

Donc on a aussi :

$$di(M \otimes B) = \text{prof } M + \text{prof}(B \otimes k) = \text{prof}(M \otimes B) \quad \text{d'après (3.7),}$$

ce qui prouve la première assertion ; la seconde résulte du fait que $\mu_j(B \otimes k) = \delta_{j,s}$ où δ est le symbole de Kronecker.

Démonstration de la proposition 3.8. - Considérons à nouveau la suite spectrale utilisée dans la preuve de (3.1). On a $E_2^{p,q} = 0$ pour $q \neq m$, ou encore $E_2^{u,n-u} = 0$ pour $u \neq n - m$. D'après [4] (5.4, page 326), on a un isomorphisme $H^n \simeq E_\infty^{n-m,m}$. Montrons que, pour tout $n \geqslant m$, on a $E_2^{n-m,m} \simeq E_\infty^{n-m,m}$; appliquons pour cela les lemmes (3.2) et (3.3) avec $r = 2$, $s = +\infty$, $p = n - m$, $q = m$; on a $E_2^{u,v} = 0$ pour $u + v = n - 1$ et $u \leqslant n - m - 2$, car alors $v \geqslant m + 1$ et $E_2^{u,v} = 0$ pour $u + v = n + 1$ et $u \geqslant n - m + 2$, car alors $v \leqslant m - 1$. On en déduit l'isomorphisme $E_2^{n-m,m} \simeq H^n$ et l'égalité

$$\mu_n(M \otimes B) = \mu_m(M).\mu_{n-m}(B \otimes k) \ , \quad \forall\ n \geqslant m \ .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] BASS (H.). - Injective dimension in noetherian rings, Trans. Amer. math. Soc., t. 102, 1962, p. 18-29.

[2] BASS (H.). - On the ubiquity of Gorenstein rings, Math. Z., t. 82, 1963, p. 8-28.

[3] BOURBAKI (N.). - Algèbre commutative, chap. 3 et 4. Nouvelle édition. - Paris, Hermann, 1968 (Act. scient. et ind., 1293 a ; Bourbaki 28).

[4] CARTAN (H.) and EILENBERG (S.). - Homological algebra. - Princeton, Princeton University Press, 1956 (Princeton mathematical Series, 19).

[5] GABRIEL (P.). - Des catégories abéliennes, Bull. Soc. math. France, t. 90, 1962, p. 323-448 (Thèse Sc. math., Paris 1961).

[6] GROTHENDIECK (A.) et DIEUDONNÉ (J.). - Etude locale des schémas et des morphismes de schémas, chap. IV. - Paris, Presses universitaires de France, 1965 (Institut des Hautes Etudes scientifiques. Publications mathématiques, 24, p. 1-231).

[7] IVERSEN (B.). - On flat extensions of noetherian rings, Proc. Amer. math. Soc., t. 16, 1965, p. 1401-1406.

[8] KUNZ (E.). - Vorträge in "Der kanonische Modul eines Cohen-Macaulay-Rings", p. 17-24. - Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1971 (Lecture Notes in Mathematics, 238).

[9] LAZARD (D.). - Autour de la platitude, Bull. Soc. math. France, t. 97, 1969, p. 81-128 (Thèse Sc. math., Paris 1968).

[10] PAUGAM (M.). - La condition G_q de Ischebeck, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 276, 1973, Série A, p. 109-112.

[11] SERRE (J.-P.). - Algèbre locale. Multiplicités, Cours au Collège de France 1957-1958, réédité par P. Gabriel. 2e édition. - Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1965 (Lecture Notes in Mathematics, 11).

[12] SHARP (R. Y.). - Gorenstein modules, Math. Z., t. 115, 1970, p. 117-139.

[13] SHARP (R. Y.). - The Euler characteristic of a finitely generated module of finite injective dimension, Math. Z., t. 130, 1973, p. 79-93.

(Texte reçu le 3 mai 1975)

Michel PAUGAM
Mathématiques
Université de Caen
Esplanade de la Paix
14032 CAEN CEDEX