Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Thérèse Merlier

Généralisation de la notion de demi-groupe nilpotent. Application aux anneaux

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 28, n° 1 (1974-1975), exp. n° 18, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1974-1975__28_1_A12_0>

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1974-1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire P. DUBREIL
(Algèbre)
28e année, 1974/75, nº 18, 9 p.

14 avril 1975

GÉNÉRALISATION DE LA NOTION DE DEMI-GROUPE NILPOTENT. APPLICATION AUX ANNEAUX

par Thérèse MERLIER

1. Demi-groupes G-potents et G^0-potents.

DÉFINITION 1. - Un demi-groupe S est dit G-potent, s'il existe un entier n tel que S^n est un groupe G.

Si S est G-potent, et si G se réduit à un élément z, cet élément z est zéro de S, et S devient nilpotent. Les propriétés des demi-groupes G-potents généralisent donc les propriétés des demi-groupes nilpotents.

Toutefois, dans le cas où S admet un zéro, on peut donner la définition suivante

DÉFINITION 2. - Un demi-groupe S avec zéro est dit G^0-potent, s'il existe un entier n tel que S^n est un groupe avec zéro G^0.

Dans le cas où S n'admet pas de diviseurs de zéro, S est G^0-potent si, et seulement si, le demi-groupe $S^* = S - \{0\}$ est G-potent.

PROPOSITION 1. - Soient S un demi-groupe, et n un entier supérieur ou égal à 2. Alors S^n est un groupe si, et seulement si, $S^{n-1}\, a = S^{n-1}\, b$ et $aS^{n-1} = bS^{n-1}$ pour tout a et tout b de S.

(Cette propriété est une généralisation de l'axiome des quotients.)

Si S^n est un groupe, $S^n = a^n\, S^n$ pour tout a de S. Donc, de

$$aS^{n-1} \subseteq S^n = a^n\, S^n \subseteq aS^{n-1} ,$$

nous déduisons $aS^{n-1} = S^n$ pour tout a, et la condition nécessaire en résulte.

Inversement, si $S^{n-1}\, a = S^{n-1}\, b$ pour tout a et tout b, $S^{n-1}\, a = S^n$. Par suite, S^n vérifie l'axiome des quotients à droite, car

$$S^n\, x_1\, x_2 \ldots x_n = (S^{n-1}\, a)x_1 \ldots x_n = S^{n-1}(ax_1 \ldots x_n) = S^n ;$$

S^n est donc un groupe, grâce à un raisonnement symétrique.

PROPOSITION 2. - Dans un demi-groupe G^0-potent, les équivalences de Green sont égales, et les classes sont réduites à un seul élément ou au groupe G.

La classe de l'élément 0 mod $\mathcal{L}$ est évidemment réduite à cet élément 0. Si $a \equiv b\ (\mathcal{L})$, $a \neq b$, a et b distincts de 0, alors $a = xb$, $b = ya$ avec x et y éléments du demi-groupe. D'où $a = xya$ et $a = (xy)^n\, a$; donc a et de même b appartiennent à G . Les équivalences de Green sont donc égales, leurs classes étant réduites à un seul élément ou à G .

THÉORÈME 1. - Tout demi-groupe G^0-potent est extension d'un groupe avec zéro G^0 par un demi-groupe nilpotent, et réciproquement, tout demi-groupe extension d'un groupe avec zéro G^0 par un demi-groupe nilpotent est G^0-potent.

(Rappelons qu'un demi-groupe Σ est appelé extension de S par T , s'il contient S comme idéal et si le quotient de Rees de Σ par S est isomorphe à T .)

Si S est G^0-potent, $S^n = G^0$ est un groupe avec zéro, mais aussi un idéal bilatère de S . Le quotient de Rees de S par G^0 , S/G^0 , est donc un demi-groupe avec zéro, $\bar{0}$, classe de G^0 . Si $\bar{x}_1 , \bar{x}_2 , \dots , \bar{x}_n$ sont n éléments de S/G^0, $\bar{x}_1 \dots \bar{x}_n = \overline{x_1 x_2 \dots x_n} = \bar{0}$, puisque le produit $x_1 x_2 \dots x_n$ appartient à $S^n = G^0$.

Réciproquement, si $(\Sigma , \circ)$ est un demi-groupe extension de G^0 , groupe avec zéro par un demi-groupe nilpotent T , nécessairement $(\Sigma , \circ)$ est un demi-groupe égal à $G^0 \cup T^*$, où $T^* = T \setminus \{0\}$, et dans lequel le produit $\circ$ est défini à partir des produits dans G^0 et dans T de la façon suivante :

(1) si a et b appartiennent à T^* :

$$a \circ b = ab \text{ si } ab \neq 0 \text{ dans } T \text{ , appartient à } G^0 \text{ si } ab = 0 \text{ dans } T \text{ ,}$$

(2) si $g \in G^0$, $b \in T^*$:

$$g \circ b \text{ , } b \circ g \text{ appartiennent à } G^0 \text{ ;}$$

(3) si g_1 , g_2 appartiennent à G^0 :

$$g_1 \circ g_2 = g_1 g_2 \quad (\text{produit dans } G^0 \text{ }).$$

Alors, $(\Sigma , \circ)$ est G^0-potent, car G^0 est un idéal d'après les conditions (2) et de plus $x_1 \circ x_2 \circ \dots \circ x_n \in G^0$ nécessairement, même si $x_1 , x_2 , \dots , x_n$ appartiennent à T^* , puisque T est nilpotent $(T^n = 0)$.

Remarque. - Un demi-groupe extension d'un groupe avec zéro, par un demi-groupe (nilpotent) peut admettre des diviseurs de zéro. Mais on peut aussi énoncer le théorème suivant, dont la démonstration est analogue, dans le cas d'un demi-groupe G-potent sans zéro.

THÉORÈME 1' .- Tout demi-groupe G-potent est extension d'un groupe par un demi-groupe nilpotent, et réciproquement, tout demi-groupe extension d'un groupe par un demi-groupe nilpotent est un groupe G-potent.

Dans ce dernier cas, si $(\Sigma , \circ)$ est extension du groupe G par le demi-groupe nilpotent T , l'opération $\circ$ est définie à partir d'un homomorphisme partiel φ de T^* dans G , d'après le théorème 4.19 de CLIFFORD [2], de sorte que si

$(t_1, t_2) \in T^* \times T^*$, $(g_1, g_2) \in G \times G$, on a

$$t_1 \circ t_2 = t_1 t_2 \text{ , si } t_1 t_2 \neq 0 \text{ dans } T$$
$$t_1 \circ t_2 = \varphi(t_1)\, \varphi(t_2) \text{ , si } t_1 t_2 = 0 \text{ dans } T$$
$$t_1 \circ g_1 = \varphi(t_1)\, g_1 \text{ , } g_1 \circ t_1 = g_1\, \varphi(t_1)$$
$$g_1 \circ g_2 = g_1 g_2 \text{ .}$$

Nous allons maintenant donner une autre caractérisation des demi-groupes G^0-potents, G-potents, qui nous permettra de construire des exemples de façon simple.

THÉORÈME 2. - Un demi-groupe S est G^0-potent [resp. G-potent] si, et seulement si, il est produit sous-direct du produit direct d'un groupe avec zéro [resp. d'un groupe], par un demi-groupe nilpotent.

(S est produit sous-direct du produit direct $T \times T'$, s'il existe un homomorphisme injectif f de S dans $T \times T'$ et si $\mathrm{proj}_T \circ f$ et $\mathrm{proj}_{T'} \circ f$ sont surjectifs, proj_T désignant la projection de $T \times T'$ sur T).

Nous ferons la démonstration dans le cas G^0-potent. Soit donc S un demi-groupe G^0-potent ; désignons par e l'élément neutre du groupe G , et par $\overline{x}$ l'image de x par l'homomorphisme canonique de S sur $S/_{G^0}$. On a vu, au cours du théorème 1, que le demi-groupe $S/_{G^0}$ est nilpotent. Considérons l'application f de S dans $G^0 \times S/G_0$, définie par $f(x) = (xe , \overline{x})$; il est facile de vérifier que cette application est un homomorphisme injectif et que S est produit sous-direct.

Réciproquement, soit S un sous-demi-groupe, produit sous-direct du produit direct d'un groupe avec zéro G^0 et d'un demi-groupe nilpotent T , $G^0 \times T$. Comme T est nilpotent, $S^n \subseteq (G^0)^n \times T^n = G^0 \times \{0\}$; réciproquement, si un élément $(t , 0)$ appartient à $G^0 \times \{0\}$, alors ou $(t , 0) = (0 , 0)$ et $(t , 0) \in S^n$, ou $(t , 0) \neq (0 , 0)$. Dans ce dernier cas, t est un élément de G , et comme $G=G^n$, $t = x_1 x_2 \dots x_n$, $x_i \in G$.

Si p_{G^0} est la projection de $G^0 \times T$ sur G^0 , S étant produit sous-direct, la restriction à S de p_{G^0} est surjective. Donc il existe des éléments y_i de T tels que $x_i = p_{G^0}(x_i , y_i)$. Comme T est nilpotent, $(x_1,y_1)\dots(x_n,y_n)=(t,0)$ et $(t , 0)$ appartient à S^n . Ainsi S^n est égal à $G^0 \times \{0\}$, et S est G^0-potent.

Ainsi, pour obtenir facilement des exemples de demi-groupes G^0-potents [G-potents], il suffit de considérer le produit direct d'un groupe avec zéro [d'un groupe] par un demi-groupe nilpotent.

2. Etude du treillis des idéaux d'un demi-groupe G^0-potent et d'un demi-groupe G-potent.

PROPOSITION 3. - Soit S un demi-groupe G^0-potent. Alors tout idéal de S

[à gauche, à droite ou bilatère] contient G^0 , ou est un idéal nilpotent.

Soit I un idéal bilatère par exemple. S'il existe x non nul appartenant à G^0 et à I , alors I contient G^0 ; par contre, si $I \cap G^0 = \{0\}$, I^n est contenu dans I , donc $I^n \cap G^0 = \{0\}$ et, d'autre part, $I^n \subseteq S^n = G^0$. Donc $I^n=\{0\}$.

THÉORÈME 3. - Le treillis des idéaux bilatères [resp. à gauche, à droite] d'un demi-groupe G-potent S est un treillis isomorphe en tant qu'ensemble ordonné au treillis des idéaux bilatères [resp. à gauche, à droite] du demi-groupe nilpotent S/G , quotient de Rees de S par G .

On suppose S non nilpotent, sinon le théorème est trivial. Donc S est sans zéro et, d'après la proposition 3, tous les idéaux de S contiennent G . Soit S/G le quotient de Rees de S par G , et soit φ l'homomorphisme de S sur S/G qui est canoniquement défini par :

$$\varphi(x) = x \quad \text{si} \quad x \in S \setminus G$$

$$\varphi(x) = 0 \quad \text{si} \quad x \in G .$$

Cet homomorphisme φ induit une application Φ du treillis des idéaux bilatères (par exemple) $\mathfrak{T}$ de S sur $\mathfrak{T}'$, treillis des idéaux bilatères de S/G . Il est facile de vérifier que Φ est une bijection, conservant l'inclusion.

D'après le théorème 3, la connaissance des idéaux du demi-groupe nilpotent S/G donne celle du demi-groupe S , G-potent.

Nous pouvons donc étendre les résultats que nous avons donnés dans [3] aux demi-groupes G-potents.

COROLLAIRE 1. - Si I est un idéal bilatère [à gauche, à droite] d'un demi-groupe S , G-potent, et si I est distinct de S , il existe au moins un élément x de $S \setminus I$, tel que $I \cup \{x\}$ est un idéal bilatère [à gauche, à droite] de S .

COROLLAIRE 2. - Si I est un idéal bilatère [à gauche, à droite] d'un demi-groupe S , G-potent, et si I est distinct de G , il existe au moins un élément x de I , tel que $I \setminus \{x\}$ est un idéal bilatère [à gauche, à droite] de S .

3. Application aux anneaux.

DÉFINITION 3. - Un anneau A est dit K-potent, si l'une de ses puissances est un corps, $A^n = K$ où K est un corps, sous anneau de A .

PROPOSITION 4. - Un anneau A est K-potent si, et seulement si, son demi-groupe multiplicatif est G^0-potent.

La condition est évidemment nécessaire. Supposons maintenant que A est un anneau dont le demi-groupe multiplicatif est G^0-potent ; $A^n = G^0$ groupe avec zéro. Montrons que G^0 est aussi un sous-groupe additif de A . Soient x_1 et x_2 non nuls (sinon, il n'y a rien à démontrer), deux éléments de G^0, et considérons la différence $x_1 - x_2$. On a, puisque x_1 et x_2 appartiennent à $G^0 = A^n$,

$$x_1 = a_1 a_2 \dots a_n \quad \text{et} \quad x_2 = b_1 b_2 \dots b_n ;$$

mais $x_2 = yx_1$, avec $y \in G^0$, d'où $x_1 - x_2 = (a_1 - ya_1)a_2 \dots a_n$, et $x_1 - x_2$ est élément de G^0.

THÉORÈME 4. - Un anneau A est K-potent si, et seulement si, A est isomorphe au produit direct d'un corps et d'un anneau nilpotent.

Si $A^n = K$ où K est un corps, désignons par B l'annulateur à gauche de K, $B = \{b \in A ; bK = 0\}$. B est un idéal bilatère, et $B \cap K = \{0\}$. D'autre part, B est encore égal à $\{b \in A ; be = 0\}$ si e désigne l'unité du corps K. Comme B^n est contenu dans $B \cap K$, B est un anneau nilpotent. Montrons que A est somme directe de B et de K : il suffit de remarquer que tout élément x s'écrit sous la forme $x = xe + (x - xe)$, avec xe dans K et $x - xe$ dans B. Donc A est isomorphe au produit direct $K \times B$. La réciproque est immédiate.

Comme dans le cas des demi-groupes, on peut déterminer les idéaux d'un anneau K-potent ; d'après la représentation $A = K \oplus B$, tous les idéaux sont de la forme $K \oplus J$, où J est un idéal de B, ou bien sont égaux à un idéal de B.

On peut aussi se demander que deviennent les corollaires 1, 2 du §2 précèdent dans le cas des anneaux.

PROPOSITION 5. - Dans un anneau K-potent, si I est un idéal bilatère [à gauche, ou à droite], distinct de l'anneau, il existe un élément x n'appartenant pas à I, tel que $I + \mathbb{Z}x$ soit encore un idéal bilatère [à gauche, ou à droite].

D'après la forme des idéaux d'un anneau K-potent que nous venons de donner ci-dessus, il suffit de démontrer cette propriété dans le cas d'un anneau nilpotent. Soit donc I un idéal bilatère, par exemple, d'un anneau A nilpotent, $I \neq A$. Il faut donc démontrer qu'il existe $x \neq I$ tel que $I + \mathbb{Z}x$, soit encore un idéal. Comme $I + \mathbb{Z}x$ est manifestement un sous-groupe additif, il suffit de montrer que, pour tout a de A, les éléments ax et xa appartiennent à I, pour un certain x, $x \notin I$. Le raisonnement est le même par conséquent que dans le cas d'un demi-groupe, et nous renvoyons à [3], théorème 1, pour la démonstration.

COROLLAIRE 3. - Un anneau nilpotent noethérien à gauche [noethérien à droite] est de la forme $\mathbb{Z}x_1 + \mathbb{Z}x_2 + \dots + \mathbb{Z}x_n$.

En effet, si A est un anneau nilpotent, noethérien à gauche, en appliquant la proposition précédente à l'idéal 0, on trouve qu'il existe un élément x_1 tel que $\mathbb{Z}x_1$ soit un idéal. Et l'on peut construire une suite croissante d'idéaux $\mathbb{Z}x_1 \subset \mathbb{Z}x_1 + \mathbb{Z}x_2$, etc., et comme A est noethérien, $A = \mathbb{Z}x_1 + \mathbb{Z}x_2 + \dots + \mathbb{Z}x_n$.

4. Généralisation de la notion d'anneau K-potent.

DÉFINITION 4. - Un K-anneau est un anneau A pour lequel il existe un entier n tel que A^n est somme directe (discrète) de corps.

Si A^n est somme directe (discrète) de corps, nous noterons $A^n = \bigoplus K_i$. De plus les K_i peuvent être considérés comme idéaux minimaux de A.

Si $A^n = \bigoplus_i K_i$, tout élément de A^n est donc somme finie d'éléments $k_{i1}, \ldots, k_{in}$ avec $k_{ij} \in K_j$, et cette décomposition est unique à l'ordre près des facteurs.

THÉORÈME 5. - Si A est un K-anneau, tout idéal bilatère de A est ou nilpotent, ou est un K-anneau.

Supposons donc que $A^n = \bigoplus_{i \in I} K_i$, et soit L un idéal bilatère de A, tel que L^p est non nul pour tout p. Les corps K_i sont des idéaux de A minimaux, donc $K_i \cap L^n = 0$ ou K_i. Comme L^n est non nul, il existe au moins des indices j, $j \in J \subseteq I$, tels que $K_j \cap L^n = K_j$. Par suite,

$$\bigoplus_{j \in J}(K_j \cap L^n) = \bigoplus_{j \in J} K_j \subseteq L^n .$$

Inversement, soit $y = x_1 x_2 \ldots x_n$ un élément particulier de L^n, chaque x_k appartenant à L. L'élément y appartient à L^n, donc à A^n, et par conséquent il s'écrit $y = \sum_{i=1}^{p} k_i$ avec $k_i \in K_i$. Comme les K_i forment une somme directe discrète, on a encore, si e_i désigne l'unité du corps K_i, $ye_i = k_i$, puisque $k_j e_i = 0$ si $j \neq i$. D'où $y = \sum_{i=1}^{p} ye_i$, et chaque ye_i appartient à $L^n \cap K_i$. D'où y est élément de $\bigoplus_{j \in J}(K_j \cap L^n)$, et tout élément de L^n étant une somme finie d'éléments du type "y", on a bien

$$L^n = \bigoplus_{j \in J}(K_j \cap L^n) = \bigoplus_{j \in J} K_j .$$

THÉORÈME 6. - Toute image homomorphe d'un K-anneau est encore un K-anneau ou est un anneau nilpotent.

Soit L un idéal bilatère d'un K-anneau A, soit $A' = A/L$, et soit φ l'homomorphisme canonique de A sur A'. Si K_i est un corps, idéal bilatère de A, $\varphi(K_i)$ est encore un idéal de A' et ou est égal à 0, ou est un corps, idéal de A'.

Donc $A'^n = \varphi(A^n)$ est de façon immédiate ou égal à 0, ou somme directe des $\varphi(K_i) = K_i'$.

THÉORÈME 7. - Tout idéal L d'un K-anneau A est somme directe d'un idéal nilpotent et de l'une de ses puissances L^n (l'un de ces deux facteurs pouvant être nul).

Si L est un idéal nilpotent, le théorème est immédiat ; sinon d'après le théorème précédent, comme l'anneau A est un K-anneau,

$$A^n = \bigoplus_{i\in I} K_i \quad \text{et} \quad L^n = \bigoplus_{j\in J} K_j \ , \qquad \emptyset \neq J \subseteq I \ .$$

Soit $B = \{x \in L \ ; \ xL^n = 0\}$. Comme L est un idéal bilatère, B est un idéal bilatère, et de plus $B \cap L^n = 0$: en effet, soit e_j , $j \in J$, la famille des éléments unités des corps K_j , $j \in J$, tels que $L^n = \bigoplus_{j\in J} K_j$; on a nécessairement $xe_j = 0$ pour tout j , si x est élément de B . Mais si x appartient à L^n , $x = \sum_{i=1}^{k} xe_i$ (voir théorème 5), donc si $x \in B \cap L^n$, $x = 0$.

Montrons maintenant que $L = B \oplus L^n$; soit $x \in L$, alors

$$x^n \in L^n \quad \text{et} \quad x^n = \sum_{i=1}^{k} x^n e_i \ .$$

Soit $y = x - \sum_{i=1}^{k} xe_i$; montrons que y est un élément de B , c'est-à-dire que, pour tout j , $j \in J$, avec $L^n = \bigoplus_{j\in J}^{d} K_j$, $ye_j = 0$. Tout d'abord $ye_i = 0$ pour $i \in [1 , \dots , k] \subseteq J$. Si e_j est tel que $j \notin [1 , \dots , k]$, c'est-à-dire que x^n n'a pas de composante sur K_j , alors $ye_j = xe_j$ et $x^n e_j = 0$. Mais K_j étant un idéal bilatère de l'anneau A , $xe_j = e_j x = e_j xe_j$, donc $(xe_j)^n = x^n e_j$, et $x^n e_j = 0$ implique, dans le corps K_j , $xe_j = 0 = (ye_j)$.

L'élément y appartient donc à B . De plus, B^n est nécessairement nul puisque B^n est inclus dans $L^n \cap B = \{0\}$.

L'idéal B est nul si, et seulement si, $L = L^n$ est somme de corps.

COROLLAIRE 4. - <u>Le radical de Jacobson d'un</u> <u>K-anneau</u> A <u>est nilpotent</u>.

D'après les théorèmes 5 et 7, $J(A)$ est ou nilpotent, ou contient des idéaux qui sont des corps, donc au moins un élément idempotent non nul, ce qui est impossible. Donc le radical de Jacobson $J(A)$ est nilpotent.

COROLLAIRE 5. - <u>Le radical</u> $J(A)$ <u>d'un</u> <u>K-anneau</u> A <u>est un sommant direct de</u> A , <u>et</u> $A/J(A)$ <u>est isomorphe à</u> A^n .

D'après le théorème 7, $A = A^n \oplus N$, où nécessairement N est le radical nilpotent et où A^n est somme directe discrète de corps. Mais N est égal à $J(A)$ d'après le corollaire 4. D'où le résultat énoncé.

Ainsi, un K-anneau A est égal à $J(A) \oplus A^n$.

PROPOSITION 5. - <u>Dans un</u> <u>K-anneau,</u> <u>tout idéal premier est maximal</u>.

Soit L un idéal premier ; d'après le théorème 5, L est ou nilpotent, ou un K-anneau.

Supposons tout d'abord que L est nilpotent, $L^p = 0$. Alors si $A = A^n \oplus N$, où N est le radical nilpotent et où $A^n = \bigoplus_{i\in I} K_i$, K_i corps, nécessairement $L \subseteq N$. Si $|I| > 2$ et si K_i et K_2 sont deux corps idéaux minimaux de A , $K_1 K_2 = 0 \subseteq N$, d'où K_1 ou K_2 est contenu dans N , idéal premier, ce qui ne peut être. Donc $|I| = 1$ et $A = K_1 \oplus N$, avec $A^n = K_1$. Mais alors $K_1 N = 0$, et comme K_1 n'est pas contenu dans L , nécessairement N l'est, et $N = L$ et

L est tel que $A/L \simeq K_1$, donc L est maximal.

Supposons maintenant que L est un K-anneau. Si $A^n = \bigoplus_{i\in I} K_i$, on a avec les résultats et les notations du théorème 5, $L^n = \bigoplus_{j\in J} K_j$, $J \subseteq I$, et $L = L^n \oplus B$, où B est un idéal nilpotent.

S'il existe deux corps K_1 et K_2 tels que K_1 et K_2 ne soient pas contenus dans L^n, ceci contredit le fait que $K_1 K_2 = 0 \subseteq L$ implique K_1 ou $K_2 \subseteq L$. Il existe alors au plus un corps K tel que $K \subseteq A^n$ et tel que $K \not\subseteq L^n$. Si $A^n = L^n$, $A = L$, puisque L est premier ; donc il existe exactement un seul corps K_1 tel que $K_1 \subseteq A^n$ et $K_1 \not\subseteq L^n$, et $A = (\bigoplus_{i\in I} K_i) \oplus N$ et $L = (\bigoplus_{i\in I, i\neq 1} K_i) \oplus B$; $NK_1 = 0$, donc N est contenu dans L et par suite $B = N$ et $A = L \oplus K_1$, et L est bien maximal.

Ainsi les <u>propriétés énoncées dans les corollaire 4</u>, <u>proposition 5 prouvent que les</u> K-<u>anneaux généralisent les anneaux artiniens</u>.

PROPOSITION 6. - <u>Dans un</u> K-<u>anneau</u>, <u>tous les idempotents sont centraux</u>.

Si A est un K-anneau et si e est un idempotent, e $A^n = \bigoplus_{i\in I} K_i$ et $e = k_{i_1} + \dots + k_{i_p}$, avec $k_{i_j} \in K_j$. Nécessairement, $e = e_1 + \dots + e_p$, avec e_i élément unité de K_i. Mais $e_i x = e_i x e_i$ puisque K_i étant idéal bilatère, $e_i x$ appartient à K_i. Donc $e_i x = x e_i$ pour tout x de l'anneau.

Dans le cas commutatif, nous pouvons donner une autre caractérisation des K-anneaux.

THÉORÈME 8. - <u>Un anneau commutatif</u> A <u>est un</u> K-<u>anneau</u>, <u>si, et seulement si</u>, <u>les conditions suivantes sont satisfaites</u> :

(a) <u>le radical de Jacobson</u> $J(A)$ <u>est nilpotent</u> ;

(b) <u>le radical</u> $J(A)$ <u>est un facteur direct de l'anneau</u> A ;

(c) <u>tout idéal de</u> A/JA <u>est facteur direct</u>.

Reamrquons tout d'abord que la propriété (c) précédente peut encore s'énoncer $A/J(A)$ est un <u>module semi-simple</u> au sens de BOURBAKI [1] ; mais comme l'anneau $A/J(A)$ n'est pas unitaire, il n'a pas les propriétés données dans [1] pour les anneaux semi-simples. En particulier, il n'est pas de longueur finie.

<u>Démonstration</u>. - Il est facile de vérifier que ces conditions sont nécessaires. Les conditions (a) et (b) résultent des corollaires 4 et 5. Puisque A/JA est isomorphe à une somme directe de corps, il est bien semi-simple en tant que module. Inversement, la condition (b) permet d'écrire $A = J(A) \oplus A'$, avec A' semi-simple. Dans A', tout idéal est facteur direct, donc A' est somme de ses idéaux minimaux. Ces derniers sont des corps puisque $A/J(A)$ ne peut admettre d'idéal nilpotent et que l'anneau est commutatif.

Ainsi, les K-anneaux commutatifs sont caractérisés comme somme directe d'un anneau nilpotent N et d'un anneau B , B module semi-simple.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI (N.). - Algèbre, Chapitre 8 : Modules et anneaux semi-simples. - Paris, Hermann, 1958 (Act. scient. et ind., 1261 ; Bourbaki, 23).

[2] CLIFFORD (A. H.) and PRESTON (G. B.). - The algebraic theory of semigroups, Vol. 1. - Providence, American mathematical Society, 1961 (Mathematical Survey, 7).

[3] MERLIER (Thérèse). - Sur les idéaux des demi-groupes nilpotents, Semigroup Forum, t. 5, 1973, p. 236-242.

(Texte reçu le 15 avril 1975)

Thérèse MERLIER
Résidence Gascogne
105 rue Boucicaut
92260 FONTENAY AUX ROSES