Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Paulo Ribenboim

Anneaux méta-noethériens

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 27, nº 2 (1973-1974), exp. nº 16, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1973-1974__27_2_A6_0>

Séminaire DUBREIL
(Algèbre)
27e année, 1973/74, n° 16, 9 p.

13 mai 1974

ANNEAUX MÉTA-NOETHÉRIENS

par Paulo RIBENBOIM

RÉSUMÉ. - Nous étudions des anneaux non noethériens, et introduisons plusieure invariants numériques pour mesurer, en quelque sorte, de combien un anneau s'écarte d'être noethérien. Ces types et hauteurs noethériennes sont étudiés par rapport à plusieurs opérations algébriques, y inclus la formation d'anneaux de polynômes. Parmi les anneaux de valuation, ceux de type ou hauteur noethérienne finie sont précisément ceux des valuations discrètes d'hauteur (ordinaire) finie.

Avec des conditions de chaîne appropriées, les différents types et hauteurs noethériennes coïncident. D'autre part, en imposant certaines conditions de maximalité sur le spectre, on peut casser des anneaux équiformes de type noethérien fini en deux pièces, dont l'une est noethérienne et l'autre a le type noethérien plus petit que celui de l'anneau donné. C'est la base d'une méthode de démonstration par induction sur le type noethérien.

Pour des anneaux de polynômes, nous montrons que la hauteur noethérienne est au plus égale à celle de l'anneau des coefficients. Un dernier résultat est une amélioration pour les anneaux de type noethérien fini d'un d'un théorème connu de SEIDENBERG.

Toute la théorie repose de façon essentielle sur un théorème difficile et récent de HEINZER et OHM [4] : un anneau R est noethérien si, et seulement si, tout localisé $R_{\mathfrak{p}}$ est noethérien et tout idéal de R a seulement un nombre fini d'idéaux premiers associés.

Un article sur le même sujet devant paraître dans un journal mathématique, nous omettrons ici les démonstrations.

1. Idéaux premiers associés.

Soit R un anneau commutatif avec unité 1 $(1 \neq 0)$, soit $\mathfrak{a}$ un idéal de R. L'idéal premier $\mathfrak{p}$ de R est associé à $\mathfrak{a}$ lorsqu'il existe $x \in R$ tel que $\mathfrak{p}$ soit un idéal premier minimal contenant

$$(\mathfrak{a} : x) = \{a \in R ;\ ax \in \mathfrak{a}\} .$$

Soit $\mathrm{Ass}(\mathfrak{a}) = \mathrm{Ass}_R(\mathfrak{a})$ l'ensemble des idéaux premiers associés à $\mathfrak{a}$, soit $\mathrm{Min}(\mathfrak{a})$ l'ensemble des idéaux premiers minimaux contenant $\mathfrak{a}$. Notons $S(\mathfrak{a}) = S_R(\mathfrak{a})$ la partie multiplicative de R, complément de l'ensemble union de tous les $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(\mathfrak{a})$. Les faits suivants sont bien connus :

1° Si R est noethérien et $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(\mathfrak{a})$, il existe $x \in R$ tel que $\mathfrak{p} = (\mathfrak{a} : x)$. En outre, $\mathrm{Ass}(\mathfrak{a})$ est un ensemble fini.

2° Si $\mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{b}$ sont des idéaux de R, et $\overline{R} = R/\mathfrak{b}$, $\overline{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}/\mathfrak{b}$, alors

$$\mathrm{Ass}_{\overline{R}}(\overline{\mathfrak{a}}) = \overline{\mathrm{Ass}_R(\mathfrak{a})}\ ,\quad S_{\overline{R}}(\overline{\mathfrak{a}}) = \overline{S_R(\mathfrak{a})}\ .$$

Si $\mathfrak{a}'$ est un autre idéal, $\mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{a}' \supseteq \mathfrak{b}$, alors

$$S(\overline{\mathfrak{a}})^{-1}\ \overline{R}/S(\overline{\mathfrak{a}})^{-1}\ \overline{\mathfrak{a}}' \cong S(\mathfrak{a})^{-1}\ R/S(\mathfrak{a})^{-1}\ \mathfrak{a}'\ .$$

3° Si T est une partie multiplicative de R, $\mathfrak{a}$ un idéal de R, alors

$$\mathrm{Ass}_{T^{-1}R}(T^{-1}\ \mathfrak{a}) = \{T^{-1}\ \mathfrak{p}\ ;\ \ \mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(\mathfrak{a})\ ,\ \ \mathfrak{p} \cap T = \emptyset\}\ .$$

En particulier, si $T = S_R(\mathfrak{a})$, alors l'application $\mathfrak{p} \longmapsto S_R(\mathfrak{a})^{-1}\ \mathfrak{p}$ est une bijection entre $\mathrm{Ass}_R(\mathfrak{a})$ et $\mathrm{Ass}_{S_R(\mathfrak{a})^{-1}R}(S_R(\mathfrak{a})^{-1}\ \mathfrak{a})$. Si $S_1(\mathfrak{a})$ est le complément dans R de l'ensemble union de tous les idéaux premiers $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(\mathfrak{a})$, $\mathfrak{p} \cap T = \emptyset$, si $\mathfrak{b}$ est un idéal de R, $\mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{b}$, alors

$$((S_{T^{-1}R}(T^{-1}\ \mathfrak{a}))^{-1}\ (T^{-1}\ R))/((S_{T^{-1}R}(T^{-1}\ \mathfrak{a}))^{-1}\ (T^{-1}\ \mathfrak{b}))$$

$$\cong (\overline{S(\mathfrak{a})})^{-1}\ (\overline{S_1(\mathfrak{a})})^{-1}\ (S(\mathfrak{a})^{-1}\ R/S(\mathfrak{a})^{-1}\ \mathfrak{b})\ ,$$

où $\overline{S_1(\mathfrak{a})}$, $\overline{S(\mathfrak{a})}$ désignent des images canoniques. En particulier, si $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}$ est un idéal premier disjoint de T alors

$$(T^{-1}\ R)_{T^{-1}\mathfrak{q}}/(T^{-1}\ R)_{T^{-1}\mathfrak{q}}\ (T^{-1}\ \mathfrak{b}) \cong R_{\mathfrak{q}}/R_{\mathfrak{q}}\ \mathfrak{b}\ .$$

4° Si $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$ sont des idéaux des anneaux R, R' respectivement, alors

$$S_{R\times R'}(\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}') = \{\mathfrak{p} \times R'\ ;\ \ \mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(\mathfrak{a})\} \cup \{R \times \mathfrak{p}'\ ;\ \ \mathfrak{p}' \in \mathrm{Ass}_{R'}(\mathfrak{a}')\}\ .$$

Si $\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}' \supseteq \mathfrak{b} \times \mathfrak{b}'$, alors

$$((S_{R\times R'}(\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}'))^{-1}\ (R \times R'))/((S_{R\times R'}(\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}'))^{-1}\ (\mathfrak{b} \times \mathfrak{b}'))$$

$$\cong (S_R(\mathfrak{a})^{-1}\ R/S_R(\mathfrak{a})^{-1}\ \mathfrak{b}) \times ((S_{R'}(\mathfrak{a}')^{-1}\ R')/(S_{R'}(\mathfrak{a}')^{-1}\ \mathfrak{b}'))\ .$$

Nous considérons les propriétés suivantes :

(FA) Pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de R, l'ensemble $\mathrm{Ass}_R(\mathfrak{a})$ est fini.

(SFA) Pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de R, l'anneau $S(\mathfrak{a})^{-1}\ R/S(\mathfrak{a})^{-1}\ \mathfrak{a}$ est noethérien.

On a les implications : R noethérien $\Longrightarrow$ R satisfait (SFA) $\Longrightarrow$ R satisfait (FA).

Les propriétés (FA), (SFA) sont préservées par passage à un anneau quotient, à un anneau de fractions, ou par produit cartésien fini d'anneaux.

2. Types et hauteurs noethériennes.

Soient $\mathfrak{a} \supset \mathfrak{b}$ des idéaux de l'anneau R. Une chaîne noethérienne de longueur s de $\mathfrak{a}$ à $\mathfrak{b}$ est une chaîne d'idéaux

$$C\ :\ \ \mathfrak{a} = \mathfrak{a}_0 \supset \mathfrak{a}_1 \supset \dots \supset \mathfrak{a}_{s-1} \supset \mathfrak{a}_s = \mathfrak{b}$$

telle que chaque "morceau" $(S(\mathfrak{a}_i)^{-1}\ R)/(S(\mathfrak{a}_i)^{-1}\ \mathfrak{a}_{i+1})$ soit un anneau noethérien

$(i = 0, 1, \ldots, s-1)$. Soit $\tau'_{\mathfrak{a}.\mathfrak{b}}$ l'infimum des longueurs des chaînes noethériennes de $\mathfrak{a}$ à $\mathfrak{b}$. Le <u>grand type noethérien</u> de R est $\tau'(R) = \sup_{\mathfrak{a}\supset\mathfrak{b}}\{\tau'_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\}$.

Une chaîne noethérienne C de $\mathfrak{a}$ à $\mathfrak{b}$ est dite <u>première</u> lorsque $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{s-1}$ sont des idéaux premiers. Si $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}$ est un idéal premier, $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{b}$, soit $\tau_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}}$ l'infimum des longueurs des chaînes noethériennes premières de $\mathfrak{p}$ à $\mathfrak{b}$. Le <u>type noethérien</u> de R est $\tau(R) = \sup_{\mathfrak{p}\supset\mathfrak{b}}\{\tau_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}}\}$. Si R est un corps, on pose $\tau(R)=1$.

Le <u>type noethérien premier</u> de R est

$$\pi\tau(R) = \sup\{\tau_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}} \mid \mathfrak{p} \supset \mathfrak{q} \text{ idéaux premiers de } R\}.$$

Si tout idéal premier de R est minimal, on pose $\pi\tau(R) = 1$.

Le <u>petit type noethérien</u> de R est

$$\mu\tau(R) = \sup\{\tau_{\mathfrak{m},\mathfrak{b}} \;;\; \mathfrak{m} \supset \mathfrak{b} ,\; \mathfrak{m} \text{ idéal maximal de } R ,\; \mathfrak{b} \text{ idéal de } R\}.$$

Si R est un corps, $\mu\tau(R) = 1$.

Le <u>petit type noethérien premier</u> de R est

$$\mu\pi\tau(R) = \sup\{\tau_{\mathfrak{m},\mathfrak{q}} \;;\; \mathfrak{m} \supset \mathfrak{q} ,\; \mathfrak{m} \text{ idéal maximal de } R ,\; \mathfrak{q} \text{ idéal premier de } R\}.$$

Si tout idéal premier de R est minimal $\mu\pi\tau(R) = 1$.

La <u>hauteur noethérienne</u> de l'idéal premier $\mathfrak{p}$ de R, $\mathfrak{p} \neq 0$, est $nh(\mathfrak{p}) = \tau_{\mathfrak{p},0}$. La <u>hauteur noethérienne</u> de R est

$$nh(R) = \sup\{nh(\mathfrak{p}) \;;\; \mathfrak{p} \text{ idéal premier, } \mathfrak{p} \neq 0\}.$$

Si R est un corps, $nh(R) = 1$.

La <u>petite hauteur noethérienne</u> de R est

$$\mu nh(R) = \sup\{nh(\mathfrak{m}) \;;\; \mathfrak{m} \text{ idéal maximal, } \mathfrak{m} \neq 0\}.$$

Si R est un corps, $\mu nh(R) = 1$.

On a

$\mu\tau(R) \leq \tau(R)$,

$\mu\pi\tau(R) \leq \pi\tau(R)$,

$\mu nh(R) \leq nh(R)$,

$\pi\tau(R) \leq \tau(R)$,

$nh(R) \leq \tau(R)$,

$\mu\pi\tau(R) \leq \mu\tau(R)$,

$\mu nh(R) \leq \mu\tau(R)$.

Si R est un anneau intègre, alors

$$nh(R) \leq \pi\tau(R) ,\quad \mu nh(R) \leq \mu\pi\tau(R).$$

En outre,

$\mu\tau(R) = 1 \Rightarrow \tau(R) = 1$,

$\mu\pi\tau(R) = 1 \Rightarrow \pi\tau(R) = 1$,

$\mu nh(R) = 1 \Rightarrow nh(R) = 1$.

PROPOSITION 1. - Si $\mathfrak{a} \supset \mathfrak{b}$ sont des idéaux de R , $\tau'_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} = s$; si $\mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(\mathfrak{a})$, alors $\tau_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \leq s$. En particulier, si $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}$, alors $\tau_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}} = s$, donc $\tau(R) \leq \tau'(R)$.

Le théorème de Heinzer et Ohm peut être exprimé comme suit :

PROPOSITION 2. - Soit $\lambda \in \{\mu nh , nh , \mu\tau , \tau , \tau'\}$, et si R est intègre, λ peut aussi être égal à $\mu\pi\tau$ ou $\pi\tau$. Pour chaque λ les conditions suivantes sont équivalentes

1° R est noethérien,

2° R satisfait (FA) et $\lambda(R) = 1$.

PROPOSITION 3. - Supposons que tout idéal premier non nul de R soit maximal. Pour tout λ (comme dans la proposition précédente), les conditions suivantes sont équivalentes :

1° R est noethérien,

2° R satisfait (FA) et $\lambda(R) < \infty$.

Un anneau R est dit méta-noethérien lorsqu'il satisfait la condition (FA) et $nh(R) < \infty$. R est faiblement méta-noethérien s'il satisfait (FA) et $\mu nh(R) < \infty$.

Les anneaux noethériens sont précisément les anneaux noethériens de hauteur noethérienne 1 , ou faiblement méta-noethériens de petite hauteur noethérienne 1 .

3. Comportement des types et hauteurs noethériennes.

Maintenant nous indiquerons le comportement des types et hauteurs noethériennes, par rapport à plusieurs opérations algébriques sur les anneaux. Explicitement, nous considèrerons les opérateurs de passage à l'anneau quotient $R \to R/c = \overline{R}$, la localisation $R \to T^{-1} R = R'$, le produit cartésien fini $(R_1 , R_2) \to R_1 \times R_2$. Soit λ un symbole,

$$\lambda \in \{\tau' , \tau , \mu\tau , \pi\tau , \mu\pi\tau , nh , \mu nh\} .$$

Si $\lambda(\overline{R}) \leq \lambda(R)$, respectivement $\lambda(R') \leq \lambda(R)$, respectivement

$$\lambda(R_1 \times R_2) \leq \sup\{\lambda(R_1) , \lambda(R_2)\} ,$$

nous disons que λ a un bon comportement par rapport à l'opération considérée. Si $\lambda(R_1 \times R_2) = \sup\{\lambda(R_1) , \lambda(R_2)\}$ le comportement est excellent.

Le tableau suivant résume plusieurs propriétés des types et hauteurs noethériennes :

λ	$R \to \overline{R}$	$R \to R'$	$(R_1 , R_2) \to R_1 \times R_2$
τ'	Bon	Bon	Bon
τ	Bon	Bon	Excellent
$\mu\tau$	Bon	-	Excellent
$\pi\tau$	Bon	Bon	Excellent
$\mu\pi\tau$	Bon	-	Excellent
nh	-	Bon	Excellent
μnh	-	-	Excellent

En outre, si R_1 , R_2 satisfont la propriété (SFA), alors

$$\tau'(R_1 \times R_2) = \sup\{\tau'(R_1) , \tau'(R_2)\} ,$$

c'est-à-dire le comportement est excellent.

Nous verrons plus tard des conditions suffisantes pour que le comportement des types et hauteurs noethériennes soit toujours bon.

Pour les anneaux de valuation, on a le résultat suivant.

PROPOSITION 4. - Soit R un anneau de valuation. Les conditions suivantes sont équivalentes : la valuation est discrète de hauteur n si, et seulement si, $\lambda(R) = n$ (où λ est un quelconque des symboles τ' , τ , $\mu\tau$, $\pi\tau$, $\mu\pi\tau$, nh , μnh).

4. Anneaux équiformes.

Nous allons introduire maintenant des hypothèses de travail permettront de déduire plusieurs résultats, qui mettent en rapport les différents types et hauteurs noethériennes.

Si $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}$ sont des idéaux de R , $\mathfrak{p}$ étant premier, on considère la propriété :

$(E_{\mathfrak{p},\mathfrak{a}})$ Deux chaînes noethériennes premières minimales de $\mathfrak{p}$ à $\mathfrak{a}$ ont la même longueur (à savoir $\tau_{\mathfrak{p},\mathfrak{a}}$).

On dit que R est équiforme lorsqu'il satisfait $(E_{\mathfrak{m},\mathfrak{a}})$ pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$, et tout idéal $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{m} \supset \mathfrak{a}$. R est fortement équiforme lorsqu'il satisfait $(E_{\mathfrak{p},\mathfrak{a}})$ pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$, et tout idéal $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}$. R a hauteur équiforme lorsqu'il satisfait $(E_{\mathfrak{m},0})$ pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$. Enfin, R a hauteur fortement équiforme lorsqu'il satisfait $(E_{\mathfrak{p},0})$ pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$.

Tout anneau de valuation est fortement équiforme.

Si R est fortement équiforme (ou équiforme) tout anneau quotient $\overline{R} = R/\mathfrak{c}$ a la même propriété.

Si R est fortement équiforme (ou si R a hauteur fortement équiforme), l'anneau de fractions $R' = T^{-1} R$ a la même propriété.

Si R_1, R_2 ont une des quatre propriétés d'équiformité définies ci-dessus, alors $R_1 \times R_2$ a la même propriété.

PROPOSITION 5. - Si R est un anneau équiforme et $\tau(R) < \infty$, alors

$$\mu nh(R) = nh(R) = \mu\tau(R) = \tau(R) .$$

L'hypothèse d'équiformité semble être essentielle à la démonstration.

De même, on démontre la proposition suivante.

PROPOSITION 6. - Si R satisfait la condition $(E_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}})$ pour des idéaux premiers quelconques $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{q}$, et si $\pi\tau(R) < \infty$, alors $\mu\pi\tau(R) = \pi\tau(R)$.

PROPOSITION 7. - Si R a hauteur équiforme et si $\pi\tau(R) < \infty$, $nh(R) < \infty$, alors $\mu nh(R) = nh(R)$.

Sous des hypothèses d'équiformité, on peut compléter les résultats indiqués dans le tableau du §3 :

PROPOSITION 8. - Soit $\mathfrak{c}$ un idéal de R, $\overline{R} = R/\mathfrak{c}$. Si R a hauteur fortement équiforme, et si tout idéal premier de $\overline{R}$ a hauteur noethérienne finie, alors $nh(\overline{R}) \leqslant nh(R)$. Si R a hauteur équiforme, et si tout idéal maximal de $\overline{R}$ a hauteur noethérienne finie, alors $\mu nh(\overline{R}) \leqslant \mu nh(R)$.

PROPOSITION 9. - Soit T une partie multiplicative de R, $R' = T^{-1} R$. Si R est équiforme, et $\tau(R) < \infty$, alors $\mu\tau(R') \leqslant \mu\tau(R)$, $\mu nh(R') \leqslant \mu nh(R)$. Si R satisfait $(E_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}})$ pour $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{q}$, idéaux premiers quelconques, et si $\pi\tau(R) < \infty$, alors $\mu\pi\tau(R') \leqslant \mu\pi\tau(R)$.

5. Conditions maximales sur le spectre.

Si la famille des idéaux premiers de R satisfait la condition des chaînes ascendantes, on dit que R a spectre noethérien.

L'idéal premier $\mathfrak{p}$ de R est un premier noethérien lorsque l'anneau $R_{\mathfrak{p}}$ est noethérien.

PROPOSITION 10. - Soient R un anneau équiforme, et $\tau(R) = n$. Si $\mathfrak{q} \neq 0$ est un premier noethérien maximal de R, alors $\tau(R/\mathfrak{q}) \leqslant n - 1$. Si en plus R a un seul idéal maximal, alors $\tau(R/\mathfrak{q}) = n - 1$.

Cette proposition permet de faire des raisonnements par induction sur le type noethérien, pourvu qu'il en existe suffisamment d'idéaux premiers noethériens. Ceci est exprimé par les propriétés suivantes d'un anneau R :

PROPRIÉTÉ (MNP). - Si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier non nul de R, il existe un idéal premier $\mathfrak{q}$ tel que $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{q} \neq 0$ et $\mathfrak{q}$ est un idéal premier noethérien maximal de R.

PROPRIÉTÉ RELATIVE (RMNP). - Si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de R contenant proprement l'idéal $\mathfrak{a}$, il existe un idéal premier $\mathfrak{q}$ de R tel que $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{q} \supset \mathfrak{a}$, et maximal parmi ceux pour lesquels $R_{\mathfrak{q}}/R_{\mathfrak{q}}\,\mathfrak{a}$ est noethérien.

PROPOSITION 11. - Soit R un anneau équiforme, satisfaisant la condition (RMNP). Si $\tau(R) = n$, alors :

1° R a spectre noethérien,

2° Si R a un seul idéal maximal $\mathfrak{m}$, alors sa hauteur est

$$\mathrm{ht}(\mathfrak{m}) \leqslant \dim_{R/\mathfrak{m}}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) + n - 1 .$$

PROPOSITION 12. - Soit R un anneau fortement équiforme satisfaisant (RMNP), et tel que $\tau(R) < \infty$. Si, pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$, l'espace vectoriel $R_{\mathfrak{m}}\mathfrak{m}/R_{\mathfrak{m}}\mathfrak{m}^2$ a dimension finie sur $R_{\mathfrak{m}}/R_{\mathfrak{m}}\mathfrak{m}$, alors toute chaîne strictement décroissante d'idéaux premiers de R est finie.

Les propriétés (RMNP), (FA), et (SFA) sont en rapport comme suit :

PROPOSITION 13. - Soit R un anneau tel que $\mathrm{Ass}(\mathfrak{a}) = \mathrm{Min}(\mathfrak{a})$ pour tout idéal $\mathfrak{a}$. Si R satisfait (RMNP) et (FA), alors il satisfait (SFA).

6. Anneaux de polynômes.

Notons d'abord les faits suivants.

1° Soit $\mathfrak{P}$ un idéal premier de $R[X]$ et $\mathfrak{P} \cap R = \mathfrak{p}$, soit $\mathfrak{a}$ un idéal de R, $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}$. Si $R_{\mathfrak{p}}/R_{\mathfrak{p}}\,\mathfrak{a}$ est noethérien, alors $R[X]_{\mathfrak{P}}/R[X]_{\mathfrak{P}}\,\mathfrak{a}[X]$ est aussi noethérien.

2° Si $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}$ sont des idéaux de R, $\mathfrak{p}$ idéal premier, si

$$R[X]_{\mathfrak{p}[X]}/R[X]_{\mathfrak{p}[X]}\,\mathfrak{a}[X]$$

est noethérien, alors $R_{\mathfrak{p}}/R_{\mathfrak{p}}\,\mathfrak{a}$ est aussi noethérien.

3° Soit $\mathfrak{P}$ un idéal premier de $R[X]$, $\mathfrak{P} \cap R = \mathfrak{p}$, et considérons les chaînes

(1) $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{p}_1 \supset \dots \supset \mathfrak{p}_{s-1} \supset \mathfrak{a}$,

(2) $\mathfrak{P} \supset \mathfrak{p}_1[X] \supset \dots \supset \mathfrak{p}_{s-1}[X] \supset \mathfrak{a}[X]$.

Si (1) est une chaîne noethérienne première, alors (2) l'est aussi. Si $\mathfrak{P} = \mathfrak{p}[X]$ et si (2) est une chaîne noethérienne première, alors (1) l'est aussi. Dans ce cas, (1) est une chaîne noethérienne première minimale si, et seulement si, c'est vrai également pour (2).

Rappelons qu'un idéal premier $\mathfrak{p}$ de R est appelé un <u>idéal de Goldman</u> lorsqu'il est de la forme $\mathfrak{p} = \mathfrak{M} \cap R$, où $\mathfrak{M}$ est un idéal maximal de $R[X]$. Un anneau est appelé <u>anneau de Hilbert-Jacobson</u> lorsque tout idéal de Goldman est maximal. Il est utile d'introduire les <u>type et hauteur de Goldman</u> d'un anneau R :

$$\gamma\tau(R) = \sup\{\tau_{\mathfrak{p},\mathfrak{a}} \ ; \ \mathfrak{p} \text{ idéal de Goldman de } R \ , \ \mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}\} \ ,$$

$$\gamma\pi\tau(R) = \sup\{\tau_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}} \ ; \ \mathfrak{p} \text{ idéal de Goldman de } R \ , \ \mathfrak{q} \text{ idéal premier } \mathfrak{p} \supset \mathfrak{q}\} \ ,$$

$$\gamma nh(R) = \sup\{nh(\mathfrak{p}) \ ; \ \mathfrak{p} \text{ idéal de Goldman de } R\} \ .$$

Etant donné que R est une image homomorphe de $R[X]$, si λ est une des fonctions τ' , τ , $\mu\tau$, $\pi\tau$, $\mu\pi\tau$ alors $\lambda(R) < \lambda(R[X])$. Pour l'inégalité opposée, on a la proposition suivante.

PROPOSITION 14. - $nh(R[X]) \leq nh(R)$ <u>et</u> $\mu nh(R[X]) \leq \gamma nh(R)$.

Rappelons que R est un <u>anneau de Seidenberg</u> lorsqu'il satisfait la propriété suivante : Si $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{q}$ sont des idéaux premiers successifs de R , si $\mathfrak{Q}$ est un idéal premier de $R[X]$ tel que $\mathfrak{Q} \cap R = \mathfrak{q}$ et $\mathfrak{Q} \subseteq \mathfrak{p}[X]$, alors $\mathfrak{Q} = \mathfrak{q}[X]$.

R est un anneau <u>fortement de Seidenberg</u> lorsque la propriété ci-dessus est vérifiée pour une paire quelconque d'idéaux $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{q}$ de R .

Il est connu que tout anneau noethérien est un anneau de Seidenberg [7]. Nous montrons le résultat ci-après.

PROPOSITION 15. - <u>Si</u> R <u>est un anneau tel que</u> $\tau(R) < \infty$ <u>et</u> R <u>satisfait la propriété</u> (FA), <u>alors</u> R <u>est un anneau de Seidenberg</u>.

En ce qui concerne l'inégalité $nh(R) \leq nh(R[X])$, nous montrons un nouveau résultat.

PROPOSITION 16. - <u>Si</u> R <u>est un anneau fortement de Seidenberg</u>, <u>ou bien si</u> $R[X]$ <u>a hauteur fortement équiforme et</u> $nh(\mathfrak{p}) < \infty$ (<u>pour tout idéal premier</u> $\mathfrak{p}$ <u>de</u> R), <u>alors</u> $nh(R) \leq nh(R[X])$.

L'étude des anneaux équiformes, de Seidenberg et analogues, n'est pas commencée, et présentera certainement d'importantes difficultés.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ARNOLD (J. T.). - On the dimension theory of overrings of an integral domain, Thesis, Florida State University in Tallahassee, 1967.

[2] ARNOLD (J. T.) and BREWER (J. W.). - Commutative rings which are locally noetherian, J. Math. Kyoto Univ., t. 11, 1971, p. 45-49.

[3] HEINZER (W.). - A note on rings with noetherian spectrum, Duke math. J., t. 36, p. 573-578.

[4] HEINZER (W.) and OHM (J.). - Locally noetherian commutative rings, Trans. Amer. math. Soc., t. 158, 1971, p. 273-284.

[5] HEINZER (W.) and OHM (J.). - On the noetherian-like rings of E. G. Evans, Proc. Amer. math. Soc., t. 34, 1972, p. 73-74.

[6] JAFFARD (P.). - Théorie de la dimension des anneaux de polynômes. - Paris, Gauthier-Villars, 1960 (Mémorial des Sciences mathématiques, 146).

[7] KAPLANSKY (I.). - Commutative rings. - Boston, Allyn and Bacon, 1970.

[8] RIBENBOIM (P.). - Théorie des valuations. - Montréal, Presses de l'Université de Montréal, 1964 (Séminaire de Mathématiques supérieures, 9).

(Texte reçu le 4 juin 1974)

Paulo RIBENBOIM
Department of Mathematics
Queen's University
KINGSTON, Ont. (Canada)