Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Guy Renault

Anneaux biréguliers auto-injectifs à droite

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 27, n° 2 (1973-1974), exp. n° 17, p. 1-8

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1973-1974__27_2_A7_0>

Séminaire DUBREIL
(Algèbre)
27e année, 1973/74, n° 17, 8 p.

20 mai 1974

ANNEAUX BIRÉGULIERS AUTO-INJECTIFS À DROITE

par Guy RENAULT

Introduction.

On dit qu'un anneau A est birégulier si, pour tout élément x de A , l'idéal bilatère (x) est engendré par un idempotent central. Les anneaux biréguliers commutatifs sont les anneaux réguliers de von Neumann, le centre d'un anneau birégulier est un anneau régulier ; tout anneau birégulier est à idéaux singuliers à droite et à gauche nuls ; par suite, un anneau birégulier auto-injectif à droite est régulier.

Sauf mention expresse du contraire, les modules considérés seront des modules à droite sur un anneau unitaire. Pour la théorie des modules injectifs, on pourra se reporter à [5], pour la classification des anneaux réguliers auto-injectifs à droite, on pourra consulter [7] et [12]. Rappelons simplement qu'un anneau de Baer A est de type I , s'il existe un idempotent abélien et fidèle, de type II, s'il existe un idempotent fini et fidèle et si A ne contient pas d'idempotents abéliens $\neq 0$, de type III, s'il ne contient pas d'idempotents finis $\neq 0$. On dira qu'un anneau A est quasi-simple, si (0) et A sont les seuls idéaux bilatères de A . Le but de cet article est de déterminer les anneaux biréguliers auto-injectifs à droite ; une partie des résultats obtenus a été présentée dans [11].

1. Anneaux biréguliers.

PROPOSITION 1.1. - *Soit A un anneau semi-premier dont le centre Z est un anneau régulier. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1° *A est un anneau birégulier.*

2° *Les idéaux premiers de A sont engendrés par les idéaux maximaux de Z .*

1° $\Longrightarrow$ 2°: Soit P un idéal premier de A ; $m = P \cap Z$ est un idéal premier, donc maximal de Z . Comme l'anneau quotient A/Am est quasi simple, on a nécessairement $P = Am$.

2° $\Longrightarrow$ 1° : A étant semi-premier, pour tout élément x de A , on a

$$(x) \cap \ell[(x)] = (0) ,$$

où $\ell(.)$ désigne l'annulateur à gauche. Supposons $I = (x) \oplus \ell[(x)] \neq A$. Il existe alors un idéal maximal m de Z tel que l'on ait $I \subset Am$, et l'on peut trouver $s \in Z - m$ tel que $sx = 0$. On en déduit que $s \in \ell[(x)]$, donc $s \in m$, et il y a contradiction.

COROLLAIRE 1.2. - *Soit* A *un anneau semi-premier dont le centre* Z *est un anneau régulier et qui vérifie les propriétés suivantes* :

1° A *est une* Z*-algèbre de type fini,*

2° *Pour tout idéal maximal* m *de* Z , A/Am *est un anneau birégulier. Alors* A *est un anneau birégulier.*

L'anneau quotient A/Am est isomorphe à l'anneau localisé A_m , et comme A est une Z-algèbre de type fini, il en résulte que le centre de A_m est isomorphe à Z_m qui est un corps ; d'après la condition 2° , Am est un idéal maximal de A , et A est birégulier (prop. 1.1).

Rappelons qu'un groupe G est dit *localement normal* si tout sous-groupe de type fini est contenu dans un sous-groupe normal fini de G . On a la propriété suivante :

PROPOSITION 1.3 [1]. - *Si l'anneau de groupe* $A[G]$ *est birégulier, alors* :

1° A *est un anneau birégulier,*

2° G *est un groupe localement normal tel que l'ordre de tout élément* $\neq 1$ *de* G *soit inversible dans* A .

On trouvera une démonstration de cette proposition dans [11]. Réciproquement, on a le lemme suivant.

LEMME 1.4. - *Soit* G *un groupe localement normal ; si pour tout sous-groupe normal fini* H *de* G , *l'anneau de groupe* $A[H]$ *est birégulier, alors* $A[G]$ *est un anneau birégulier.*

Soit e un idempotent central de $A[H]$; nous allons montrer que $A[G]\, e\, A[G]=(e)$ est engendré par un idempotent central de $A[G]$. On désigne par $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ les conjugués distincts de e dans $A[G]$. Les e_i sont des idempotents centraux de $A[H]$, et il existe par hypothèse un idempotent central f de $A[H]$ tel que

$$A[H]\, f = \sum_{i=1}^{n} A[H]\, e_i \ .$$

On en déduit la relation $(e) = A[G]\, f$. (e) est un facteur direct bilatère de l'anneau semi-premier $A[G]$, il est donc engendré par un idempotent central.

Les résultats de A. BOVDI et S. V. MIHOVSKI [1] peuvent être complétés de la façon suivante :

PROPOSITION 1.5. - *Soient* A *un anneau birégulier,* G *un groupe localement normal, tel que l'ordre de tout élément* $\neq 1$ *de* G *soit inversible dans* A . *Alors* $A[G]$ *est birégulier dans chacun des cas suivants* :

1° A *est une algèbre de type fini sur son centre,*

2° A *est auto-injectif à droite.*

D'après le lemme 1.4, on peut supposer que G est un groupe fini dont l'ordre n est inversible dans A.

1° Soit Z le centre de A ; $Z[G]$ est un anneau régulier [8], le centre K de $A[G]$ est donc un anneau régulier. Soit M un idéal maximal de K ; $M \cap Z = m$ est un idéal maximal de Z, et l'anneau $B = A[G]/A[G]M$ qui est un anneau quotient de l'anneau birégulier $A/Am[G]$ [1], est birégulier. L'assertion résulte alors du corollaire 1.2.

2° Soit M un idéal maximal du centre K de l'anneau auto-injectif à droite $A[G]$ [4]. $M \cap Z = m$ est un idéal maximal du centre Z de A. Comme précédemment on voit que $B = A[G]/A[G]M$ est un anneau birégulier. D'après [12] (prop. 2.9), $M\,A[G]$ est un idéal bilatère maximal de $A[G]$, et l'assertion résulte de la proposition 1.1.

Remarque. - On peut conjecturer que les conditions 1° et 2° de la proposition 1.3 caractérisent les anneaux de groupe biréguliers ; d'après le lemme 1.4, il suffit de résoudre le problème pour les groupes finis.

PROPOSITION 1.6. - *Pour un anneau régulier A, auto-injectif à droite, les conditions suivantes sont équivalentes* :

1° *A est un anneau birégulier,*

2° *Tout idéal premier de A est maximal.*

1° $\Longrightarrow$ 2° : C'est évident.

2° $\Longrightarrow$ 1° : Soit m un idéal maximal du centre de A ; d'après [12] (prop. 2.9), Am est un idéal premier de A, donc maximal ; l'assertion résulte alors de la proposition 1.1.

Comme un anneau régulier premier, à identité polynomiale, est un anneau simple, il en résulte qu'un anneau régulier auto-injectif à droite à identité polynomiale est birégulier ([9], [10]).

2. Anneaux biréguliers auto-injectifs à droite de type I ou II.

LEMME 2.1. - *Un anneau birégulier A auto-injectif à droite, qui contient un idempotent fini et fidèle, est un anneau fini.*

Soit e un idempotent fini et fidèle de A ; il existe un idempotent central h de A tel que $(e) = Ah$. Comme e est fidèle, on a $h = 1$, ce qui implique une relation de la forme

$$1 = \sum_{i=1}^{n} x_i\, e\, y_i\ .$$

Les idéaux à droite $x_i\, e\, y_i\, A$ sont isomorphes à des facteurs directs de eA, et par suite h peut se mettre sous la forme $h = \sum_{i=1}^{k} f_i$, où les f_i sont des idempotents orthogonaux et finis de A ; il résulte de [12] (prop. 5.1) que A est un anneau fini (i. e. $(xy = 1) \Rightarrow (yx = 1)$).

LEMME 2.2. - <u>Soient</u> $(n_i)_{i \in \underset{\sim}{N}}$, <u>une suite infinie strictement croissante d'entiers</u> (A_i) , $i \in \underset{\sim}{N}$, <u>une suite d'anneaux réguliers auto-injectifs à droite et finis. Alors l'anneau</u> $A = \prod_{i \in \underset{\sim}{N}} M_{n_i}(A_i)$ <u>n'est pas un anneau birégulier.</u>

Soit h_i , $i \in \underset{\sim}{N}$, l'idempotent central associé au facteur $M_{n_i}(A_i)$. On a alors

$$h_i = e_1^i + \ldots + e_{k_i}^i ,$$

où les e_s^i , $1 \leq s \leq k_i$, sont des idempotents orthogonaux finis, qui engendrent des idéaux à droite isomorphes et tels que les anneaux A_i et $e_s^i M_{n_i}(A_i) e_s^i$ soient isomorphes. Pour $i \in \underset{\sim}{N}$, on pose $e_1^i = e_i$, et on considère l'élément $e = (e_i)_{i \in N}$ de A . L'idéal bilatère (e) , engendré par e , contient tous les idempotents h_i , $i \in I$, et si l'anneau A est birégulier, alors $(e) = A$. Nous allons montrer que c'est impossible. Sinon, il existe une relation de la forme :

$$1 = \sum_{s=1}^{p} x^s e y^s \ ; \ x^s = (x_i^s)_{i \in \underset{\sim}{N}} \ ; \ y^s = (y_i^s)_{i \in \underset{\sim}{N}} .$$

Soit $n_k > p$; on a $h_k = \sum_{s=1}^{p} x_k^s e_1^k y_k^s$, on en déduit une relation de la forme

$$h_k = \sum_{t=1}^{q} f_i \ , \ f_i = f_i^2 ,$$

où $f_i M_{n_k}(A_k)$ est isomorphe à un facteur direct de $e_1^k M_{n_k}(A_k)$, avec $q < n$. Cela contredit le fait que $M_{n_k}(A_k)$ est un anneau fini ([12], cor. 5.2).

THEORÈME 2.3.

1° <u>Les anneaux biréguliers auto-injectifs à droite de type I sont des produits finis d'anneaux de matrices à coefficients dans des anneaux réduits auto-injectifs.</u>

2° <u>Les anneaux biréguliers auto-injectifs à droite de type II sont les produits finis de facteurs de type</u> II_{fin} .

La propriété 1° est une conséquence du lemme 2.1 et de [12] (th. 3.7).

Soit A un anneau birégulier, auto-injectif à droite de type II ; d'après le lemme 2.1, c'est un anneau fini et, quel que soit l'entier $n \geq 1$, il existe des idempotents orthogonaux e_i qui engendrent des idéaux à droite isomorphes et qui vérifient

$$1 = \sum_{i=1}^{2^n} e_i \quad ([12], \text{ lemme } 3.11).$$

Soit $(h_i)_{i \in I}$ une famille maximale d'idempotents centraux et orthogonaux de A ; A est isomorphe à l'anneau produit des anneaux Ah_i . D'après ce qui précède, Ah_i est isomorphe à un anneau de la forme $M_{n_i}(B_i)$, le lemme 2.2 prouve que I est un ensemble fini et le centre de A est un produit fini de corps. D'après [12] (prop. 2.7), A est un produit fini d'anneaux quasi-simples.

3. Anneaux réguliers auto-injectifs à droite de type III.

Sauf mention expresse du contraire, tous les anneaux considérés dans ce paragraphe sont réguliers auto-injectifs à droite de type III. Si M est un A-module, $E(M)$ désigne l'enveloppe injective de M et, pour tout cardinal α, on note αM la somme directe de α copies de M. Soit $b \neq 0$ un élément de A ; comme A ne contient pas d'idempotent fini $\neq 0$, on a $eA = E(\aleph_0\, e A)$ ([12], prop. 4.2), on désigne par α_b le plus petit ordinal α tel que $bA \not\approx E(\alpha bA)$ [6], et on a $\aleph_0 < \alpha_b < 2^{\text{card } A}$.

LEMME 3.1. - Soit A un anneau auto-injectif à droite de type III, tel qu'il existe un cardinal α, avec $\alpha_b = \alpha$, pour tout $b \neq 0$, élément de A. Alors A est un anneau birégulier.

Soit $x \neq 0$, un élément de A ; il existe un idempotent central $h \neq 0$, et un cardinal β, $\beta < \alpha$ tel que $Ah = E(\beta xhA)$ ([12], lemme 4.1). La relation $\alpha_h = \alpha_{xh}$ implique que les A-modules xhA et Ah sont isomorphes.

En considérant une famille maximale $(k_j)_{j\in J}$ d'idempotents centraux orthogonaux de $Ac(x)$, où $c(x)$ désigne la couverture centrale de x, telle que $k_j A$ soit isomorphe à $k_j\, xA$, on déduit facilement de ce qui précède que $A\, c(x) = (x)$, donc A est birégulier.

On dira qu'un anneau régulier auto-injectif à droite est de type III_α, s'il existe un cardinal α tel que $\alpha_b = \alpha$ pour tout élément $b \neq 0$ de A.

THÉORÈME 3.2. - Soit A un anneau régulier auto-injectif à droite de type III. Alors A est isomorphe à un produit d'anneaux A_j, $j \in J$, où A_j est l'anneau des endomorphismes de l'enveloppe injective d'un module libre $D_j^{(I)_j}$ sur un anneau birégulier D_j de type III_{α_j}.

Soit $f \neq 0$ un idempotent de A tel que α_f soit le plus petit élément de l'ensemble des α_b, $b \neq 0$, $b \in A$. Nous allons montrer qu'il existe un idempotent central $h \neq 0$ tel que l'anneau $B = hfAfh$ soit de type III_{α_f}. Pour cela, on peut évidemment supposer f fidèle. Considérons une famille maximale $(h_i)_{i\in I}$ d'idempotents centraux orthogonaux de A tels que $\alpha_{h_i f} > \alpha_f$, pour $i \in I$. Si $(1 - h)$ désigne la borne supérieure des h_i, $i \in I$, on a $1 - h \neq 1$. En effet, sinon hA serait extension essentielle de la somme directe $\bigoplus_{i\in I} h_i\, fA$ et les relations $h_i\, fA = E(\alpha_f\, h_i\, f(A))$ impliqueraient $fA = E(\alpha_f\, fA)$ ce qui est contraire à l'hypothèse faite sur f. Soit $y \neq 0$, un élément de A_h ; on a $\alpha_y \geq \alpha_f$ par définition de f ; on désigne par βyhA une somme directe maximale de sous-modules isomorphes à yhA, contenue dans yhA, et par $\beta yhA \oplus \gamma yhA$ une somme directe maximale de sous-modules isomorphes à yhA contenue dans hA. D'après [12] (lemme 4.1), il existe un idempotent central $k \neq 0$ de A tel que l'on ait

$$kfA = E(\beta kyhA \oplus \gamma kyha) ,$$

ce qui implique $\beta \leq \alpha_f$, car $k \in hA$; donc $\alpha_y = \alpha_f$, quel que soit $y \neq 0$, $y \in fhA$. On en déduit que, pour tout $b \neq 0$, $b \in B = fhAf$, on a $\alpha_b = \alpha_f$, donc B est de type III_{α_f} (lemme 3.1). En utilisant alors les techniques de [12] (cor. 3.4, prop. 4.3), on obtient le théorème.

LEMME 3.3. - Pour un idempotent $e \neq 0$ d'un anneau A régulier auto-injectif à droite de type III, les conditions suivantes sont équivalentes :

1° L'idéal bilatère (e) est facteur direct de A,

2° Il existe des éléments u, v de A et un idempotent central h qui vérifient $uv = h$, $vu = e$.

Pour que l'idéal (e) soit facteur direct de A, il faut, et il suffit, qu'il existe un idempotent central h qui vérifie les relations :

$$h = \sum_{i=1}^{n} a_i\, e\, b_i \ ; \quad e = he .$$

Comme e n'est pas un idempotent fini, cela revient à dire que hA est isomorphe à un facteur direct de eA, ou encore que hA est isomorphe à eA [2], c'est ce qui est exprimé par la propriété 2°.

THÉORÈME 3.4.

1° Tout produit d'anneaux biréguliers auto-injectifs à droite de type III est un anneau birégulier.

2° Tout anneau birégulier auto-injectif à droite de type III est un produit d'anneaux A_j, $j \in J$, où A_j est de type III_{α_j}.

La propriété 1° est une conséquence immédiate du lemme 3.3. Démontrons la propriété 2°. Soient $f \neq 0$ un idempotent de A, h sa couverture centrale ; d'après le lemme 3.3, on a $\alpha_f = \alpha_h$. La première partie de la démonstration du théorème 3.2 montre qu'il existe un idempotent central $k \neq 0$, tel que Ak soit de type III_α, le théorème s'en déduit facilement.

Remarque 1. - Soient $\alpha \geq 1$ un cardinal, E un espace vectoriel de dimension α sur un corps k. L'algèbre tensorielle $T(E)$ est de dimension $\aleph_0$ si $\alpha \leq \aleph_0$, de dimension α si $\alpha > \aleph_0$. L'enveloppe injective A de $T(E)$ est de type III_α : on sait, en effet, que A est de type III [3], et il suffit de remarquer que l'on a $\alpha_x = \alpha_1 = \alpha$, pour tout $x \neq 0$. De plus, comme A est un anneau intègre, A est un facteur de type III.

Remarque 2. - L'enveloppe injective d'un anneau birégulier n'est pas nécessairement un anneau birégulier. Soient $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille de facteurs de type I_{fin} (resp. II_{fin}) admettant pour centre un même corps K. On considère le sous-anneau B de l'anneau produit $A = \prod_n A_n$, constitué des éléments $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$, où $x_i = a$, $a \in K$, pour i suffisamment grand. B est un anneau birégulier d'enveloppe injective A. Si $A_n = M_n(K)$ ou si les A_n sont de type II, A n'est pas birégulier (théorème 2.3).

LEMME 3.5. - Soit A un anneau à idéal singulier à droite nul dont l'enveloppe injective $\hat{A}$ admet une composante de type III $\hat{A}h$ non nulle. Alors si $e \neq 0$ est un idempotent de $\hat{A}$, il existe des idempotents centraux et orthogonaux h_i, $i \in I$, de $\hat{A}h$, des cardinaux infinis α_i des éléments x_i de A, tels que $e\hat{A} = E(\bigoplus_{i\in I} \alpha_i(h_i\, x_i\, A))$; h_i est la couverture centrale de $h_i\, x_i$, $k=\sup_{i\in I} h_i$ est la couverture centrale de e. De plus, si pour tout $i \in I$, on a

$$\hat{A}h_i\, x_i\, \hat{A} = h_i\, \hat{A} \ ,$$

alors $\hat{A}\, e\, \hat{A} = \hat{A}k$.

La première partie du lemme est une conséquence facile de [12] (lemme 4.1). On a les isomorphismes suivants :

$$k\hat{A} \simeq \prod_{i\in I} h_i\, \hat{A} \ ; \quad e\hat{A} \simeq \prod_{i\in I} e\, h_i\, \hat{A} \ .$$

On a de plus, $\hat{A}\alpha_i(h_i\, x_i\, A)\, \hat{A} = \hat{A}h_i\, x_i\, \hat{A}$, et, comme $\hat{A}$ est de type III, l'hypothèse implique que $h_i\, \hat{A}$ et $eh_i\, \hat{A}$ sont isomorphes (lemme 3.3), donc $k\hat{A}$ et $e\hat{A}$ sont isomorphes, ce qui entraîne la relation $k\hat{A} = \hat{A}\, e\, \hat{A}$.

PROPOSITION 3.6. - Soit A un anneau birégulier dont l'enveloppe injective $\hat{A}$ est de type III ; alors $\hat{A}$ est un anneau birégulier.

Nous reprenons les notations du lemme 3.5. On pose $Ax_i\, A = Ak_i$, où k_i est un idempotent central de A, donc $\hat{A}x_i\, \hat{A} = \hat{A}k_i$. On en déduit alors les relations : $\hat{A}h_i\, x_i\, \hat{A} = \hat{A}h_i\, k_i = \hat{A}h_i$; d'après le lemme 3.5, $\hat{A}$ est birégulier. Nous allons compléter les résultats de [3].

PROPOSITION 3.7. - L'enveloppe injective d'un anneau réduit A est un anneau birégulier.

D'après les résultats de [3], il suffit de prouver que la composante $\hat{A}h$ de type III de $\hat{A}$, enveloppe injective de A, est un anneau birégulier.

Soit $e \neq 0$ un idempotent de $\hat{A}h$; d'après le lemme 3.5, il suffit de considérer la situation $\hat{A}h_i \supset eh_i\, \hat{A} = E(\alpha_i\, h_i\, x_i\, A)$, où $x_i \in \hat{A}h \cap A$, et où h_i désigne la couverture centrale de $h_i\, x_i$. L'annulateur à droite $r_{\hat{A}h_i}(h_i\, x_i)$ de $h_i\, x_i$ dans $\hat{A}h_i$ est nul. En effet, l'idéal à droite $J = r_{\hat{A}h_i}(h_i\, x_i) \cap (\hat{A}h_i \cap A)$ est un idéal bilatère de l'anneau réduit A, on a alors $J(Ah_i\, x_i) = (0)$, donc $J = (0)$, ce qui prouve que $r_{\hat{A}h_i}(h_i\, x_i) = (0)$. On en déduit que $h_i\, x_i\, \hat{A}$ est isomorphe à $h_i\, \hat{A}$ et, par suite, $\hat{A}(\alpha_i\, h_i\, x_i\, A)\, \hat{A} = \hat{A}h_i\, x_i\, \hat{A} = \hat{A}h_i$, et la proposition résulte du lemme 3.5.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOVDI (A.) and MIHOVSKI (S. V.). - Idempotents in crossed products, Soviet Math. Dokl., t. 11, 1970, p. 1439-1441 ; [en russe] Dokl. Akad. Nauk SSSR, t. 195, 1970, p. 263-265.

[2] BUMBY (R. T.). - Modules wich are isomorphic to submodules of each other, Archiv der Math., Basel, t. 16, 1965, p. 184-185.

[3] CAILLEAU (A.) et RENAULT (G.). - Sur l'enveloppe injective des anneaux semi-premiers à idéal singulier nul, J. of Algebra, t. 15, 1970, p. 133-141.

[4] CONNELL (I. G.). - On the group ring, Canad. math. J., t. 15, 1963, p. 650-685.

[5] FAITH (C.). - Lectures on injective modules and quotient rings. - Berlin, Springer-Verlag, 1967 (Lectures Notes in Mathematics, 49).

[6] GOODEARL (K. R.). - Prime ideals in regular self-injective rings, Canad. J. Math., t. 25, 1973, p. 829-839.

[7] KAPLANSKY (I.). - Rings of operators. - New York, W. A. Benjamin, 1968 (Mathematics Lecture Note Series).

[8] LAMBECK (J.). - Lectures on rings and modules. - New York, Blaisdell, 1966 (A Blaisdell Book in pure and applied Mathematics).

[9] PAGE (A.). - Une caractérisation des anneaux réguliers à identité polynomiale, Séminaire d'algèbre non commutative, 1972/73. - Orsay, UER Mathématique (Publications mathématiques d'Orsay) (à paraître).

[10] PAGE (A.). - Généralisation aux anneaux à identité polynomiale d'un théorème de I. Kaplansky, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 276, 1973, Série A, p. 233-235.

[11] RENAULT (G.). - Anneaux de groupes biréguliers, Séminaire d'algèbre non commutative, 1973/74. - Orsay, UER Mathématique (Publications mathématiques d'Orsay) (à paraître).

[12] RENAULT (G.). - Anneaux réguliers auto-injectifs à droite, Bull. Soc. math. France, t. 101, 1973, p. 237-254.

(Texte reçu le 5 juin 1974)

Guy RENAULT
Université de Poitiers
Mathématiques
40 avenue du Recteur Pineau
86022 POITIERS