Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

KLAUS KEIMEL

Conditions de Mal'cev et algèbres universelles uniformes

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 27, nº 2 (1973-1974), exp. nº 11, p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1973-1974__27_2_A1_0>

Séminaire DUBREIL
(Algèbre)
27e année, 1973/74, n° 11, 5 p.

25 février 1974

CONDITIONS DE MAL'CEV ET ALGÈBRES UNIVERSELLES UNIFORMES

par Klaus KEIMEL

Parmi les théorèmes les plus beaux de l'algèbre universelle on peut compter les théorèmes dits du type de Mal'cev. Le premier théorème de ce type est dû à A. I. MAL'CEV lui-même qui, en 1954, a caractérisé les classes primitives (= classes équationnelles, = variétés) d'algèbres universelles dans lesquelles les congruences de toute algèbre sont mutuellement permutables. MAL'CEV avait senti aussi qu'il y avait des liens avec l'algèbre universelle topologique. C'est J. HAGEMANN qui, récemment, a entrepris une étude systématique des relations entre les conditions du type de Mal'cev et l'algèbre universelle topologique. Il s'est avéré que les liens de ces conditions de Mal'cev avec les algèbres universelles uniformes sont très étroits. Nous exposerons un résultat typique de HAGEMANN qui va dans cette direction et qui se rattache directement au théorème initial de MAL'CEV [3].

Soient I un ensemble et $\tau = (n(i))_{i\in I}$ une famille d'entiers naturels. Soit $(\underset{\sim}{f}_i)_{i\in I}$ une famille de symboles fonctionnels. Soient X_1 , X_2 , ... des variables. L'ensemble des <u>termes</u> est défini par récurrence : Chaque variable X_n est un terme ; et si $T_1 , T_2 , \ldots , T_{n(i)}$ sont des termes, il en est de même de $\underset{\sim}{f}_i(T_1 , T_2 , \ldots , T_{n(i)})$.

On appelle <u>algèbre universelle du type</u> τ (ou simplement <u>algèbre</u>) tout couple (A , F) , où A est un ensemble et $F = (f_i)_{i\in I}$ une famille d'opérations

$$f_i : A^{n(i)} \longrightarrow A .$$

Si (A , F) est une algèbre du type τ , chaque terme $T = T(X_1 , X_2 , \ldots , X_n)$ peut être interprété comme opération sur A :

$$(x_1 , x_2 , \ldots , x_n) \longmapsto T(x_1 , x_2 , \ldots , x_n) : A^n \longrightarrow A ,$$

chaque symbole $\underset{\sim}{f}_i$ étant interprété par l'opération f_i sur A . Si

$$S = S(X_1 , X_2 , \ldots , X_n) \quad \text{et} \quad T = T(X_1 , X_2 , \ldots , X_n)$$

sont deux termes, on dit que l'algèbre (A , F) <u>vérifie l'identité</u> $S = T$, si $S(x_1 , x_2 , \ldots , x_n) = T(x_1 , x_2 , \ldots , x_n)$ quels que soient $x_1 , x_2 , \ldots , x_n$ dans A . Une classe $\mathcal{K}$ d'algèbres du type τ est appelée <u>primitive</u> s'il existe une famille de couples $(S_\lambda , T_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de termes telle que $\mathcal{K}$ soit la famille de toutes les algèbres du type τ qui vérifient les identités $S_\lambda = T_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$.

Soit (A , F) une algèbre du type τ . Pour mettre en évidence la similitude entre relations de congruences et structures uniformes compatibles sur A , rappelons qu'une relation R sur A est

<u>réflexive</u> si $\Delta \subset R$, où $\Delta = \{(x , x) ; x \in A\}$,

<u>symétrique</u> si $R^{-1} \subset R$, où $R^{-1} = \{(x , y) ; (y , x) \in R\}$,

<u>transitive</u> si $R \circ R \subset R$, où $R \circ R = \{(x , z) ; \exists y , (x,y) \in R \text{ et } (y,z) \in R\}$,

<u>compatible</u> si $f_i(R , \dots , R) \subset R$, pour tout $i \in I$, où $f_i(R , \dots , R)$ est l'ensemble des couples $(f_i(x_1 , \dots , x_{n(i)}) , f_i(y_1 , \dots , y_{n(i)}))$ avec $(x_1 , y_1) \in R , \dots , (x_{n(i)} , y_{n(i)}) \in R$.

Une relation réflexive, symétrique, transitive et compatible est une <u>congruence</u>.

Considérons un filtre $\mathfrak{U}$ sur $A \times A$. On note $\mathfrak{U}^{-1}$ le filtre $\{R^{-1} ; R \in \mathfrak{U}\}$, et $\mathfrak{U} \circ \mathfrak{U}$ le filtre engendré par $\{R \circ R ; R \in \mathfrak{U}\}$. Pour toute relation $R \subset A \times A$, on désignera par $\dot{R}$ le filtre engendré par R ; et si $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{B}$ sont deux filtres sur $A \times A$, on écrira $\mathfrak{U} \leqslant \mathfrak{B}$ si $\mathfrak{U}$ est plus fin que $\mathfrak{B}$. On dira que $\mathfrak{U}$ est

<u>réflexif</u> si $\dot{\Delta} \leqslant \mathfrak{U}$,

<u>symétrique</u> si $\mathfrak{U}^{-1} \leqslant \mathfrak{U}$,

<u>transitif</u> si $\mathfrak{U} \circ \mathfrak{U} \leqslant \mathfrak{U}$,

<u>compatible</u> si $f_i(\mathfrak{U} , \dots , \mathfrak{U}) \leqslant \mathfrak{U}$ pour tout $i \in I$, où $f_i(\mathfrak{U} , \dots , \mathfrak{U})$ désigne le filtre engendré par les $f_i(R , \dots , R)$ avec $R \in \mathfrak{U}$.

Si $\mathfrak{U}$ est un filtre réflexif, on dira aussi que $\mathfrak{U}$ est une <u>structure préuniforme</u>. Si $\mathfrak{U}$ est réflexif, symétrique et transitif, $\mathfrak{U}$ est une structure uniforme. La compatibilité signifie la continuité uniforme des opérations f_i .

Maintenant, nous pouvons énoncer les théorèmes. L'équivalence des conditions (1.5) et (1.1) constitue le théorème initial de MAL'CEV [3]. L'équivalence de ces conditions avec (1.2), (1.3) et (1.4) est dû à H. WERNER [4].

THÉORÈME 1. - <u>Pour une classe primitive</u> $\mathcal{K}$ <u>d'algèbres universelles, les conditions suivantes sont équivalentes</u> :

(1.1) <u>Il existe un terme</u> $P(X , Y , Z)$ <u>tel que les identités</u>

$$P(X , X , Z) = Z , \quad P(X , Z , Z) = X$$

<u>soient vraies dans</u> $\mathcal{K}$ <u>(c'est-à-dire dans chaque</u> $A \in \mathcal{K}$).

(1.2) <u>Sur toute algèbre</u> $A \in \mathcal{K}$, <u>toute relation réflexive compatible est symétrique</u>.

(1.3) <u>Sur toute algèbre</u> $A \in \mathcal{K}$, <u>toute relation réflexive compatible est transitive</u>.

(1.4) <u>Sur toute algèbre</u> $A \in \mathcal{K}$, <u>toute relation réflexive compatible est une congruence</u>.

(1.5) <u>Sur toute algèbre</u> $A \in \mathcal{K}$, <u>deux congruences quelconques</u> R <u>et</u> S <u>sont permutables (c'est-à-dire que</u> $R \circ S = S \circ R$).

De manière semblable, on a le théorème de HAGEMANN.

THÉORÈME 2. - *Pour une classe primitive* $\mathcal{K}$ *d'algèbres universelles, les conditions suivantes sont équivalentes* :

(1.1) *Comme dans le théorème* 1.

(2.2) *Sur toute algèbre* $A \in \mathcal{K}$, *toute structure pré-uniforme compatible est symétrique*.

(2.3) *Sur toute algèbre* $A \in \mathcal{K}$, *toute structure pré-uniforme compatible est transitive*.

(2.4) *Sur toute algèbre* $A \in \mathcal{K}$, *toute structure pré-uniforme compatible est une structure uniforme*.

(2.5) *Sur toute algèbre* $A \in \mathcal{K}$, *deux structures uniformes compatibles quelconques* $\mathfrak{U}$ *et* $\mathfrak{V}$ *sont permutables* (*c'est-à-dire que* $\mathfrak{U} \circ \mathfrak{V} = \mathfrak{V} \circ \mathfrak{U}$.

Les deux théorèmes se démontrent simultanément. Pour cela, nous introduisons encore une condition équivalente :

(2.1) *Il existe un terme* $Q(X , Y , Z , U , V)$ *tel que*

$$Q(X , X , Y , Y , Z) = X \quad \text{et} \quad Q(X , Y , Y , Z , Z) = Z$$

soient des identités vraies dans chaque algèbre $A \in \mathcal{K}$.

La démonstration procède comme suit :

$$\begin{tikzcd}
(1.1) \arrow[r, Rightarrow] \arrow[dd, Leftrightarrow] & (2.2) \arrow[rr, Rightarrow, "**"] \arrow[dr, dashed] & & (1.2) \arrow[r, Rightarrow] & (1.1) \\
& & (2.4) \arrow[r, Rightarrow, "**"] & (1.4) \arrow[u, dashed, Rightarrow, "*"'] \arrow[d, dashed, Rightarrow, "*"] & \\
(2.1) \arrow[r, Rightarrow] & (2.3) \arrow[rr, Rightarrow, "**"] \arrow[ur, dashed, "*"] \arrow[d, Rightarrow] & & (1.3) \arrow[r, Rightarrow] & (2.1) \\
& (2.5) \arrow[rr, Rightarrow, "**"] & & (1.5) \arrow[r, Rightarrow] & (1.1)
\end{tikzcd}$$

Les implications désignées par une étoile sont évidentes. Les implications désignées par deux étoiles découlent de l'observation que, si $R \subset A \times A$ est une relation réflexive [symétrique, transitive, compatible, respectivement], il en est de même du filtre principal $\dot{R}$.

(1.1) $\Longleftrightarrow$ (2.1) : Si Q vérifie dans $\mathcal{K}$ les identités dans (2.1), on pose $P(X , Y , Z) = Q(X , X , Y , Z , Z)$; et si P vérifie (1.1), on pose

$$Q(X , Y , Z , U , V) = P(Y , Z , U) .$$

(1.1) $\Longrightarrow$ (2.2) : Soit $\mathfrak{U}$ une structure pré-uniforme compatible sur une algèbre $A \in \mathcal{K}$. La compatibilité des opérations f_i , $i \in I$, entraîne celle de l'opération $(x , y , z) \longmapsto P(X , Y , Z)$. Pour tout $R \in \mathfrak{U}$, il existe donc $S \in \mathfrak{U}$ tel que $P(S , S , S) \subset R$. Donc, quel que soit $(a , b) \in S$, on a :

$$(b,a) = (P(a,a,b)\ ,\ P(a,b,b)) = P((a,a)\ ,\ (a,b)\ ,\ (b,b)) \in P(S,S,S) \subset R\ .$$

Cela montre que $S^{-1} \subset R$, et que, par suite, $\mathfrak{U}$ est symétrique.

(1.2) $\Longrightarrow$ (1.1) : Soit A l'algèbre libre dans $\mathcal{K}$ à deux générateurs x et z . La relation compatible R , engendrée par $(x\ ,\ x)$, $(x\ ,\ z)$, $(z\ ,\ z)$, est réflexive (puisque $(x\ ,\ x)$ et $(z\ ,\ z)$ engendrent la diagonale Δ) et, par suite, symétrique. Par conséquent, $(z\ ,\ x) \in R$. Il y a donc un terme $P(X\ ,\ Y\ ,\ Z)$ tel que $P((x\ ,\ x)\ ,\ (x\ ,\ z)\ ,\ (z\ ,\ z)) = (z\ ,\ x)$, c'est-à-dire que $P(x,x,z) = z$ et $P(x\ ,\ z\ ,\ z) = x$. Ces égalités étant vraies pour les générateurs d'une algèbre libre dans $\mathcal{K}$, elles sont vraies pour tout couple $(x\ ,\ z)$ d'éléments de n'importe quelle algèbre $A \in \mathcal{K}$.

Des raisonnements analogues démontrent (2.1) $\Longrightarrow$ (2.4) et (1.4) $\Longrightarrow$ (2.1).

(2.3) implique (2.5) ; car si $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{V}$ sont deux structures uniformes compatibles, $\mathfrak{U} \circ \mathfrak{V}$ est une structure pré-uniforme compatible, donc, par (2.3), une structure uniforme. Cela montre $\mathfrak{V} \circ \mathfrak{U} \subset \mathfrak{U} \circ \mathfrak{V}$. Le même raisonnement donne aussi l'inclusion réciproque.

(1.5) $\Longrightarrow$ (1.1) : Soit A l'algèbre libre dans $\mathcal{K}$ à trois générateurs x,y,z . Soient R la relation d'équivalence engendrée par $(x\ ,\ y)$, et S la relation d'équivalence engendrée par $(y\ ,\ z)$. Alors $(x\ ,\ z) \in R \circ S$. Puisque $R \circ S = S \circ R$, on a $(x\ ,\ z) \in S \circ R$. Il existe donc un élément $u \in A$ tel que $(x\ ,\ u) \in S$ et $(u\ ,\ z) \in R$. Puisque A est engendrée par $x\ ,\ y\ ,\ z$, il existe un terme P tel que $u = P(x\ ,\ y\ ,\ z)$. On a, modulo S :

$$x \equiv u = P(x\ ,\ y\ ,\ z) \equiv P(x\ ,\ z\ ,\ z)\ .$$

Mais A/S est l'algèbre libre engendrée par (les classes de) x et z . Donc $x = P(x\ ,\ z\ ,\ z)$ pour deux éléments quelconques x , z de n'importe quelle algèbre $A \in \mathcal{K}$. De même,

$$P(x\ ,\ x\ ,\ z) \equiv P(x\ ,\ y\ ,\ z) = u \equiv z \quad \text{modulo } R\ ,$$

et A/R est librement engendrée par x et z . Donc $P(x\ ,\ x\ ,\ z) = z$ pour deux éléments quelconques x , z de n'importe quelle algèbre $A \in \mathcal{K}$. Ceci achève la démonstration des théorèmes.

COROLLAIRE. - Soit $\mathcal{K}$ une classe primitive d'algèbres universelles vérifiant l'une des conditions des théorèmes précédents. Soit A une algèbre appartenant à $\mathcal{K}$, munie d'une structure uniforme compatible $\mathfrak{U}$. Considérons sur A la topologie induite par $\mathfrak{U}$. Alors, pour toute congruence R sur A , la fermeture $\overline{R}$ est aussi une congruence ; l'application canonique $A \longrightarrow A/R$ est ouverte ; la structure uniforme quotient $\mathfrak{U}/R$ sur A/R est aussi compatible.

En effet, on a toujours $\overline{R} = \bigcap\{S \circ R \circ S\ ;\ S \in \mathfrak{U}\}$. Or,

$$\bigcap\{S \circ R \circ S\ ;\ S \in \mathfrak{U}\} = \bigcap\{T\ ;\ T \in \mathfrak{U} \circ R \circ \mathfrak{U}\}\ .$$

Puisque $\overline{R} \circ \mathfrak{U} = \mathfrak{U} \circ \overline{R}$, on a

$$\mathfrak{U} \circ \overline{R} \circ \mathfrak{U} = \mathfrak{U} \circ \mathfrak{U} \circ \overline{R} = \mathfrak{U} \circ \overline{R} ,$$

et $\mathfrak{U} \circ \overline{R}$ est une structure uniforme compatible. Il s'ensuit que

$$\overline{R} = \bigcap \{V \; ; \quad V \quad \mathfrak{U} \circ \overline{R}\}$$

est une congruence. Pour démontrer que l'application canonique $A \longrightarrow A/R$ est ouverte, désignons, pour toute relation S sur A , par $S[a]$ l'ensemble des $x \in A$ tels que $(a , x) \in S$. Soit $\mathcal{U}$ un voisinage de $a \in A$, et montrons que le saturé $\mathcal{U}^*$ de $\mathcal{U}$ pour la congruence R est un voisinage de la classe de congruence $R[a]$. Or

$$\begin{aligned} \mathcal{U}^* &= \{z \; ; \; \exists \, x \in \mathcal{U} : \; (x , z) \in R\} \\ &= \{z \; ; \; \exists \, x \in A : \; (a , x) \in S \text{ et } (x , z) \in R\} , \end{aligned}$$

où S est un entourage tel que $\mathcal{U} = \{x \; ; \; (a , x) \in S\}$. Donc

$$\mathcal{U}^* = \{z \; ; \; (a , z) \in S \circ R\} = (S \circ R)[a] .$$

Puisque $\mathfrak{U} \circ \overline{R} = \overline{R} \circ \mathfrak{U}$, il existe $S' \in \mathfrak{U}$ tel que $R \circ S' \subset S \circ R$. Donc

$$\mathcal{U}^* \supset (R \circ S')[a] = \bigcup_{x \in R[a]} S'[x] ,$$

ce qui montre que $\mathcal{U}^*$ est un voisinage de $R[a]$.

Des généralisations du théorème 1 se trouvent dans [1] et [2].

BIBLIOGRAPHIE

[1] HAGEMANN (J.). - Mal'cev conditions for algebraic relations ; on regular and weakly regular congruences, Preprint THD N° 75.

[2] HAGEMANN (J.) and MITSCHKE (A.). - On n-permutable congruences, Algebra Universalis, Basel, t. 3, 1973, p. 8-12.

[3] MAL'CEV (A. I.). - On the general theory of algebraic systems [en russe], Mat. Sbornik, t. 35, 1954, p. 3-20 ; [traduit en anglais] Amer. math. Soc. Translations, Series 2, t. 27, 1963, p. 125-142.

[4] WERNER (H.). - A Mal'cev condition for admissible relations, Algebra Universalis, Basel, t. 3, 1973, p. 263.

(Texte reçu le 22 avril 1974)

Klaus KEIMEL
Fachbereich Mathematik
Technische Hochschule
Hochschulstrasse 1
D-61 DARMSTADT (Allemagne fédérale)