Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Virgil Emil Căzănescu

Propriétés catégorielles dans la théorie des algèbres universelles

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 27, nº 2 (1973-1974), exp. nº 13, p. 1-8

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1973-1974__27_2_A3_0>

Séminaire DUBREIL
(Algèbre)
27e année, 1973/74, n° 13, 8 p.

22 avril 1974

PROPRIÉTÉS CATÉGORIELLES DANS LA THÉORIE DES ALGÈBRES UNIVERSELLES

par Virgil Emil CĂZĂNESCU

1. La théorie des algèbres universelles et la théorie des catégories constituent des étapes importantes qui ont couronné les efforts des algébristes qui cherchaient des théories algébriques de plus en plus générales.

Nous croyons que la théorie des algèbres universelles a été, et peut encore être, une source d'inspiration pour l'algébriste qui cherche à transformer certains théorèmes connus d'une catégorie particulière en théorèmes de la théorie des catégories. En même temps, nous croyons que la théorie des catégories peut nous aider à systématiser nos connaissances sur la théorie des algèbres universelles ou à démontrer plus facilement une partie de ses théorèmes. Nous venons d'énoncer les idées qui ont été le point de départ de nos travaux actuels.

Pour réaliser ces idées on a dû d'abord :

(a) Trouver, dans les catégories particulières étudiées, les correspondants des notions usuelles de la théorie des catégories.

(b) Trouver, dans la théorie des catégories, les notions qui correspondent aux notions usuelles de la théorie des algèbres universelles.

(c) Étudier les nouvelles notions, apparues grâce au point (b).

2. On va rappeler d'abord les catégories de la théorie des algèbres universelles qui ont constitué l'objet de nôtre intérêt.

Soient A un ensemble, et τ un nombre ordinal. Un sous-ensemble de A^τ est appelé relation τ-aire dans A. Une fonction (d'un sous-ensemble) de A^τ dans A est appelée opération (partielle) τ-aire dans A.

Soient τ un nombre ordinal, et $\Delta = \{\tau_i\}_{i\in\tau}$ une famille de nombres ordinaux. Une famille $R = \{R_i\}_{i\in\tau}$, où R_i est une relation τ_i-aire dans A, est appelée <u>système relationnel de type</u> Δ <u>dans</u> A. Le couple $\mathfrak{A} = \langle A , R\rangle$ est appelé <u>système relationnel de type</u> Δ. Le couple $\mathfrak{A} = \langle A , F\rangle$ est appelé algèbre (partielle) de type Δ si, et seulement si, A est un ensemble, et $F = \{F_i\}_{i\in\tau}$ est une famille dont F_i est une opération (partielle) τ_i-aire dans A pour tout $i \in \tau$.

Étant donnés deux systèmes relationnels $\mathfrak{A} = \langle A , R\rangle$ et $\mathfrak{B} = \langle B , S\rangle$ de type Δ, une fonction $f : A \dashrightarrow B$ est appelée homomorphisme de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{B}$ si, et seulement si,

$$(\forall\ i \in \tau)\ (\forall\ a \in R_i)\ (fa \in S_i)\ .$$

$SR(\Delta)$ va désigner la catégorie des systèmes relationnels de type Δ. Soit $U : SR(\Delta) \longrightarrow \mathrm{Ens}$ le foncteur qui "oublie" les relations.

Étant données deux algèbres (partielles) $\mathfrak{A} = \langle A , F\rangle$ et $\mathfrak{B} = \langle B , G\rangle$ de type Δ, une fonction $f : A \longrightarrow B$ est un homomorphisme de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{B}$ si, et seulement si,

$$(\forall\ i \in \tau)\ (\forall\ a \in \mathrm{Dom}(F_i))\quad (fa \in \mathrm{Dom}(G_i)\ \text{ et }\ f(F_i(a)) = G_i(fa)) .$$

Soient ρ un nombre ordinal, et $\Delta_1 = \{\rho_i\}_{i\in\rho}$ une famille de nombres ordinaux.

Un triplet $\mathfrak{A} = \langle A , R , F\rangle$ est appelé système algébrique (partiel) de type $\langle \Delta,\Delta_1\rangle$ si, et seulement si, $\langle A , R\rangle$ est un système relationnel de type Δ et $\langle A , F\rangle$ est une algèbre (partielle) de type Δ_1.

Étant donnés deux systèmes algébriques (partiels) $\mathfrak{A} = \langle A , R , F\rangle$ et $\mathfrak{B} = \langle B,S,G\rangle$ de type $\langle \Delta , \Delta_1\rangle$, une fonction $f : A \longrightarrow B$ est appelée homomorphisme de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{B}$ si, et seulement si, f est un homomorphisme de $\langle A , R\rangle$ dans $\langle B , S\rangle$ et un homomorphisme de $\langle A , F\rangle$ dans $\langle B , G\rangle$. Soient $SA(\Delta , \Delta_1)$ $(SAP(\Delta , \Delta_1))$ la catégorie des systèmes algébriques (partiels) de type (Δ , Δ_1), et

$$I : SA(\Delta , \Delta_1) \longrightarrow SAP(\Delta , \Delta_1)$$

le foncteur inclusion.

Soit $\Delta_2 = \{\eta_i\}_{i\in\tau+\rho}$, où $\eta_i = \tau_i$ pour $i \in \tau$ et $\eta_{\tau+i} = \rho_i + 1$ pour $i \in \rho$.

Soit $V : SAP(\Delta , \Delta_1) \longrightarrow SR(\Delta_2)$ le foncteur défini par :

(a) $V(\mathfrak{A}) = \langle A , R'\rangle$ pour $\mathfrak{A} = \langle A , R , F\rangle \in \mathrm{Ob}\, SAP(\Delta , \Delta_1)$, où $R'_i = R_i$ pour $i \in \tau$ et $R'_{\tau+i} = \{a \in A^{\rho_i+1}\ ;\ a/\rho_i \in \mathrm{Dom}(F_i)$ et $a(\rho_i) = F_i(a/\rho_i)\}$ pour $i \in \rho$.

(b) $V(f) = f$ pour $f \in SAP(\Delta_1 , \Delta_2)(\mathfrak{A} , \mathfrak{B})$.

Soient M un ensemble, $\mathfrak{L} = \langle L , F\rangle$ l'algèbre libre de type Δ_1 engendrée par M, R un système relationnel de type Δ dans L, $E \subseteq L^2$, $N = E \amalg \coprod_{i\in\tau} R_i$ ($\coprod$ = réunion disjointe) et $P \subseteq \mathcal{P}(N) \times N$. Si $x \in N$, on note $n(x) = -1$ si $x \in E$, et $n(x) = i$ si $x \in R_i$.

Un système algébrique $\mathfrak{A} = \langle A , S , G\rangle$ de type $\langle \Delta , \Delta_1\rangle$ est appelé système algébrique à implications de type $\langle \Delta , \Delta_1 , P\rangle$ si, et seulement si, pour tout homomorphisme $\varphi : \mathfrak{L} \longrightarrow \langle A , G\rangle$ et pour tout $\langle a , x\rangle \in P$, on a

$$((\forall\ y \in a)\quad (\varphi y \in S_{n(y)})) \longrightarrow \varphi x \in S_{n(x)}$$

où S_{-1} représente l'égalité dans A. Soient $SAI(\Delta , \Delta_1 , P)$ la catégorie des systèmes algébriques à implications de type (Δ , Δ_1 , P) et

$$J : SAI(\Delta , \Delta_1 , P) \longrightarrow SA(\Delta , \Delta_1)$$

le foncteur inclusion.

3. Tableaux récapitulatifs des propriétés qui nous ont préoccupés.

Propriétés \ Foncteurs	U	V	I	J
(Pleinement) fidélité	(Non) Oui	(Oui) Oui	(Oui) Oui	(Oui) Oui
Existence de l'adjoint à droite	Oui	Non	Non	Non
Existence de l'adjoint à gauche	Oui	Oui	Oui (Il est fidèle)	Oui
Commutativité avec les limites projectives	Oui	Oui	Oui	Oui
Commutativité avec les limites inductives	Oui	Non	Non	Non
Commutativité avec les familles monomorphes	Oui	Oui	Oui	Oui
Commutativité avec les familles épimorphes	Oui	Non	Oui	?
Commutativité avec les images générales	Oui	Non	Oui	?
Commutativité avec les co-images générales	Oui	Oui	Oui	Non

Propriétés \ Catégories	Ens	SR(Δ)	SAP(Δ,Δ_1)	SA(Δ,Δ_1)	SAI(Δ,Δ_1,P)
$f_i : A \to A_i$ famille monomorphe	$(\forall a \in A)\ (\forall a' \in A)\ (a \neq a' \to (\exists i)\ f_i(a) \neq f_i(a'))$				
Monomorphisme strict	Injection	Injection U-initial	Sous système algébrique partiel	Injection U-initial	?
Monomorphisme effectif	"	"	"	"	?
Monomorphisme effectif universel	"	"	? (*)	?	?
$f_i : A_i \to A$ famille épimorphe	$A=\bigcup f_i(A_i)$	$A=\bigcup f_i(A_i)$	$A=\overline{\bigcup f_i(A_i)}$	$A=\overline{\bigcup f_i(A_i)}$	?
Epimorphisme strict	Surjection	Surjection U-final			Surjection UVIJ-final
Epimorphisme effectif					
Epimorphisme effectif universel	"	"			?
Existence des limites inductives	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui
Existence des limites projectives	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui
Existence des images générales	Oui	Oui	Oui	Oui	?
Existence des co-images générales	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui

(*) Il existe des morphismes effectifs qui ne sont pas effectifs universels.

Nous allons rappeler les définitions des monomorphismes effectifs et effectifs universels, notions sur lesquelles nous ne reviendrons plus. Nous avons introduit ces notions dans nos tableaux surtout à cause du fait que dans la plupart des cas nous n'avons pas encore, pour eux, une autre caractérisation plus malléable.

Un morphisme $u : A \to B$ est appelé monomorphisme effectif si la somme fibrée $B \amalg_A B$ existe et si $u = \mathrm{Ker}(i_1 , i_2)$

$$\begin{tikzcd}
 & B \arrow[dr, "i_1"] & \\
A \arrow[ur, "u"] \arrow[dr, "u"'] & & B \amalg_A B \\
 & B \arrow[ur, "i_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Un morphisme $u : A \to B$ est appelé monomorphisme effectif universel si, pour tout morphisme $v : A \to C$ la somme fibrée $B \amalg_A C$ existe, et si i est un monomorphisme effectif.

$$\begin{tikzcd}
 & B \arrow[dr] & \\
A \arrow[ur, "u"] \arrow[dr, "v"'] & & B \amalg_A C \\
 & C \arrow[ur, "i"'] &
\end{tikzcd}$$

4. Pour prouver ces propriétés, on peut partir de la catégorie Ens dont les propriétés sont bien connues, et, à l'aide du foncteur U et de ses adjoints, on peut obtenir les propriétés de la catégorie $SR(\Delta)$; utilisant le foncteur V et son adjoint, de ces propriétés on peut obtenir les propriétés de la catégorie $SAP(\Delta , \Delta_1)$, etc.

Pour illustrer cette idée aussi bien que les idées avec lesquelles nous avons commencé, nous allons donner deux exemples.

4.1. La construction des limites projectives dans les catégories $SR(\Delta)$ et $SAP(\Delta , \Delta_1)$, ou des limites inductives dans la catégorie $SR(\Delta)$, nous suggère le théorème suivant :

THÉORÈME. - Soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un foncteur fidèle tel que, pour toute famille épimorphe $f'_i : F(X_i) \to X'$, il existe $X \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$ tel que $F(X) = X'$ et

$$f'_i : F(X_i) \to F(X)$$

soit F-finale. Si la catégorie $\mathcal{C}'$ a des limites inductives, alors la catégorie $\mathcal{C}$ a des limites inductives, et le foncteur F commute avec les limites inductives.

Nous allons rappeler les définitions des notions utilisées dans ce théorème.

(a) La famille $f'_i : F(X_i) \to F(X)$ est appelée F-finale si, et seulement si, $\forall\, Y \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$ et $\forall\, f' : F(X) \to F(Y)$, les deux conditions suivantes sont équivalentes :

1° il existe $f : X \to Y$ tel que $F(f) = f'$, 2° pour tout i, il existe $f_i : X_i \to Y$ tel que $F(f_i) = f' f'_i$.

(b) Une famille de morphismes $f_i : X_i \to X$ de la catégorie $\mathcal{C}$ est dite épimorphe si, et seulement si, $\forall\, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ et, quel que soit le couple de morphismes $g, h : X \to Y$, les égalités $gf_i = hf_i$ impliquent $g = h$.

(c) Une catégorie $\mathcal{C}$ a des limites inductives si, et seulement si, tout foncteur $G : \mathfrak{I} \to \mathcal{C}$, défini sur une petite catégorie $\mathfrak{I}$, a une limite inductive. Une limite inductive du foncteur G est un cône inductif (X, u_i) de base G tel que, pour tout cône inductif (Y, v_i), de base G, $\exists\,!\; w : X \to Y$ tel que $wu_i = v_i$. Le couple (X, u_i) est un cône inductif de base G si, et seulement si, $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, $u_i : G(i) \to X$ $(i \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{I})$ et, pour tout morphisme $\alpha : i \to j$ de $\mathfrak{I}$, on a $u_j\, G(\alpha) = u_i$.

Mais dès que l'on a prouvé ce théorème, pour démontrer l'existence des limites dans la catégorie $SR(\Delta)$ et la propriété du foncteur U de commuter avec les limites, il suffit de vérifier les hypothèses et les hypothèses duales de ce théorème.

Pour passer aux autres catégories, il suffit d'appliquer le théorème connu : Si $F : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ est un foncteur pleinement fidèle qui a un adjoint à gauche et si $\mathcal{C}$ a des limites projectives (inductives) alors $\mathcal{C}'$ a des limites projectives (inductives) et le foncteur F commute avec les limites projectives.

Un adjoint à gauche du $F : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ est un foncteur $G : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ tel qu'il existe deux morphismes fonctoriels $\Psi : 1_{\mathcal{C}} \to FG$ et $\Phi : GF \to 1_{\mathcal{C}'}$ avec $F(\Phi_{X'})\, \Psi_{F(X')} = 1_{F(X')}$ pour tout $X' \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}'$, et $\Phi_{G(X)}\, G(\Psi_X) = 1_{G(X)}$ pour tout $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$.

4.2. Il est évident que, dans la catégorie des ensembles, on a :

(a) $f_i : A \to A_i$ est monomorphe si, et seulement si,

$$(\forall\, a \in A)\ (\forall\, b \in A)\ \ (a \neq b \to (\exists\, i)\ f_i(a) \neq f_i(b)),$$

(b) $f_i : A_i \to A$ est épimorphe si, et seulement si, $A = \bigcup_i f_i(A)$.

Pour passer aux autres catégories, on peut utiliser les propriétés suivantes :

(A) Si $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ est un foncteur fidèle, et $u_i : A \to A_i$ est une famille de morphismes de $\mathcal{C}$ telle que la famille $\{F(u_i)\}_i$ est monomorphe, alors la famille $\{u_i\}_i$ est monomorphe.

(B) Si $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ est un foncteur pleinement fidèle, si $u_i : A \to A_i$ est une famille monomorphe de $\mathcal{C}$ et si, pour tout $X' \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}'$, il existe $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ et un épimorphisme $p : F(X) \to X'$, alors la famille $\{F(u_i)\}_i$ est monomorphe.

(C) Si $G : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ est un adjoint à gauche de $F : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$, et si $u_i : A_i \to A$ est une famille épimorphe de $\mathcal{C}$, alors $\{G(u_i)\}_i$ est épimorphe.

La caractérisation des familles monomorphes ou épimorphes dans $SR(\Delta)$ est obtenue en appliquant au foncteur U les propriétés (A) et (C) et leurs duales. La caractérisation des familles monomorphes dans les catégories $SAP(\Delta, \Delta_1)$, $SA(\Delta, \Delta_1)$

et $SAI(\Delta , \Delta_1 , P)$ est obtenue en appliquant aux foncteurs V , I et J la propriété (A) et la duale de la propriété (C). Pour la caractérisation des familles épimorphes dans la catégorie $SAP(\Delta , \Delta_1)$, j'ai dû me contenter d'une démonstration directe. La caractérisation des familles épimorphes dans la catégorie $SA(\Delta,\Delta_1)$ est obtenue en appliquant les duales des propriétés (A) et (B). Quant à la caractérisation des familles épimorphes dans la catégorie $SAI(\Delta , \Delta_1 , P)$, nous la croyons un problème ouvert.

5. Un théorème classique nous dit qu'une algèbre A est sous-directement-irréductible si, et seulement si, pour toute famille $\{\theta_i\}_i$ de congruences de A , si $\bigcap \theta_i = \Delta_A$, alors il existe i tel que $\theta_i = \Delta_A$. Nous allons démontrer un théorème qui contiendra, comme cas particulier, ce théorème classique.

Pour ce faire, il a fallu généraliser la notion d'image d'un morphisme, introduite par J. SONNER, à la notion d'image d'une famille de morphismes ayant la même co-source.

Nous allons appeler image de la famille de morphismes $\{u_i : A_i \to A\}_{i\in I}$ un sous-objet (B , j) de A qui a les propriétés suivantes :

(a) il existe $p_i : A_i \to B$ une famille épimorphe avec $jp_i = u_i$ pour tout $i \in I$;

(b) pour tout objet C , famille épimorphe $r_i : A_i \to C$ et morphisme $k : C \to A$, tels que $kr_i = u_i$ pour tout $i \in I$, il existe un morphisme $\alpha : C \to B$ tel que $j\alpha = k$.

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[r, "u_i"] \arrow[d, dashed, "r_i"'] \arrow[dr, dashed, "p_i" near start] & A \\ C \arrow[ur, dashed, "k"' near start] \arrow[r, dashed, "\alpha"] & B \arrow[u, "j"'] \end{tikzcd}$$

La notion duale est appelée co-image.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie à co-images générales, c'est-à-dire une catégorie dans laquelle toute famille de morphismes ayant la même source à une co-image.

Un épimorphisme $u : A \to B$ est appelé strict si, pour tout carré commutatif,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, dashed, "u"] \arrow[d, dashed] & B \arrow[d, dashed] \\ C \arrow[r, dashed, "v"] & D \end{tikzcd}$$

où $v : C \to D$ est un monomorphisme, il existe un morphisme $i : B \to C$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, dashed, "u"] \arrow[d] & B \arrow[d] \arrow[dl, dashed, "i"'] \\ C \arrow[r, dashed, "v"] & D \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

Soit $\{A_i\}_{i\in I}$ une famille d'objets. Un produit sous-direct $(S , \{s_i\}_{i\in I})$ de la famille $\{A_i\}_{i\in I}$ est formé d'un objet S et d'une famille monomorphe $\{s_i\}_{i\in I}$ telle que, pour tout $i \in I$, $s_i : S \to A_i$ est un épimorphisme strict.

L'objet A est appelé sous-directement-irréductible si, et seulement si, pour toute famille de morphismes $s_i : A \to A_i$ pour laquelle $(A , \{s_i\}_{i\in I})$ est un produit sous-direct de la famille $\{A_i\}_{i\in I}$, il existe $i \in I$ tel que s_i soit un isomorphisme.

THÉORÈME. - Si A est un objet de la catégorie $\mathcal{C}$, tel que la classe P de ses objets-quotient stricts différents de $(A , 1_A)$ est un ensemble, alors A est sous-directement-irréductible si, et seulement si, P a un élément qui soit le plus grand.

Démonstration. - Supposons que P a un élément qui est le plus grand. Soit $(A , \{s_i\}_{i\in I})$ un produit sous-direct de la famille $\{A_i\}_{i\in I}$. La famille $\{s_i\}_{i\in I}$ étant monomorphe, on a $(A , 1_A) = \mathrm{Coim}\{s_i\}_{i\in I}$. Dans une catégorie à co-images générales, on a $\mathrm{Coim}\{s_i\}_{i\in I} = \bigvee_{i\in I} \mathrm{Coim}(s_i)$, la borne supérieure étant calculée dans la classe des objets-quotient stricts de A , donc $(A , 1_A) = \bigvee_{i\in I} \mathrm{Coim}(s_i)$. Puisque P a un élément qui est le plus grand, il existe $i \in I$ tel que $\mathrm{Coim}(s_i) = (A , 1_A)$, c'est-à-dire s_i est un monomorphisme, donc un isomorphisme, du fait qu'il est un épimorphisme strict.

Réciproquement, supposons que P n'ait pas un élément qui soit plus grand. Soit $(X , p) = \mathrm{Coim}\{\alpha\}_{(X_\alpha,\alpha)\in P}$. Les

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, dashed, "\alpha"] \arrow[dr, "p"'] & & X_\alpha \\ & X \arrow[ur, "r_\alpha"'] & \end{tikzcd}$$

égalités $r_\alpha p = \alpha$ impliquent $(X , p) \geq (X_\alpha , \alpha)$ pour tout $(X_\alpha , \alpha) \in P$. Étant donné que P n'a pas un élément qui soit le plus grand, on a $(X , p) = (A , 1_A)$, donc la famille $\{\alpha\}_{(X_\alpha,\alpha)\in P}$ est monomorphe. Donc $(A , \{\alpha\}_{(X_\alpha,\alpha)\in P})$ est un produit sous-direct de la famille $\{X_\alpha\}_{(X_\alpha,\alpha)\in P}$. Tenant compte du fait que, pour tout $(X_\alpha , \alpha) \in P$, α n'est pas un isomorphisme, il résulte que A n'est pas sous-directement-irréductible.

6. Dans cette dernière partie, nous allons énoncer quelques propriétés des catégories à images.

Une catégorie est dite à images si tout morphisme a une image.

Un monomorphisme $u : A \to B$ est appelé fort si de $u = ab$, où b est un épimorphisme, il résulte que b est un isomorphisme.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "b"'] & & B \\ & C \arrow[ur, "a"'] & \end{tikzcd}$$

Une catégorie à images est dite à images transitives si elle vérifie les quatre propriétés équivalentes :

(a) la composition des monomorphismes forts est un monomorphisme fort ;

(b) tout monomorphisme fort est strict ;

(c) $\mathrm{Im}(vu) \leqslant \mathrm{Im}(u)$ pour toute paire de morphismes composables ;

(d) pour tout morphisme $u : A \to B$ l'application qui, à chaque sous-objet fort (C , i) de A, fait correspondre le sous-objet fort $u(i) = \mathrm{Im}(ui)$ de B, est croissante.

Toutes les bornes supérieures seront calculées dans la classe des sous-objets forts d'un objet. Dans une catégorie $\mathcal{C}$ à images générales on a :

1° $\mathcal{C}$ est à images transitives ;

2° les bornes supérieures existent pour toute famille de sous-objets forts d'un objet de $\mathcal{C}$;

3° si $f = \bigvee_{i\in I} j_i$, alors la seule famille de morphismes $\{u_i\}_{i\in I}$ pour laquelle $ju_i = j_i$, est épimorphe ;

4° pour toute famille de morphismes $u_i : A_i \to A$, on a :

$$\mathrm{Im}\{u_i\}_i = \mathrm{Im}\{\mathrm{Im}(u_i)\}_{i\in I} = \bigvee_{i\in I} \mathrm{Im}(u_i) \ ;$$

5° $u(\bigvee_{i\in I} j_i) = \bigvee_{i\in I} u(j_i)$ pour tout morphisme u ;

6° $u(\mathrm{Im}\{u_i\}_{i\in I}) = \mathrm{Im}\{uu_i\}_{i\in I}$ pour toute famille de morphismes $u_i : A_i \to A$ et tout morphisme $u : A \to B$.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie à images. Si $\mathcal{C}$ a les propriétés 2° et 3°, ou si dans $\mathcal{C}$ les sommes directes existent, alors $\mathcal{C}$ est à images générales.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie à images transitives qui a la propriété 2°. Si $\mathcal{C}$ vérifie la propriété 3°, mais seulement pour le cas particulier $j = 1$ ou si dans $\mathcal{C}$ les noyaux de double flèche existent, alors $\mathcal{C}$ est à images générales.

(Texte reçu le 22 avril 1974)

Virgil Emil CĂZĂNESCU
Str. Dr. Toma Ionescu n° 1
BUCURESTI 35 (Roumanie)