THÉRÈSE MERLIER

Quelques propriétés des anneaux dont un sous-demi-groupe multiplicatif est un $\mathcal{O}$-demi-groupe

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 27, n° 2 (1973-1974), exp. n° 14, p. 1-4

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1973-1974__27_2_A4_0>

Séminaire P. DUBREIL
(Algèbre)
27e année, 1973/74, n° 14, 4 p.

29 avril 1974

QUELQUES PROPRIÉTÉS DES ANNEAUX DONT UN SOUS-DEMI-GROUPE MULTIPLICATIF EST UN $\mathcal{O}$-DEMI-GROUPE

par Thérèse MERLIER

Rappelons qu'un $\mathcal{O}$-demi-groupe S est un demi-groupe S sur lequel peut être définie une relation d'ordre total isotone :

$$(a \leqslant b) \Longrightarrow (ca \leqslant cb \ , \ ac \leqslant bc \quad \text{pour tout} \quad (a \ , b \ , c) \quad \text{de} \quad S^3) \ .$$

1. Anneaux dont le demi-groupe est un $\mathcal{O}$-demi-groupe.

THÉORÈME 1. - *Si* R *est un anneau dont le demi-groupe multiplicatif est un* $\mathcal{O}$-*demi-groupe, alors* R *vérifie la condition* $\forall\, a \in R$, $\forall\, b \in R$, $2ab = 0$.

En effet, si $(R\ , .)$ est un $\mathcal{O}$-demi-groupe, pour une certaine relation d'ordre total $\leqslant$, a et $-a$ sont comparables. Si $a \leqslant -a$, par isotonie, on a $a^2 \leqslant -a^2$ et $-a^2 \leqslant a^2$ en multipliant par a , puis $-a$. D'où $a^2 = -a^2$, soit $2a^2 = 0$, et ceci pour tout a de R . Soient alors deux éléments a et b : $2a^2 = 2b^2 = 0$. Si $a \leqslant b$, on a, par isotonie,

$$2a^2 \leqslant 2ab \quad \text{et} \quad a(2b) = 2ab \leqslant 2b^2 \ .$$

D'où $2ab = 0$.

Remarques. - Un anneau peut vérifier la condition précédente sans être un zéro-anneau ou vérifier $2a = 0$ pour tout a . Considérons par exemple

$$A = \{(2x\ , y)\ , x \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\ , y \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\}\ ,$$

et munissons A des deux lois

$$(2x\ , y) + (2x'\ , y') = (2x + 2x'\ , y + y')$$

$$(2x\ , y)(2x'\ , y') = (4xx'\ , 2x'\, y)\ .$$

On obtient ainsi un anneau non commutatif, dans lequel $2(2x\ , y) = (0\ , 2y)$ n'est pas toujours nul et qui n'est pas un zéro-anneau : $(2x,y)(2x',y') = (0,2x'\,y)$ est non nul si $x' = y = 1$ par exemple.

A vérifie la formule du théorème 1, mais $(A\ , .)$ ne peut être totalement ordonné. En effet,

$$(2,2)(2,2) = (0,0) = (0,1)(0,1) \quad \text{et} \quad (0,1)(2,2) = (0,2) \neq (0,0)\ ,$$

donc l'isotonie ne peut être satisfaite pour aucune relation d'ordre.

On peut aussi construire un demi-groupe infini en remplaçant $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ par un anneau quelconque de caractéristique 4 , par exemple l'anneau des suites sur $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

2. Cas d'un anneau dont l'ensemble des idempotents peut être un demi-groupe totalement ordonné.

Désignons par E l'ensemble des idempotents d'un anneau R.

LEMME 1. - *Si E est un $\mathcal{O}$-demi-groupe, si e et f appartiennent à E,* $(ef = 0) \Longrightarrow (e \text{ ou } f = 0)$.

En effet, si $\leq$ ordonne totalement le demi-groupe E :

$$(0 \leq e < f) \Longrightarrow (0 \leq e \leq ef) .$$

D'où $e = 0$.

De même, si $0 \leq f \leq e$ ou si e et f sont inférieurs à 0, e ou $f = 0$,

Si $e \leq 0 \leq f$, alors $ef = fe = 0$; donc $e + f$ est aussi un idempotent, d'où $e+f \leq 0$ ou $e+f \geq 0$; dans le premier cas, $e+f \leq 0 \leq f$, d'où $(e + f)f = 0 = f$. Il en est de même dans le cas contraire.

Donc, si l'ensemble E des idempotents d'un anneau est un $\mathcal{O}$-demi-groupe, c'est un demi-groupe sans diviseurs de zéro, dont zéro est le plus grand ou le plus petit élément.

LEMME 2. - *Si l'anneau R est unitaire, et si E est un $\mathcal{O}$-demi-groupe, E est réduit à* $\{1 , 0\}$.

Soit $e \in E$, $e \neq 0$; $1 - e \in E$. Mais $e(1 - e) = 0$, donc $e = 1$ d'après le lemme 1.

LEMME 3. - *Si E est un $\mathcal{O}$-demi-groupe, et si e et f appartiennent à E,* $e \neq 0$, $f \neq 0$, $e \neq f$, *alors* $e = ef$ *et* $f = fe$ (ou $e = fe$ et $f = ef$).

On sait que $efe = ef$ ou fe, et ceci dans tout $\mathcal{O}$-demi-groupe idempotent.

Si $ef = fe$, alors $efe = fe = fef = ef$, et $e - ef$ est un idempotent. Comme $(e - ef)f = 0$, on en déduit $e = ef$, de même $f = fe$ et $e = f$, ce qui n'est pas.

Donc $ef \neq fe$: si $ef = efe$, alors $fe = fef$, et

$$(e - ef)^2 = e + ef - ef - efe = e - ef .$$

D'où $e - ef = 0$ et $e = ef$, de même, $f = fe$.

Si $ef = fef$, alors on a $e = fe$ et $f = ef$ puisque $e - fe$, et $f - ef$ sont idempotents.

PROPOSITION 1. - *Si l'ensemble E des idempotents d'un anneau R est un $\mathcal{O}$-demi-groupe de cardinal supérieur ou égal à 3, alors E est un zéro-demi-groupe à gauche, ou à droite, infini.*

Supposons que e et f soient deux idempotents distincts, non nuls. Alors, d'après le lemme 3, on a par exemple $e = ef$ et $f = fe$. Soit g un autre idempotent :

(α) si $e < g < f$: $e \leqslant eg \leqslant ef = e$, d'où $eg = e$, et alors $ge = g$ nécessairement d'après le lemme 3 ,

$$f = fe \leqslant fg \leqslant f \text{ , d'où } fg = f \text{ , } gf = g \text{ .}$$

(β) si $e < f < g$: $ge \geqslant fe = f$. Comme $ge = e$ ou g , on a $ge = g$, donc $eg = e$. Dans ce cas, d'après (α), $fg = f$, $gf = g$.

(γ) si $g < e < f$: $gf \leqslant ef = e$. Donc $gf = g$, $fg = f$. Donc, d'après (α), $eg = e$, $ge = g$. Dans ce cas E est un zéro-demi-groupe à gauche.

Il existe alors une infinité d'idempotents, ceux de la forme $e + n(ef - fe)$, $n \in \underset{\sim}{Z}$.

PROPOSITION 2. - <u>Si l'ensemble</u> E <u>des idempotents d'un anneau</u> R <u>est un</u> Θ-<u>demi-groupe</u>, <u>l'ensemble des éléments réguliers de</u> R <u>est un demi-groupe sans diviseurs de zéros ou est réduit à</u> $\{0\}$.

1° Si E est de cardinal 1 , l'ensemble des éléments réguliers est réduit à $\{0\}$.

2° Si E contient un idempotent, et un seul, e non nul : si $a \neq 0$ est régulier,

$$a = axa \quad \text{avec} \quad ax = xa = e \text{ , } \quad a = ae = ea \text{ .}$$

Donc les éléments réguliers sont les éléments inversibles par rapport à e , qui forment bien un demi-groupe sans diviseurs de zéro, le groupe multiplicatif ayant e comme élément neutre.

3° Enfin, si E contient au moins trois éléments : d'après la proposition 1, E est un zéro-demi-groupe à gauche par exemple. D'où, si $a = axa$ et $b = byb$,

$$ab = axyb = abyxab$$

puisque by et xa sont des idempotents non nuls, d'où ab est régulier. De plus, ab est non nul, car $a = axa = axaby$, donc $ab = 0$ implique $a = 0$.

COROLLAIRE. - <u>Un demi-groupe</u> S <u>régulier</u>, <u>demi-groupe multiplicatif d'un anneau</u>, <u>dont l'ensemble des idempotents est un</u> Θ-<u>demi-groupe</u>, <u>est un groupe avec zéro</u>.

3. Propriétés nouvelles des idempotents d'un anneau.

Le paragraphe précédent nous a incités à considérer de plus près les propriétés des idempotents d'un anneau, dans un cadre plus général.

Pour les démonstrations des propriétés suivantes nous renvoyons à notre Note aux Comptes Rendus [1].

A désigne dans la suite un anneau, E l'ensemble de ses idempotents, et E^* l'ensemble des idempotents non nuls.

THÉORÈME 2. - Si, dans un anneau A, il existe un idempotent e non nul tel que $\{x \in A ;\ e + x$ est un idempotent non nul$\}$ est un idéal, alors l'ensemble E des idempotents de A est un demi-groupe intègre vérifiant :

$$\forall\ (f , h) \in E^2 ,\quad \forall\ g \neq 0 \in E ,\qquad fgh = fh .$$

THÉORÈME 3. - Soit e un idempotent non nul d'un anneau A. Il y a équivalence entre les assertions suivantes :

(a) Pour tout f, $f \in E^*$, $ef = e$;

(b) $I = \{x \in A ;\ e + x \in E^*\}$ est un idéal bilatère de A, contenu dans Ae ;

(c) $I = \{x \in A ;\ e + x \in E^*\}$ est un idéal bilatère de A, contenu dans l'annulateur à droite de Ae $(0 .\cdot Ae)$;

(d) L'ensemble E^* des idempotents non nuls de A est un zéro-demi-groupe à gauche $(\forall\ f \in E^* ,\ \forall\ g \in E^* ,\ fg = f)$.

Exemple. - Soit R un anneau unitaire intègre, d'élément unité 1, et soit $A = R \times R$ l'ensemble des couples (x , y), $x \in R$, $y \in R$, muni des deux opérations

$$(x , y) + (x' , y') = (x + x' , y + y')$$
$$(x , y)(x' , y') = (xx' , yx') .$$

Alors A est un anneau dont les idempotents non nuls sont de la forme $(1 , x)$, $x \in R$ et, comme $(1 , x)(1 , x') = (1 , x)$ ces idempotents, forment bien un zéro-demi-groupe à gauche, et satisfont aux conditions du théorème 3.

BIBLIOGRAPHIE

[1] MERLIER (T.). - Quelques propriétés des idempotents d'un anneau, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 279, 1974, Série A, p.49-51.

(Texte reçu le 14 avril 1975)

Thérèse MERLIER
Résidence Gascogne
105 rue Boucicaut
92260 FONTENAY AUX ROSES