Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Karl H. Hofmann

Théorie directe des groupes de Lie, III

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 27, nº 1 (1973-1974), exp. nº 3, p. 1-39

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1973-1974__27_1_A3_0>

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1973-1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire DUBREIL
(Algèbre)
27e année, 1973/74, n° 3, 39 p.

4 et 18 février 1974

THÉORIE DIRECTE DES GROUPES DE LIE, III.

par Karl H. HOFMANN

Sommaire

	Pages
III. Théorie globale des groupes de Lie.	3-01
1. Informations préalables sur les groupes topologiques.	3-01
2. Définition des groupes de Lie.	3-07
3. Propriétés du foncteur L	3-12
4. Sous-groupes analytiques.	3-19
5. Constructions algébriques globales.	3-26
6. Groupes de Lie linéaires, représentation adjointe.	3-28
7. Théorie de Lie en dimensions finies.	3-36
8. Références.	3-39

III. Théorie globale des groupes de Lie

1. Informations préalables sur les groupes topologiques.

On rappelle d'abord quelques résultats bien connus de la théorie des revêtements des espaces topologiques.

III.1. DÉFINITION. - Une fonction $f : X \to Y$ entre des espaces topologiques est un revêtement de Y si elle est continue et satisfait à la condition suivante : Il existe un recouvrement $\mathfrak{U}$ de Y par des ensembles ouverts tel que, quel que soit $U \in \mathfrak{U}$, il existe un espace F_U discret, et un homéomorphisme

$$h_U : F_U \times U \to f^{-1}(U)$$

tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} F_U \times U \arrow[rr, "h_U"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_U"'] & & f^{-1}(U) \arrow[dl, "f|f^{-1}(U)"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

commute.

La proposition suivante donne un stock de revêtements.

III.2. PROPOSITION. - Soit $f : G \to H$ un morphisme de groupes topologiques. Alors les propositions sont équivalentes :

(1) f est un revêtement ;

(2) f est surjectif et ouvert, et $\ker f$ est discret.

Démonstration. - (1) $\Rightarrow$ (2) est immédiate à partir de la définition III.1. Montrons que (2) $\Rightarrow$ (1). Si f est surjectif et ouvert, nous pouvons supposer $H=G/N$, $N = \ker f$, f étant le morphisme-quotient. Puisque N est discret, nous trouvons un voisinage W ouvert et symétrique ($W^{-1} = W$) de 1 dans G, tel que

$$W^2 \cap N = \{1\} .$$

Soit $V = f(W)$, alors V est ouvert, et $f|nW : nW \longrightarrow V$ est un homéomorphisme ; en fait, cette fonction est continue, ouverte et surjective, et $f(nw_1)=f(nw_2)$, avec $u_j \in W$, entraîne $w_2^{-1}\, w_1 = (nw_2)^{-1}\,(nw_1) \in W^2 \cap N = \{1\}$. De plus, si $n_1\, W \cap n_2\, W \neq \emptyset$, avec $n_j \in N$, alors $n_2^{-1}\, n_1 \in W^2 \cap N = \{1\}$. Donc la fonction $(n , w) \longrightarrow nw : N \times W \longrightarrow NW$ est un homéomorphisme, et la fonction

$$h_V : N \times V \longrightarrow f^{-1}(V) ,\ h_V(n , v) = n(f|W)^{-1}\,(v) ,$$

est alors un homéomorphisme tel que $f(h_V(n , v)) = v$.

Posons $\mathcal{U} = \{hV ; h \in H\}$, et choisissons une section $s : H \longrightarrow G$ arbitraire. Pour $h \in H$, $U = hV$, définissons $h_U : N \times U \longrightarrow f^{-1}(U)$ par

$$h_U = L_{s(h)} \circ h_V \circ (1_N \times L_h^{-1}) ,$$

où $L_x(y) = xy$. On vérifie aisément que la famille des fonctions h_U satisfait aux conditions de III.1.

Rappelons qu'un espace est localement connexe si toute composante connexe d'un ouvert arbitraire est un ouvert. Un espace Y est dit simplement connexe si Y est connexe et localement connexe, et si tout revêtement $f : X \longrightarrow Y$ pour un domaine connexe X est un homéomorphisme. Les espaces simplement connexes sont les projectifs dans la catégorie des espaces connexes et localement connexes par rapport à la classe des épimorphismes qui sont des revêtements. En fait, un espace Z est simplement connexe si, et seulement si, il est connexe, localement connexe et si, pour tout revêtement $f : X \longrightarrow Y$ d'espaces connexes et localement connexes, toute fonction continue $g : Z \longrightarrow Y$ peut être relevée en une fonction continue $g' : Z \longrightarrow X$ telle que $fg' = g$.

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "g'"'] \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd} .$$

On démontre que le produit de deux espaces simplement connexes est lui-même simplement connexe. Si Y est un espace connexe et localement connexe, un revêtement $f : X \longrightarrow Y$ est dit universel, si X est simplement connexe. On dit que l'espace Y est localement simplement connexe, si Y admet un recouvrement d'ouverts simplement connexes. Un résultat fondamental de la théorie des recouvrement
chaque espace connexe et localement simplement connexe possède un revêtement universel. Si maintenant G est un groupe topologique avec un ouvert non vide simplement connexe, les informations rappelées suffisent pour démontrer que le domaine $\tilde{G}$ d'un revêtement universel $p_G : \tilde{G} \longrightarrow G$ est un groupe topologique d'une façon unique tel que p_G est un morphisme des groupes. D'après III.2, $\ker p_G$ est

discret, donc central (parce qu'un sous-groupe distingué totalement discontinu d'un groupe connexe est toujours central) ; d'ailleurs on peut démontrer

$$\ker\ p_G \cong \pi_1(G)$$

si G est localement connexe par arcs. En tout cas, puisqu'un ensemble convexe d'un espace vectoriel topologique est contractible, donc simplement connexe, nous rappelons le résultat suivant.

III.3. PROPOSITION. - Un groupe topologique connexe G, qui est localement homéomorphe à un espace vectoriel localement convexe, possède un revêtement universel $p_G : \tilde{G} \to G$.

On rappelle ici la définition familière de l'isomorphie locale de deux groupes topologiques.

III.4. DÉFINITION. - Soient G et H des groupes topologiques ; un isomorphisme local entre G et H est une fonction $f : U \to V$ telle que

(1) U (resp. V) est un voisinage ouvert de 1 dans G (resp. dans H) ;

(2) f est un homéomorphisme (avec g pour inverse) ;

(3) quels que soient $u, u' \in U$ avec $uu' \in U$, on a $f(uu') = f(u)\,f(u')$;

(4) quels que soient $v, v' \in V$ avec $vv' \in V$, on a $g(vv') = g(v)\,g(v')$.

Si un isomorphisme local entre G et H existe, nous appelons G et H localement isomorphes, et nous écrivons $G \cong_{loc} H$. Si $f : G \to H$ est un morphisme, nous disons que f induit un isomorphisme local s'il y a des ouverts $U \subseteq G$, $V \subseteq H$ tels que $f|U : U \to V$ soit un isomorphisme local.

III.5. EXEMPLE. - Soit $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ le morphisme donné par $p(r) = r + \mathbb{Z}$. Posons

$$U =]-1/2\ ,\ 1/2[\subseteq \mathbb{R} \quad \text{et} \quad V = p(U) \subseteq \mathbb{R}/\mathbb{Z}\ .$$

Soit $f = p|U \to V$. Alors f n'est pas un isomorphisme local, parce que la condition (4) de III.4 n'est pas satisfaite, même quand p induit un isomorphisme local, donc $\mathbb{R} \cong_{loc} \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

En fait, on démontre sans peine (en considérant des voisinages plus petits) la proposition suivante.

III.6. PROPOSITION.

(a) Deux groupes topologiques G et H sont localement isomorphes si, et seulement si, on trouve une fonction $f : U \to V$ satisfaisant (1), (2) et (3) de III.4.

(b) Un morphisme $f : G \to H$ induit un isomorphisme local si, et seulement si, f est ouvert, et $\ker f$ discret.

En particulier, un morphisme $f : G \to H$, qui est un revêtement, induit un isomorphisme local (III.2).

La discussion suivante s'occupe de la construction des sous-groupes à partir des données locales. Puisque ces lemmes ne semblent pas être "standard", nous donnerons des indications un peu plus explicites.

III.7. LEMME. - Soient G un groupe, et K un sous-ensemble symétrique $(K=K^{-1})$ contenant l'identité, et soit K un espace topologique satisfaisant :

(i_g) (resp. (i_d)) Quels que soient $x, y \in K$ et l'ouvert $V \subseteq K$, la relation $xy \in V$ entraîne l'existence d'un ouvert $U \subseteq K$ tel que $y \in U$ et $xU \subseteq V$ (resp. $x \in U$ et $Uy \subseteq V$).

Alors il existe sur G une topologie, et une seule, telle que

(I) K est ouvert et la topologie de G induit sur K la topologie donnée,

(II) Toutes les translations à gauche $x \longmapsto gx$ (resp. toutes les translations à droite) sont des homéomorphismes.

Démonstration. - Considérons le cas (1_g). Soit F le filtre engendré dans G par les voisinages de 1 dans K. On montre directement :

(a) Quel que soit $k \in K$, le filtre kF est le filtre engendré dans G par les voisinages de k dans K.

(b) Quel que soit $g \in G$ et $X \in gF$, il existe $W \subseteq X$ tel que $g \in W$ et que $X \in wF$ pour tous les $w \in W$.

Alors, d'après (b), il y a une topologie unique telle que gF est le filtre des voisinages de g. De plus, (a) entraîne (I) et, lorsque les translations à gauche permutent les filtres gF, elles sont des homéomorphismes.

III.8. LEMME. - Supposons toutes les hypothèses de III.7 et les suivantes :

(ii) L'ensemble $D = \{(x, y) \in K \times K ; \ xy \in K\}$ est un voisinage de $(1, 1)$ dans $K \times K$, et la multiplication $(x, y) \longmapsto xy : D \longrightarrow K$ est continue dans $(1, 1)$.

(ii) L'inversion $x \longmapsto x^{-1} : K \longrightarrow K$ est continue dans 1.

Alors il existe un sous-groupe H ouvert maximal unique tel que

(III) H est un groupe topologique et contient K.

En particulier, la composante connexe G_0 de 1 dans G est un groupe topologique, et, si K est connexe, G_0 est le groupe engendré par K.

Démonstration. - On pose $H = \{g \in G ; \ gFg^{-1} = F\}$, et on vérifie directement les affirmations.

Comme une conséquence immédiate des lemmes, nous avons le résultat suivant.

III.9. THÉORÈME. - Soit K un sous-ensemble symétrique d'un groupe contenant l'identité. Supposons que K est un espace topologique connexe qui satisfait les conditions suivantes :

(i) $x, y, xy \in K$ et $xy \in V$ pour n'importe quel x, y, et $V \subseteq K$ ouvert entraîne l'existence des voisinages U_x et U_y de x et y tels que

$$U_x y \cup xU_y \subseteq V .$$

(ii) L'ensemble $\{(x, y) ; x, y, xy \in K\}$ est un voisinage de $(1, 1)$ dans $K \times K$ et la multiplication est continue dans $(1, 1)$.

(iii) L'inversion sur K est continue dans 1.

Alors il y a une topologie, et une seule, sur le sous-groupe G_0 engendré par K qui en fait un groupe topologique et qui induit sur K la topologie donnée. Le sous-espace K de G_0 est ouvert.

Ce théorème permet une démonstration très simple du résultat classique suivant.

III.10. COROLLAIRE. - Soient S un groupe topologique simplement connexe, et T un groupe arbitraire. Soit U un voisinage ouvert connexe et symétrique de 1 dans S, et $f : U \to T$ une fonction vérifiant $f(uv) = f(u) f(v)$, quel que soient $u, v, uv \in U$. Alors il existe un morphisme $F : S \to T$, et un seul, qui prolonge f.

Démonstration. - Dans le groupe $G = S \times T$, nous considérons le sous-ensemble $K = \{(u, f(u)) ; u \in U\}$ que nous munissons de la topologie qui fait de

$$u \longmapsto (u, f(u)) : U \to K$$

un homéomorphisme. Alors le théorème III.9 s'applique, et donne un sous-groupe G_0 de $G = S \times T$, engendré par K. Le morphisme $pr_S|G_0 : G_0 \to S$ est surjectif parce que U engendre S ; évidemment il induit un isomorphisme local, donc un revêtement d'après III.6 (b) et III.2. Puisque S est simplement connexe, il est un isomorphisme. Donc G_0 est le graphe d'une fonction $F : S \to T$ avec les propriétés souhaitées.

III.11. COROLLAIRE. - Soient G un groupe topologique, U un voisinage ouvert et symétrique de 1, et soit K un sous-espace connexe et symétrique de U contenant 1 tel qu'au moins une des conditions soit satisfaite :

(a) $KK \cap U \subseteq K$.

(b) K est localement connexe et est le composant de 1 dans K.

Alors il existe un groupe topologique connexe H qui est engendré par un voisinage ouvert symétrique V de 1, et il existe un morphisme $f : H \to G$ de groupes topologiques tel que $f(V) = K$, et que $f|V : V \to K$ est un homéomorphisme. Le groupe H et le morphisme f sont uniques par rapport à ces propriétés (sauf équivalence canonique : si $f_1 : H_1 \to G$ est un morphisme satisfaisant les *conditions correspondantes alors il existe un isomorphisme* $F : H_2 \to H$ *tel que* $f_1 = fF$).

Démonstration. - On oublie, pour l'instant, la topologie de G , et on vérifie les hypothèses de III.9. On appelle H le groupe topologique G_0 construit dans ce théorème. On pose $V = K$ et on prend pour $f : H \to G$ l'inclusion. Puisque la topologie de G_0 est égale ou plus fine que la topologie induite par G , alors f est continue. La topologie de G_0 et la topologie de G induisent sur K la même topologie, donc $f|V : V \to K$ est un homéomorphisme. L'unicité de f se démontre facilement.

On conclut la section par la discussion de quelques conditions de dénombrabilité qui peuvent être imposées aux espaces topologiques et aux groupes topologiques. On sait bien que X est *séparable* s'il existe un sous-ensemble $D \subseteq X$ dénombrable et dense. On dit que X *a une base dénombrable* si la topologie de X contient un sous-ensemble dénombrable $\mathcal{B}$ tel que chaque ouvert de X est une réunion d'une partie de $\mathcal{B}$. Nous disons que X est *étroit*, si chaque ensemble des ouverts non vides disjoints de X est dénombrable (On dit aussi que X satisfait *la condition* de chaîne). Enregistrons le résultat suivant.

III.12. LEMME. - *Pour un espace* X *métrisable, les propositions suivantes sont équivalentes* :

(1) X *est séparable.*

(2) X *a une base dénombrable.*

(3) X *est étroit.*

L'équivalence de (1) et (2) est bien connue (et facile à démontrer) ; il est évident que tout espace séparable est étroit ; pour le contraire, on se réfert par exemple à [4] où on trouve davantage d'informations sur ce sujet.

Si on se souvient que tout groupe connexe est de la forme $\bigcup U^n$ quel que soit l'ouvert symétrique U , on voit facilement le lemme suivant.

III.13. LEMME. - *Soit* G *un groupe topologique connexe. Alors*

(a) G *est séparable si, et seulement si,* G *contient un ouvert non vide séparable.*

(b) G *a une base dénombrable si, et seulement si,* G *contient un ouvert non vide à base dénombrable.*

Puisqu'un groupe topologique est métrisable si, et seulement si, 1 a une base dénombrable de voisinages, on peut formuler une conclusion de III.12-13 de la façon suivante.

III.14. PROPOSITION. - *Soit* G *un groupe connexe avec une base dénombrable de voisinages de l'identité. Alors, on a les conditions équivalentes* :

(1) G est séparable.

(2) 1 a une base de voisinages séparables.

(3) G a une base dénombrable.

(4) 1 a une base de voisinages ouverts à base dénombrable.

(5) G est étroit.

2. Définition des groupes de Lie.

Nous sommes alors bien préparés pour proposer la définition des groupes de Lie. Remarquons que, seulement pour cette définition et pour développer les conséquences de la présente section, il suffit de disposer du chapitre I, sections 1, 2, 3, 4 et du chapitre II, section 1, et II.6 ; les autres informations préparées (notamment dans le chapitre II) servent à la suite de la théorie.

III.14. DÉFINITION. - Un groupe de Lie est un groupe topologique G pour lequel il existe une algèbre de Dynkin L et une fonction $\exp : L \to G$ qui vérifie les conditions suivantes :

(i) L contient un groupe local B associé à L (II-1, et voir la convention suivant II.5), et G un ouvert U avec $\exp B = U$ tels que $\exp|B : B \to U$ est un homéomorphisme satisfaisant $\exp(x * y) = \exp x \exp y$, quels que soient $x, y \in B$.

(ii) Si $x \in L$ et $r, s \in \underset{\sim}{R}$, alors $\exp(r + s)x = \exp rx \exp sx$.

Nous allons déduire des conséquences immédiates de cette définition. Mais d'abord nous nous convainquons qu'il y a des groupes de Lie "dans la nature".

III.15. EXEMPLES.

1° Chaque espace de Banach G réel est un groupe de Lie abélien par rapport à l'addition (Posons $L = G = B$, $\exp = 1_G$).

2° Soient A une algèbre de Banach réelle, et G le groupe multiplicatif des éléments inversibles. Alors G est un groupe de Lie (Posons $L = A$ par rapport à $[x , y] = xy - yx$, définissons $\exp : L \to G$ par $\exp x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots$; alors $\exp$ est localement inversible par $\log$, et satisfait à l'équation fonctionnelle requise (voir I.9, I.11, et observer le re-ordonnement des séries absolument convergentes).

3° Cas particulier : Soient E un espace de Banach réel, $A = \mathcal{L}(E)$ l'algèbre de Banach de tous les opérateurs bornés de E , et soit $G = Gl(E)$ le groupe de tous les opérateurs continus inversibles. Alors $Gl(E)$ est un groupe de Lie.

4° Soit A une algèbre de Banach réelle ou complexe avec une involution $*$ telle que $\|x^* x\| = \|x\|^2$ (autrement dit, soit A une C^*-algèbre). Soit U le groupe multiplicatif des éléments unitaires $(u^* u = u u^* = 1)$. Alors U est un groupe de Lie (prenons pour L l'ensemble des éléments anti-hermitiens $(h^* = - h)$;

alors L est une algèbre de Dynkin par rapport à $[x , y] = xy - yx$, et la fonction exponentielle $\exp$ du 2° applique L dans U de façon que les conditions de III.14 sont satisfaites.

5° Cas particulier : Soient E un espace de Hilbert réel (resp. complexe), $A = L(E)$, et $U = O(E)$ (resp. $U(E)$) le groupe des opérateurs orthogonaux (resp. unitaires). Alors $O(E)$ (resp. $U(E)$) sont des groupes de Lie.

Dans le même esprit, on pourrait montrer, par exemple, que, pour un espace vectoriel E réel de dimension finie, le groupe $Sl(E)$ de tous les automorphismes de déterminant 1 est un groupe de Lie (son algèbre de Dynkin associée étant l'ensemble des endomorphismes de trace nulle). De toute façon, de l'exemple du 3° nous pourrions dériver d'autres exemples par passage aux sous-groupes et aux sous-algèbres ; plus tard, nous aurons une théorie plus convenable.

Remarquons maintenant que la continuité de $\exp$ n'était pas postulée dans III. 14. Mais elle est une conséquence.

III.16. PROPOSITION. - <u>Sous les conditions de la définition</u> III.14, <u>la fonction</u> $\exp$ <u>est continue</u>.

<u>Démonstration</u>. - Munissons L d'une norme compatible. Il suffit de démontrer que $\exp$ est continue sur une boule ouverte B_r quelconque, de rayon r et de centre 0 . Soit B , comme dans III.14, et soit n un nombre naturel tel que $B_{r/n} \subseteq B$. La multiplication scalaire $m : L \to L$, $m(x) = \frac{1}{n} x$ est un homéomorphisme de L , la fonction puissance $p : G \to G$, $p(g) = g^n$ est continue. Donc la composition

$$B_r \xrightarrow{m|B_r} B \xrightarrow{\exp|B} U \xrightarrow{p|U} G$$

est continue. Mais $p(\exp m(x)) = (\exp \frac{1}{n} x)^n = \exp x$ d'après III.14.(ii) (et récurrence).

Rappelons qu'un sous-groupe à un paramètre d'un groupe topologique est, par définition, un morphisme de groupes topologiques $f : \underset{\sim}{R} \to G$. L'ensemble de tous les sous-groupes à un paramètre est donc noté $\mathrm{Hom}(\underset{\sim}{R} , G)$. Il est important que l'algèbre L , dans III.14, "classifie" les sous-groupes à un paramètre de G .

III.17. PROPOSITION. - <u>Supposons les conditions de</u> III.13. <u>Quel que soit</u>

$$f \in \mathrm{Hom}(\underset{\sim}{R} , G) ,$$

<u>il existe un</u> $x = x_f \in L$, <u>et un seul</u>, <u>tel que</u> $f(t) = \exp tx$ <u>pour tous</u> $t \in \underset{\sim}{R}$. <u>Donc</u> $f \longmapsto x_f : \mathrm{Hom}(\underset{\sim}{R} , G) \to L$ <u>est une bijection</u>.

<u>Démonstration</u>. - La notation est celle du III.13. Pour f donné, il existe un intervalle ouvert symétrique I autour de 0 dans $\underset{\sim}{R}$ tel que $f(I) \subseteq U$. Posons $f' : I \to L$, $f' = (\exp|B)^{-1} (f|I)$; alors f' est continue, et satisfait $f'(s + t) = f'(s) + f'(t)$ quels que soient $r , s , r + s \in I$. Il existe donc une

application continue linéaire $F : \underset{\sim}{R} \to G$ prolongeant f' (III.10 ou démonstration directe). Alors posons $x = F(1)$, donc $F(t) = tx$. Pour $t \in I$, on trouve

$$\exp tx = \exp F(t) = \exp f'(t) = \exp (\exp|B)^{-1} (f|I)(t) = f(t) .$$

Puisque I engendre $\underset{\sim}{R}$, on a $\exp tx = f(t)$ quel que soit $t \in \underset{\sim}{R}$.

Le lemme suivant permettra de déduire que les données de la définition III.13 sont déterminées par G d'une façon canonique.

III.18. LEMME. - Soient G_j, $j = 1, 2$, des groupes de Lie avec des fonctions associées $\exp_j : L_j \to G_j$, $j = 1, 2$. Si $f : G_1 \to G_2$ est un morphisme de groupes topologiques, alors il existe un morphisme unique d'algèbres de Dynkin $F : L_1 \to L_2$ tel que le diagramme

$$(1) \qquad \begin{array}{ccc} L_1 & \xrightarrow{F} & L_2 \\ {\scriptstyle \exp_1} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \exp_2} \\ G_1 & \xrightarrow{f} & G_2 \end{array}$$

UNIVERSITÉ DE GRENOBLE I
LABORATOIRE
DE MATHÉMATIQUES PURES
INSTITUT FOURIER

soit commutatif.

Démonstration. - Quel que soit $x \in L_1$, la fonction $t \longmapsto f(\exp_1 tx)$ est dans $\mathrm{Hom}(\underset{\sim}{R}, G_2)$. D'après III.17, il existe un élément $F(x) \in L_2$ unique tel que $f(\exp_1 tx) = \exp_2 tF(x)$ pour tous les $t \in \underset{\sim}{R}$. Donc F est définie telle que (1) commute. Il est immédiat d'après (1), que

$$(2) \qquad F(sx) = sF(x) \text{ , quel que soit } s \in \underset{\sim}{R} .$$

Soient B_j, U_j les ouverts donnés par III.13 ; d'après la continuité de f, on peut supposer que $f(U_1) \subseteq U_2$. Donc

$$(3) \qquad F|B_1 = (\exp_2|B_2)^{-1} (f|U_1)(\exp_1|B_1) ,$$

et F est continue sur B_1. Par un raisonnement tout à fait analogue à celui de III.16, on voit que F est continue sur chaque boule de centre 0, donc est continue. Soient x, $y \in L_1$. D'après II.6, on a $x + y = \lim n(\frac{1}{n} x * \frac{1}{n} y)$; donc on trouve

$$F(x + y) = \lim_n (\frac{1}{n} F(x) * \frac{1}{n} F(y)) = F(x) + F(y) ,$$

en utilisant la continuité de F, les propriétés (2) et (3), la propriété III.13 (i) de $\exp_j$, et encore une fois II.6. Donc F est une application linéaire continue. De la même manière on démontre $F([x , y]) = [F(x) , F(y)]$.

III.19. PROPOSITION. - Un groupe de Lie G détermine l'algèbre de Dynkin L et la fonction $\exp$ d'une manière unique (sauf des isomorphismes canoniques) ; plus précisément, si $\exp_j : L_j \to G$ sont deux fonctions compatibles avec les conditions de III.13, il existe un isomorphisme $F : L_1 \to L_2$, et un seul, tel que $\exp_2 F = \exp_1$. Si on choisit, une fois pour toute, pour chaque groupe de Lie, une algèbre de Dynkin $L(G)$ et une fonction $\exp_G : L(G) \to G$ (ce qui est facilité par III.17 et l'identification de $L(G)$ et $\mathrm{Hom}(\underset{\sim}{R} , G)$ au sens des ensembles), alors L est un foncteur défini dans une sous-catégorie pleine Lie G des groupes de Lie dans la catégorie Top G des groupes topologiques et les morphismes continus de groupes. L prend ses valeurs dans la catégorie Dyn des algèbres de Dynkin et des morphismes continus d'algèbres de Lie. Quel que soit le morphisme $f : G \to H$ de groupes de Lie, le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} L(G) \arrow[r, "L(f)"] \arrow[d, "\exp_G"'] & L(H) \arrow[d, "\exp_H"] \\ G \arrow[r, "f"] & H \end{tikzcd}$$

En fait, $L(f)$ est le seul morphisme le rendant commutatif.

La démonstration est immédiate suivant III.18. La dernière affirmation de la proposition peut être reformulée dans le langage des catégories en disant que $\exp : PL \to Q$ est une transformation naturelle, où P et Q sont des foncteurs d'oubli qui associent à un objet l'espace topologique sous-jacent.

Il convient de donner quelques définitions :

III.20. CONVENTION. - Soit G un groupe de Lie. On appelle $L(G)$ l'algèbre de Dynkin (et aussi, par abus de langage, l'algèbre de Lie) associée à G, et $\exp_G$ la fonction exponentielle associée à G. Une paire (B, U) d'ouverts (provenant de $L(G)$ et de G, respectivement), qui satisfait les conditions de III.13, est appelée une linéarisation de G. Etant donnée une linéarisation (B, U), l'homéomorphisme $(\exp|B)^{-1} : U \to B$ est dit le logarithme de la linéarisation, qui s'écrit $\log$ $(= \log_{(B,U)}) : U \to B$.

On peut remplacer la définition III.13 par un critère local dont la validité est parfois plus facile à vérifier.

III.21. PROPOSITION. - Pour un groupe topologique, les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) G est un groupe de Lie.

(2) Il existe une algèbre de Dynkin L, des ouverts $B \subseteq L$ et $U \subseteq G$ tels que $0 \in B$, et il existe un homéomorphisme $e : B \to U$ tel que $e(x * y) = e(x)\, e(y)$ pour tous les $x, y \in B$ suffisamment voisins de 0. Si (2) est satisfaite, on a $L = L(G)$ (sauf équivalence) et $\exp_G$ coïncide avec e sur un voisinage de 0.

Nous laissons la démonstration (2) $\Rightarrow$ (1) au soin du lecteur (en fait, on peut supposer que B est un groupe local associé à L, et que l'équation fonctionnelle de e est valable quels que soient $x, y \in B$; si $x \in L$, alors $t \longmapsto e(tx)$ est un sous-groupe local à un paramètre qui se prolonge à un élément $f_x \in \mathrm{Hom}(\underset{\sim}{R}, G)$ (voir III.10) ; on pose $\exp_G x = f_x(1)$ et on vérifie III.13).

On sait maintenant que la propriété d'être un groupe de Lie est une propriété locale ; plus précisément, on a le résultat suivant.

III.22. COROLLAIRE. - Soient G et H deux groupes topologiques tels que $G \cong_{loc} H$. Alors G est un groupe de Lie si, et seulement si, H a cette propriété. Un morphisme $f : G \to H$ induit un isomorphisme local si, et seulement si, $L(f)$ est un isomorphisme.

Cela est immédiat d'après III.4, III.21, III.13. Pareillement, les propositions suivantes résultent directement de III.13, III.3, III.22.

III.23. PROPOSITION. - L'espace sous-jacent d'un groupe de Lie est une variété (i. e. a un recouvrement des ouverts qui sont homéomorphes à une boule ouverte d'un espace de Banach). En particulier, toutes les composantes connexes sont ouvertes (donc aussi fermées). L'espace est localement connexe et localement simplement connexe.

Un groupe de Lie G est localement simplement connexe et localement connexe. Si G est connexe, il a un revêtement universel $p_G : \tilde{G} \to G$, et $\tilde{G}$ est un groupe de Lie tel que $L(p_G) : L(\tilde{G}) \to L(G)$ est un isomorphisme.

Plus précisément, à l'aide de III.10, on démontre la proposition ci-après.

III.24. PROPOSITION. - Soient G et H deux groupes de Lie connexes. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) $G \cong_{loc} H$;

(2) $\tilde{G} \cong \tilde{H}$;

(3) $L(G) = L(H)$.

III.25. PROPOSITION. - Soit G un groupe de Lie connexe. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) G est séparable ;

(2) $L(G)$ est séparable ;

(3) G a une base dénombrable ;

(4) $L(G)$ a une base dénombrable ;

(5) G est étroit ;

(6) $L(G)$ est étroit.

Ces conditions sont satisfaites si $\dim L(G) < \infty$.

Démonstration. - Elle est immédiate d'après III.14 et III.13.(i).

Notons que, pour un groupe de Lie connexe abélien G , la fonction

$$\exp_G : L(G) \to G$$

est un revêtement universel.

On dit qu'un groupe topologique n'a pas de sous-groupes arbitrairement petits si on a un voisinage U de l'identité tel que 1 est le seul sous-groupe contenu dans U.

III.26. PROPOSITION. - Un groupe de Lie n'a pas de sous-groupes arbitrairement petits.

Démonstration. - Soit (B, U) une linéarisation. Soit H un sous-groupe de G contenu dans U. Si $h \in H$, toutes les puissances h^n sont dans U. Puisqu'on a $\log h^n = n(\log h) \in B$, on conclut $\log h = 0$, $h = 1$.

3. Propriétés du foncteur L.

L'utilité d'un foncteur (comme, par exemple, L) dépend largement de ses propriétés de conservation. Dans cette section, nous énonçons les propriétés qui sont conservées par L.

III.27. PROPOSITION. - Les catégories Lie G et Dyn ont des limites finies, et L conserve les limites finies.

Démonstration. - D'après des théorèmes généraux (dus à FREYD), il suffit de démontrer que les deux catégories possèdent des produits finis et des égalisateurs, et que L conserve ces limites spéciales. Pour les produits, c'est évident (parce que les produits sont des produits cartésiens dans tous les cas). L'égalisateur de deux morphismes $p, q : G \rightrightarrows H$ dans Top G est le morphisme d'inclusion de

$$E = \{g \in G \; ; \; p(g) = q(g)\}$$

dans G. L'égalisateur de $L(p)$, $L(q) : L(G) \rightrightarrows L(H)$ est l'inclusion de

$$A = \{x \in L(G) \; ; \; L(p)(x) = L(q)(x)\}$$

dans $L(H)$. On vérifie que $\exp_G|A : A \to E$ est une fonction exponentielle associée à E. Donc $L(E) = A$, $\exp_E = \exp_G|A$.

III.28. COROLLAIRE. - Si $f : G \to H$ est un morphisme de groupes de Lie, alors $\ker f$ est un groupe de Lie avec $L(\ker f) = \ker L(f)$, et $\exp_{\ker f} = \exp_G|\ker L(f)$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(1) $\ker f$ est discret ;

(2) $\ker f$ est totalement discontinu ;

(3) $L(f)$ est injective.

Démonstration. - La première partie résulte de III.27. En tenant compte du fait que $\ker f$ est l'égalisateur de f et le morphisme constant $G \to H$.

Dans la deuxième partie, $(1) \Rightarrow (2)$ est triviale, non-(3) $\Rightarrow$ non-(2) est évident puisque $\ker f$ contient des sous-groupes à un paramètre si, et seulement si, $L(\ker f) = \ker L(f) \neq 0$.

$(3) \Rightarrow (1)$: Si $L(f)$ est injective, alors $L(\ker f) = 0$, donc les composantes de $\ker f$ se composent des points singuliers qui sont isolés d'après III.23.

Le corollaire est significatif parce qu'en général un sous-groupe fermé (même connexe par arcs) n'est pas nécessairement un groupe de Lie (II.12), et un sous-groupe fermé de dimension 0 (donc totalement discontinu) n'est pas nécessairement discret. Par exemple, soient $G = l^{\infty}$, l'espace de Banach des suites bornées, et H le sous-groupe de toutes les suites $(z_n/n)_{n=1,2,\ldots}$ avec $z_n \in \mathbb{Z}$; alors H est fermé et de dimension 0 , mais pas discret. Donc le groupe abélien topologique, G/H n'est pas un groupe de Lie d'après III.28.

III.29. COROLLAIRE. - Le foncteur L conserve et reflète l'injectivité des morphismes.

La proposition suivante offre une caractérisation des sous-groupes fermés d'un groupe de Lie qui sont des groupes de Lie. Il exhibe aussi le rôle joué par des sous-groupes de Lie locaux.

III.30. PROPOSITION. - Soient G un groupe de Lie, H un sous-groupe. Soit $(B\ ,\ U)$ une linéarisation ; alors $\Gamma = \log(U \cap H)$ est un sous-groupe local de B. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(1) Γ est un sous-groupe local de Lie de B (II.7) ;

(2) Il existe un ensemble $C \subseteq B$ ouvert convexe équilibré tel que $\exp_G(C \cap L_\Gamma)$ est un ouvert de H ;

(3) H est un sous-groupe fermé tel que $L(H) = L_\Gamma$, $\exp_H = \exp_G | L_\Gamma$;

(4) H est un groupe de Lie.

Démonstration. - $(1) \Rightarrow (2)$ est une conséquence directe de la définition II.10 d'un sous-groupe de Lie. $(2) \Rightarrow (3)$: Un sous-groupe H d'un groupe topologique G est fermé si, et seulement si, pour un ensemble ouvert V convenablement choisi, $V \subseteq H$ est non vide et fermé dans V ; prenons $V = \exp_G | C$. $(3) \Rightarrow (4)$ trivial. $(4) \Rightarrow (1)$: Soit $(C'\ ,\ V)$ une linéarisation de H avec $V \subseteq U$. Soit $i : H \to G$ le plongement. On note que $L(i)(C') \subseteq \Gamma \cap L_\Gamma$. Pour démontrer (1), il suffit de vérifier que $L(i)(C')$ est ouvert dans Γ , parce que cela entraînera que $\Gamma \cap L_\Gamma$ est ouvert dans Γ . Or, cette information résulte du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
C' \arrow[drrr, "L(i)|C'"] \arrow[dr] \arrow[dd, "\exp_H|C'"'] & & & \\
& \Gamma \cap L_\Gamma \arrow[r] & \Gamma \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & B \arrow[d, "\exp_G|B"] \\
V \arrow[rr] & & H \cap U \arrow[r] & U
\end{tikzcd}$$

dans lequel toutes les flèches verticales représentent des homéomorphismes, toutes les flèches horizontales des plongements, et où V est plongé comme un ouvert dans $H \cap U$ d'après son choix.

On peut reformuler une partie de cette proposition comme un théorème de conservation.

III.31. COROLLAIRE. - <u>Le foncteur</u> L <u>conserve les plongements, et tous les plongements sont fermés</u> (<u>dans</u> Lie G <u>et</u> Dyn).

Les morphismes, qui sont duaux aux plongements (en un sens qu'on peut exprimer plus précisément en termes de flèches), sont des morphismes quotients. Occupons-nous maintenant des quotients.

III.32. PROPOSITION. - <u>Soient</u> G <u>un groupe de Lie, et</u> N <u>un sous-groupe fermé distingué. Alors les deux propositions suivantes sont équivalentes</u> :

(1) N <u>est un groupe de Lie</u> ;

(2) G/N <u>est un groupe de Lie</u>.

<u>Si ces conditions sont satisfaites, alors</u> $L(G/N) = L(G)/L(N)$ <u>et</u>

$$\exp_{G/N}(x + L(N)) = (\exp_G x)N \ , \qquad x \in L(G) \ .$$

<u>Démonstration</u>. - (2) $\Rightarrow$ (1) est une conséquence de III.28. Démontrons (1) $\Rightarrow$ (2) : Soit $(B\ , U)$ une linéarisation de G telle que $(B \cap L(N)\ , U \cap N)$ soit une linéarisation de N (III.30(2)). Soit C un sous-ensemble ouvert, convexe et équilibré de B tel que $C * C \subseteq B$, et posons $W = \exp_G|C$. On déduit alors du théorème II.15 (i) que

$$\text{(a)} \qquad (x * (L(N) \cap B)) \cap C = (x + L(N)) \cap C \quad \text{pour} \quad x \in C \ .$$

Soit C' l'image de C dans $L(G)/L(N)$, et soit W' l'image de W dans G/N . Soient $q : C \to C'$, et $p : W \to W'$, les restrictions et corestrictions des morphismes quotients. Si $q(x) = q(y)$, $x , y \in C$, alors $x \in y + L(N)$; donc, d'après (a), on trouve un $z \in L(N)$ avec $x = y * z$. Donc

$$\exp x = \exp y \exp z \in (\exp x)N \ .$$

Par conséquent, nous pouvons définir une fonction $\exp' : C' \to W'$ par

$$\exp' q(x) = (\exp_G x)N \ .$$

Si $(\exp x)N = (\exp y)N$, on a $\exp x = (\exp y)n$ pour un $n \in N$ convenablement choisi, d'où $\exp((-y) * x) = n \in N$, donc $n \in \exp_G B \cap N = U \cap N$. Il en résulte que $(-y) * x \in L(N) \cap B$, d'où

$$x \in (y * (L(N) \cap B)) \cap C \subseteq y + L(N) \ .$$

Donc $q(x) = q(y)$. Nous venons de démontrer que exp' est injective. Sa surjectivité est évidente. Tenant compte du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{q} & C' \\ {\scriptstyle \exp_G|C}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \exp'} \\ W & \xrightarrow{p} & W' \end{array}$$

et du fait que q , p sont continus et ouverts, exp' est un homéomorphisme. Pour

x , y suffisamment petits, on voit :

$$\exp'(q(x) * q(y)) = \exp' q(x) \exp' q(y) .$$

Donc G/N est un groupe de Lie avec $L(G/N) = L(G)/L(N)$, d'après III.21, et on a démontré implicitement l'affirmation sur $\exp_{G/N}$.

Encore une fois, on peut formuler une proposition de conservation.

III.33. COROLLAIRE. - Le foncteur L conserve les morphismes quotients (morphismes surjectifs et ouverts).

Une autre conséquence de III.32 est très utile. Rappelons que la factorisation canonique d'un morphisme $f : G \to H$ dans une catégorie de groupes topologiques est sa représentation comme composé : $G \xrightarrow{p} G/\ker f \xrightarrow{f'} H$ avec le morphisme quotient p et un morphisme f' injectif ; on voit que f est surjectif si, et seulement si, f' est bijectif, et que f est ouvert si, et seulement si, f' est ouvert. Or le corollaire suivant résulte de III.28 et III.32.

III.34. COROLLAIRE. - Tout morphisme $f : G \to H$ de groupes de Lie admet une factorisation canonique dans Lie G , et L conserve la factorisation canonique (Cela veut dire, que $G/\ker f$ est un groupe de Lie, et que

$$L(G) \xrightarrow{L(p)} L(G/\ker p) \xrightarrow{L(f')} L(H)$$

est la factorisation canonique de $L(f)$).

Jusqu'à ce point, la théorie de conservation du foncteur L s'est développée sans difficulté. Si l'on essaie de continuer en recherchant la conservation de la surjectivité il n'en est plus de même. On sait que la surjectivité de $L(f)$ implique que $L(f)$ est ouvert, par le théorème des applications ouvertes pour des espaces de Banach ; mais si $L(f)$ est ouvert, alors f est ouvert (conséquence de III.13 (i)), parce qu'être ouvert, pour des morphismes de groupes topologiques, est une propriété locale. Donc, si L conservait la surjectivité, il en résulterait que chaque morphisme surjectif $f : G \to H$ de groupes de Lie serait ouvert, ce qui est évidemment absurde : prenons pour G le groupe additif $\underset{\sim}{R}_d$ avec la topologie discrète, posons $H = \underset{\sim}{R}$ (avec la topologie normale), et $f = 1_{\underset{\sim}{R}}$. Il faut donc au moins reformuler la question : est-ce que L conserve la surjectivité des morphismes entre des groupes de Lie connexes ? Lorsque L conserve effectivement les morphismes surjectifs et ouverts (d'après le corollaire précédent), cette question équivaut à la suivante : est-ce que le théorème des applications ouvertes est valable pour des groupes de Lie connexes ? Autrement dit, est-il vrai que chaque morphisme surjectif de groupes de Lie connexes est automatiquement ouvert ? D'après III.34 cette question se réduit en fait aux morphismes bijectifs. Nous proposons une réponse complète, tenant compte de l'existence des contre-exemples qui démontreraient que notre réponse est la meilleure possible.

Tout d'abord il faut donner une reformulation simple mais efficace sur le niveau des groupes de la surjectivité de $L(f)$.

III.35. DÉFINITION. - Nous disons qu'un morphisme $f : G \to H$ de groupes topologiques a la propriété de relèvement (pour les sous-groupes à un paramètre) si, quel que soit le sous-groupe à un paramètre $F : \underset{\sim}{R} \to H$, il existe un sous-groupe à un paramètre $F' : \underset{\sim}{R} \to G$ tel que $F = fF'$.

Or, d'après III.17, on voit immédiatement le résultat suivant.

III.36. LEMME. - Un morphisme $f : G \to H$ de groupes de Lie a la propriété de relèvement si, et seulement si, $L(f)$ est surjectif.

Dans ce contexte, nous allons démontrer un lemme technique.

III.37. LEMME. - Soit $f : G \to H$ un morphisme de groupes de Lie, et soit $F : \underset{\sim}{R} \to H$ un sous-groupe à un paramètre tel que $\operatorname{im} F \subseteq \operatorname{im} f$. Si G est étroit (voir III.12 et les remarques qui précèdent), alors il existe un sous-groupe à un paramètre $F' : \underset{\sim}{R} \to G$ tel que $F = F' f$ (autrement dit, F se relève).

Démonstration. - Puisque des morphismes quotients sont ouverts, le quotient d'un groupe étroit est étroit. Donc, d'après III.34 et III.35, nous pouvons supposer que f est injectif. Alors $L(f)$ est injectif d'après III.29. D'après III.19, on peut donc identifier G à un sous-groupe de H (au sens des groupes abstraits), et $L(G)$ à une sous-algèbre de $L(H)$ (au sens des algèbres de Lie) tels que

$$\exp_G = \exp_H | L(G) .$$

(Il faut se souvenir que des topologies données sur G et $L(G)$ peuvent être plus fines que les topologies induites.) D'après III.17, il existe un $x \in L(H)$ tel que $F(t) = \exp_H tx$ quel que soit $t \in \underset{\sim}{R}$. Il nous faut montrer que $x \in L(G)$. Soit (B , U) une linéarisation de H , et soient (B_1 , U_1) et (C , W) des linéarisations de G telles que $B_1 \subseteq B$ et $C * C \subseteq B_1$. Choisissons $d > 0$ tel que $|s| < d$ entraîne $sx \in B$. Si $s , t \in]-d , d[$ et $C * (sx) = C * (tx)$, alors il existe $a , b \in C$ avec $a * (sx) = b * (tx)$, d'où

$$(- a) * b = (s - t)x \in B_1 \cap \underset{\sim}{R}x \in L(G) \cap \underset{\sim}{R}x .$$

Par raisonnement par l'absurde, supposons maintenant que $x \notin L(G)$. Alors on en déduit $s = t$, et on sait donc que $\{C * sx ; |s| < d\}$ est une famille non dénombrable de sous-ensembles non vides de $L(H)$. En rappelant

$$\exp_H(C * sx) = W(\exp_H sx) = WF(s) ,$$

la famille non dénombrable $\{WF(s) ; |s| < d\}$ est formée des ouverts non vides disjoints de G (par rapport à la topologie donnée.), parce que W est ouvert dans G et $\operatorname{im} F \subseteq G$. Mais c'est une contradiction avec l'hypothèse que G est étroit.

On peut maintenant énoncer "le théorème des applications ouvertes" suivant.

III.38. THÉORÈME. - *Soit* $f : G \to H$ *un morphisme de groupes de Lie. Alors les propositions suivantes sont équivalentes* :

(1) f *est ouvert* ;

(2) $L(f)$ *est ouvert* ;

(3) $L(f)$ *est surjectif* ;

(4) f *a la propriété de relèvement pour les sous-groupes à un paramètre*.

Si, de plus, G *et* H *sont connexes et* G *séparable, alors ces conditions sont aussi équivalentes à*

(5) f *est surjectif*.

Démonstration. - On a déjà commenté l'équivalence de (1)-(4). Evidemment, (1) implique (5) si H est connexe. Mais, d'après III.30 et le lemme précédent, on a $(5) \Rightarrow (4)$.

En ce qui concerne les propriétés de conservation de L , on peut alors exprimer le résultat suivant.

III.39. COROLLAIRE. - *Le foncteur* L *conserve et reflète les morphismes surjectifs de groupes de Lie connexes et séparables*.

L'exemple suivant montre comment l'implication $(5) \Rightarrow (1)$ (dans III.38) peut tomber en défaut sans des hypothèses de séparabilité.

III.40. EXEMPLE. - Soit $B(\mathbb{R})$ l'espace de Banach de toutes les fonctions bornées $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (continues ou non) avec la norme $\|f\| = \sup\{|f(x)| \ ; \ x \in \mathbb{R}\}$. Formons l'espace de Banach produit $L = B(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$. Définissons $e_r \in B(\mathbb{R})$, $r \in \mathbb{R}$, par $e_r(s) = 1$ si $s = r$ et $e_r(s) = 0$ autrement. Alors la famille des éléments (e_r , r) , $r \in \mathbb{R}$, est évidemment libre dans L (au sens des groupes abéliens), donc le sous-groupe D engendré par cette famille est libre (de rang égal ou continu). Montrons qu'il est discret dans L : Si $d = \sum n(r)(e_r , r)$, $n(r) \in \mathbb{Z}$, alors

$$\|d\| = \max\{\|\sum n(r)\ e_r\| \ , \ |\sum n(r)\ r|\} \geq \max|n(r)| \ ,$$

donc $\|d\| < 1$ entraîne $d = 0$.

Posons $H = L/D$, alors H est localement isomorphe à L , donc est un groupe de Lie (voir III.6, III.22) ; en fait, on a $L(H) = L$, et $\exp_H : L(H) \to H$ est le morphisme quotient $(\exp x = x + D)$ (qui est, en même temps, le revêtement universel).

Si on définit $G = B(\mathbb{R})/D_1$, où $f \in D_1$ si, et seulement si, $(f , 0) \in D$, alors, par le même raisonnement, on a trouvé un groupe de Lie tel que $L(G) = B(\mathbb{R})$, $\exp_G : L(G) \to G$ donnée par $\exp_G x = x + D_1$. Le plongement $B(\mathbb{R}) \to L$ définit un morphisme $f : G \to H$ par $f(x + D_1) = (x , 0) + D$. Puisque $L=(B(\mathbb{R})\times\{0\})+D$, $f : G \to H$ est un morphisme bijectif de groupes de Lie abéliens connexes tel que

$L(f)$ est un plongement non surjectif. Notons que $\pi_1(G) \cong D$ est non dénombrable. Le sous-groupe à un paramètre $t \longmapsto (0\ ,\ t) + D : \underset{\sim}{R} \longrightarrow H$ ne peut pas être relevé en un sous-groupe à un paramètre dans G ; en fait, son image dans G est discrète.

Si LieG_0 dénote la sous-catégorie pleine de LieG contenant tous les groupes de Lie connexes, alors la restriction de L à LieG_0 (que nous appelons encore L par abus de langage) est évidemment fidèle, car $L(f) = L(g)$ entraîne que f et g coïncident localement, d'après III.13, donc globalement par connectivité. Le foncteur n'est pas plein ; par exemple, si $\exp : \underset{\sim}{R} \longrightarrow \underset{\sim}{R}/\underset{\sim}{Z}$, $\exp r = r + \underset{\sim}{Z}$ est la fonction exponentielle du cercle des endomorphismes f de $\underset{\sim}{R}$ qui sont de la forme $L(g)$ sont caractérisés par $f(1) \in \underset{\sim}{Z}$. Mais on a toutefois la proposition suivante :

III.41. - <u>Soient</u> G <u>et</u> H <u>des groupes de Lie tels que</u> G <u>est simplement connexe. Alors la fonction</u> $L : \mathrm{Hom}(G\ ,\ H) \longrightarrow \mathrm{Hom}(L(G)\ ,\ L(H))$ <u>est bijective</u>.

<u>Démonstration</u>. - Nous avons déjà observé qu'elle est injective. Soit

$$\Phi : L(G) \longrightarrow L(H)$$

un morphisme dans Dyn. Choisissons des linéarisations $(B\ ,\ U)$ et $(C\ ,\ V)$ de G et H telles que $\Phi(B) \subseteq C$. Posons

$$f = \exp_H \log_{(B,U)} : U \longrightarrow H .$$

D'après III.13, f satisfait à $f(xy) = f(x)\, f(y)$ quels que soient $x\ ,\ y \in U$. D'après III.10, il existe un morphisme $F : G \longrightarrow H$ qui prolonge f et qui donc satisfait $L(F) = \Phi$.

Si LieG_0 dénote la sous-catégorie pleine de tous les groupes de Lie simplement connexes, on peut énoncer le corollaire suivant.

III.42. COROLLAIRE. - <u>Le foncteur</u> $L : \mathrm{LieG}_0 \longrightarrow \mathrm{Dyn}$ <u>est fidèle et plein</u>.

Nous verrons plus tard qu'il n'est pas représentatif. Autrement dit, il existe des algèbres de Dynkin qui ne sont isomorphes à aucune algèbre de la forme $L(G)$.

En conclusion de cette section, mentionnons que ni la catégorie LieG, ni la catégorie Dyn ne permettent de produits cartésiens arbitraires ; probablement, elles n'admettent pas des produits (arbitraires) au sens des catégories (démonstration?), donc ne sont pas complètes. On peut envisager une théorie modifiée qui ne présente pas ce désavantage. Si on appelle algèbre de Lie-Banach une algèbre de Dynkin, si elle est munie d'une norme compatible fixe, et si on appelle morphisme de Lie-Banach un morphisme d'algèbres de Dynkin entre deux algèbres de Lie-Banach s'il est une contraction (ou isométrie), alors la catégorie Lie Ban des algèbres de Lie-Banach est complète (le produit étant le ℓ^∞-produit comme d'habitude). De la même manière, la catégorie M et G des groupes métriques est bien définie, et est complète. Il n'est pas entièrement clair pour l'instant comment on doit définir la sous-catégorie des groupes de Lie métriques MetLieG et le foncteur

$L : \mathrm{MetLieG} \longrightarrow \mathrm{LieBan}$ tel qu'il soit continu (i. e. conserve toutes les limites). A ma connaissance, un tel programme n'est pas encore exécuté, donc constitue un problème de recherche.

4. Sous-groupes analytiques.

Nous avons vu dans III.27 et III.30, que certains sous-groupes d'un groupe de Lie déterminent une sous-algèbre fermée de $L(G)$. La réciproque est inexacte, comme le montre le groupe $G = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2$ avec $\exp : \mathbb{R}^2 \longrightarrow G$, $\exp(x , y) = (x + \mathbb{Z} , y + \mathbb{Z})$; il n'existe aucun sous-groupe fermé de Lie dont l'algèbre de Lie est

$$A = \{(x , y) \in L(G) \ ; \ y = \sqrt{2}\, x\} .$$

Cela nous force à considérer, dans la théorie des groupes de Lie, des sous-groupes non fermés d'un certain type, comme par exemple le sous-groupe $\exp A$ de G .

Le théorème suivant est central dans cet effort.

III.43. THÉORÈME. - Soient G un groupe de Lie, et $j : A \longrightarrow L(G)$ un morphisme injectif d'algèbres de Dynkin. Alors il existe un groupe de Lie connexe H tel que:

(i) $L(H) = A$,

(ii) il existe un morphisme injectif $f : H \longrightarrow G$ tel que $L(f) = j$.

En outre, f et H sont déterminés de façon unique à un isomorphisme canonique près (voir III.11).

Démonstration. - Soient (B , U) une linéarisation de G , et C un groupe local associé à A tel que $j(C) * j(C) \subseteq B$. Posons $K = \exp_G j(C)$. Munissons K d'une topologie telle que la fonction bijective $\exp \circ j|C : C \longrightarrow K$ est un homéomorphisme. Les hypothèses (i), (ii), (iii) de III.9 sont satisfaites. Soit H le sous-groupe engendré par K dans G . D'après III.9, il existe sur H une topologie, et une seule, telle que la topologie induite sur K est la topologie discrète. Posons $\exp_H = \exp_G \circ j : A \longrightarrow H$. Les conditions de la définition III.14 sont alors vérifiées, donc H est un groupe de Lie tel que $A = L(H)$ et que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{j} & L(G) \\ {\scriptstyle \exp_H}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \exp_G} \\ H & \xrightarrow{f} & G \end{array}$$

où $f : H \longrightarrow G$ est l'inclusion. D'après III.18 et III.19, on en déduit $j = L(f)$. Nous laissons la démonstration de l'unicité au soin du lecteur (comme dans III.11).

On dit que le sous-groupe $f(H)$ de G , dans III.41, est engendré par la sous-algèbre A de $L(G)$. Notons d'abord que le sous-groupe $f(H)$ de G ne détermine pas nécessairement A d'une façon unique, même si j est un plongement ; pour comprendre cela, il suffit de considérer l'exemple III.40. Ce phénomène conduit à faire la distinction, dans la définition suivante.

III.44. DÉFINITION. - Soient G un groupe de Lie et S un sous-groupe. On dit que S est :

(i) faiblement analytique,

(ii) analytique,

(iii) analytique strict,

si l'on trouve un groupe de Lie connexe H et un morphisme injectif $f : H \to G$ tel que $f(H) = S$, et tel que, dans les cas (ii) et (iii) on a en outre

(ii)' $L(f)$ est un plongement,

(iii)' $L(f)$ est un plongement, et quel que soit le sous-groupe $F : \underset{\sim}{R} \to G$ à un paramètre avec $\operatorname{im} F \subseteq \operatorname{im} f$, il existe un relèvement $F' : \underset{\sim}{R} \to H$ tel que $F = fF'$.

On dit que $f : H \to G$ est un morphisme définissant pour S .

III.45. PROPOSITION. - Un sous-groupe analytique strict S d'un groupe de Lie détermine de façon unique une sous-algèbre $L[S]$ fermée de $L(G)$ telle que $L[S] = \operatorname{im} L(f)$, quel que soit le morphisme $f : H \to G$ définissant de S . En fait,

$$L[S] = \{x \in L(G) : \exp_G tx \in S \text{ pour tout } t \in \underset{\sim}{R}\} .$$

Démonstration. - Soit $f : H \to G$ un morphisme définissant de S . Puisque $L(f)$ est un plongement, nous pouvons supposer $L(H) \subseteq L(G)$ tel que $L(f)$ soit l'inclusion. D'après III.44 (iii), un élément $x \in L(G)$ est dans $L(H)$ si, et seulement si, $\exp_G tx \in S$, quel que soit $t \in R$.

Dans le cas de séparabilité, la situation est agréable.

III.46. THÉORÈME. - Si G est un groupe de Lie et S un sous-groupe analytique séparable, alors S est strict et $L[S]$ est séparable. Réciproquement, S est séparable s'il est engendré par une sous-algèbre séparable fermée de $L(G)$. En particulier, si G_0 est séparable, alors tout sous-groupe analytique est automatiquement strict, et il y a une bijection $S \mapsto L[S]$ entre les sous-groupes analytiques et les sous-algèbres fermées de $L(G)$.

Démonstration. - Soit $H = \overline{S}$. Alors H est un sous-groupe connexe séparable fermé. Si (B , U) est une linéarisation de G , alors $U \cap H$ a une base dénombrable (III.14), donc $\Gamma = \log(U \cap H)$ est un sous-groupe local fermé de B , de base dénombrable. Il en résulte que $\Gamma_* = L_\Gamma \cap B \subseteq \Gamma$ a une base dénombrable, donc L_Γ est séparable (III.14). Soit maintenant $f : H_1 \to G$ un morphisme définissant pour S . Nous avons $L(H_1) \subseteq L(G)$ tel que $L(f)$ soit une inclusion. Puisque

$$\exp(L(H_1) \cap B) \subseteq \operatorname{im} f \cap U = S \cap U \subseteq H \cap U ,$$

on trouve $L(H_1) \cap B \subseteq \Gamma_* \subseteq L_\Gamma \cap B$, donc $L(H_1) \subseteq L_\Gamma$. On en déduit que $L(H_1)$, donc H_1, est étroit (III.25). Mais alors III.37 montre que S est strict. Si S est engendré par A et $f : H \to G$ définit S tel que $L(H) = A$, alors H, donc $S = f(H)$ est séparable (III.25). Si G_0 est séparable, alors G_0, donc chaque sous-espace, a une base dénombrable (III.25), et est, par conséquent, séparable.

Dans les circonstances du théorème précédent, supposons en outre que S soit fermé, i. e. $H = S$. Les sous-groupes à un paramètre, définis par des éléments de L_T, sont alors contenus dans $H = S$, donc $L_T \subseteq L[S] = L(H_1)$. Cela entraîne $L_T = L[S]$. Nous pouvons supposer que $H_1 = H$ en rappelant que la topologie de H_1 peut être plus fine que celle de H. Soit (C , V) une linéarisation de G telle que $C * C * C \subseteq B$. Si $C \cap (x * \Gamma_*) \cap (y * \Gamma_*) \neq \emptyset$ pour $x , y \in C$, on trouve $C \cap (x * \Gamma_*) = C \cap (y * \Gamma_*)$. En particulier, si on pose $\Lambda = \log(V \cap H)$, alors Λ est l'union disjointe des ensembles $C \cap (x * \Gamma_*)$, $x \in \Lambda$. Puisque

$$\exp(C \cap (x * \Gamma_*)) = V \cap (\exp x)W ,$$

où $W = \exp(B \cap L_\Gamma)$ est ouvert dans H_1, alors la famille $\{C \cap (x * \Gamma) , x \in \Lambda\}$ est dénombrable, parce que H_1 est étroit. D'après le théorème de Baire, un au moins des ensembles fermés $C \cap (x * \Gamma_*)$ dans C contient un point intérieur. En utilisant une translation à gauche convenable, nous en déduisons qu'un point quelconque de $C \cap \Gamma_*$ est un point intérieur par rapport à Λ. Alors III.30 montre que H est un groupe de Lie avec $L(H) = L_T$.

Nous venons de voir que les sous-groupes analytiques séparables et fermés sont des groupes de Lie. Inversement, d'après III.30 et III.44, un sous-groupe qui est un groupe de Lie est analytique.

Donc nous avons la proposition suivante.

III.47. PROPOSITION. - Soient G un groupe de Lie et H un sous-groupe fermé connexe. Considérons les conditions suivantes :

(1) H est un groupe de Lie ;

(2) H est analytique ;

(3) H est analytique strict.

Alors on a toujours (1) $\Rightarrow$ (2) (et trivialement (3) $\Rightarrow$ (2)), mais si H est séparable, les trois conditions sont équivalentes.

L'exemple III.40 montre que (2) $\not\Rightarrow$ (3) est faux en général.

Nous avons déjà commenté la décomposition canonique d'un morphisme $f : G \to H$ (voir III.34). Nous sommes maintenant en mesure de raffiner la décomposition : en fait, on peut toujours écrire

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & H \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle i} \\ G/\ker f & \xrightarrow{f''} & \operatorname{im} f = f(G) \end{array}$$

avec un morphisme quotient p, un morphisme bijectif f'', un plongement i. Si G et H sont des groupes de Lie connexes, $\ker f$ est un groupe de Lie d'après III.28 ; généralement, on ne peut pas dire davantage sur $\operatorname{im} f$. Cependant, on a la proposition suivante.

III.48. PROPOSITION. - Soit $f : G \to H$ un morphisme de groupes de Lie tel que G soit connexe. Considérons les conditions suivantes :

(1) $\operatorname{im} L(f)$ est fermé ;

(2) $\operatorname{im} f$ est analytique ;

(3) $\operatorname{im} f$ est analytic strict.

Alors (1) $\Rightarrow$ (2) toujours ; si $\operatorname{im} f$ est séparable, (2) $\Rightarrow$ (3) ; enfin, si $G/\ker f$ est séparable, alors (3) $\Rightarrow$ (1), i. e. les trois conditions sont équivalentes.

Démonstration. - III.44 et III.46 démontrent les deux premières implications. Pour démontrer la troisième, nous pouvons supposer que f est injectif et que G est séparable. D'après III.45, on a $\operatorname{im} L(f) \subseteq L[\operatorname{im} f]$. Mais l'inclusion

$$L[\operatorname{im} f] \subseteq \operatorname{im} L(f)$$

résulte de III.25 et III.37. Donc $\operatorname{im} L(f) = L[\operatorname{im} f]$, et $L[\operatorname{im} f]$ est fermé.

III.49. DÉFINITION. - Un morphisme f dans Dyn est appelé un homomorphisme si $\operatorname{im} f$ est fermé. Un morphisme $f : G \to H$ dans LieG est appelé un homomorphisme, si $f(G_0)$ est un sous-groupe analytique de H.

III.50. COROLLAIRE. - Le foncteur L conserve (et reflète) les homomorphismes de groupes de Lie connexes et séparables.

III.51. PROPOSITION. - Soient G un groupe de Lie, et S un groupe analytique strict, alors le normalisateur $N(S, G)$ de S dans G est un groupe de Lie fermé dans G avec $L(N(S, G)) = I(L[S], L(G))$.

Démonstration. - Soient (B, V) et (C, U) des linéarisations de G (III.20) telles que $B * B * B \subseteq C$. Alors S est engendré par $K = \exp(L[S] \cap B)$. D'après la définition on a $x \in N(L[S] \cap B, B) = I(L[S], L(G))$ (voir II.25) si, et seulement si, $x * (L[S] \cap B) * (-x) \subseteq L[S] \cap C$ si, et seulement si, $gKg^{-1} \subseteq K_1$, où $g = \exp x$, $K_1 = \exp(L[S] \cap C)$. Puisque K engendre S et $K_1 \subseteq S$, cela implique $gSg^{-1} \subseteq S$, donc $g \in N(S, G)$. Soient, inversement, $g \in V \cap N(S, G)$ et $y \in L[S]$. Alors $g(\exp ty)\, g^{-1} \subseteq S$ quel que soit $t \in \mathbb{R}$; donc, si $x = \log g$ et si t est suffisamment petit, on a $t\, e^{\operatorname{ad} x} y = x * (ty) * (-x)$ (voir la condition (12) du chapitre II, qui suit la proposition II.5). Donc

$$t \longrightarrow \exp t\, e^{\operatorname{ad} x} y : \mathbb{R} \longmapsto G$$

est un sous-groupe à un paramètre qui est contenu dans S. Donc $e^{\operatorname{ad} x} y \in L[S]$ d'après III.45.

On vient de démontrer que

$$x = \log g \ , \quad g \in V \cap N(S\ ,\ G) \quad \text{entraîne} \quad e^{\mathrm{ad}\ x}\ L[S] \subseteq L[S]\ ,$$

donc $x \in I(L[S]\ ,\ L(G))$ d'après II.13. Par conséquent

$$\exp(I(L[S]\ ,\ L(G)) \cap B) = V \cap N(S\ ,\ G)\ .$$

La proposition résulte alors de III.29.

III.52. COROLLAIRE. - _Soient_ G _un groupe de Lie, et_ S _un sous-groupe analytique strict. Alors, on a :_

(i) S _est distingué dans_ $\overline{S}$ _; en particulier, chaque sous-groupe analytique strict dense est distingué._

(ii) S _est distingué dans_ G_0 _si, et seulement si,_ $L[S]$ _est un idéal dans_ $L(G)$.

III.53. DÉFINITION. - Une algèbre de Dynkin L est dite _globale_ s'il existe un groupe de Lie G tel que $L = L(G)$.

III.54. PROPOSITION. - _Soit_ L _une algèbre de Dynkin. Alors_ L _est globale si, et seulement si, on trouve un groupe_ G _(abstrait) et une fonction injective_ $e : B \to G$, _définie sur un groupe local_ B _associé à_ L (voir page 2-05) _telle que_ $e(x * y) = e(x)\ e(y)$ _quels que soient_ $x\ ,\ y \in B$, _avec_ $x * y \in B$.

Démonstration. - Posons $K = e(B)$, et munissons K de la topologie qui fait de la corestriction $e : B \to K$ un homéomorphisme. Alors les hypothèses du théorème III.9 sont satisfaites. Soit G_0 le sous-groupe topologique de G engendré par K d'après III.9. Alors III.21 montre que G_0 est un groupe de Lie avec $L(G_0) = L$. L'implication réciproque est évidente.

Tenant compte de III.41, on peut formuler la caractérisation suivante seulement en termes de la catégorie Dyn .

III.55. COROLLAIRE. - _Soit_ L _une algèbre de Dynkin. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :_

(1) L _est globale_ ;

(2) _Il existe une injection_ $L \to L_g$ _dans une algèbre_ L_g _globale._

Ces résultats donnent un stock d'exemples d'algèbres globales.

III.56. EXEMPLE. - Si A est une algèbre de Banach unifère, et si ΛA est l'algèbre de Dynkin définie sur A par la multiplication $[x\ ,\ y] = xy - yx$, alors ΛA est globale d'après III.15.2° ; donc chaque algèbre de Dynkin L qui admet un morphisme injectif $L \to \Lambda A$ est globale. Notons aussi que chaque algèbre de Dynkin nilpotente est globale, parce que l'opération $*$ est alors polynomiale.

Nous verrons dans un instant qu'il existe des algèbres de Dynkin non globales.

III.57. PROPOSITION. - *Soient* G *un groupe de Lie simplement connexe, et* S *un sous-groupe analytique strict distingué. Alors* S *est fermé et est un groupe de Lie si, et seulement si,* $L(G)/L[S]$ *est une algèbre globale.*

Démonstration.

(i) Si S est fermé et est un groupe de Lie, alors G/S est un groupe de Lie tel que $L(G/S) = L(G)/L[S]$, d'après III.32.

(ii) Soit H un groupe de Lie connexe tel que $L(H) = L(G)/L[S]$. Le morphisme-quotient $L(G) \to L(H)$ introduit un morphisme local $U \to H$, où (B, U) est une linéarisation de G. D'après III.10, G étant simplement connexe, ce morphisme local est induit par un morphisme $f : G \to H$ tel que $L(f) : L(G) \to L(H)$ est le morphisme-quotient. D'après III.28, $\ker f$ est un groupe de Lie tel que $L(\ker f) = \ker L(f) = L[S]$. Il en résulte que $(\ker f)_0 = S$, donc S est fermé.

Tenant compte de III.46 et III.47, on a :

III.58. COROLLAIRE. - *Soient* G *un groupe de Lie simplement connexe et* S *un sous-groupe analytique séparable distingué. Alors* S *est fermé si, et seulement si,* $L(G)/L[S]$ *est global. (Dans ce cas,* S *est un groupe de Lie.)*

III.59. EXEMPLE (DOUADY). - Soit G un groupe de Lie simplement connexe qui contient un sous-groupe central $T = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Alors $G \times G$ est un groupe de Lie simplement connexe contenant le tore central $T \times T$. Soit S un sous-groupe analytique non fermé de $T \times T$, comme par exemple $\{(x + \mathbb{Z}, y + \mathbb{Z}) ; y = \sqrt{2}\, x\}$. Alors $L(G)/L[S]$ n'est pas global d'après III.58. On peut prendre pour G le groupe $Gl(E)$ pour un espace de Hilbert complexe E de dimension infinie et $T = U(1).1_E$ où $U(1) = \{z \in \mathbb{C} ; |z| = 1\}$; d'après III.15.3°, $Gl(E)$ est un groupe de Lie ; d'après un théorème de Kuiper (cf. [6,7]) $Gl(E)$ est contractible, donc simplement connexe.

Dans le contexte de III.57, nous ajoutons quelques remarques additionnelles.

III.60. PROPOSITION. - *Soient* G *un groupe de Lie simplement connexe, et* N *un sous-groupe de Lie (fermé d'après* III.30). *Alors le groupe de Lie* $H = G/N$ *est simplement connexe si, et seulement si,* N *est connexe.*

Démonstration. - Si $p_H : \tilde{H} \to H$ est le revêtement universel, on peut supposer

$$L(\tilde{H}) = L(H) \ , \quad L(p_H) = 1_{L(H)} \ , \quad \exp_H = p_H \exp_{\tilde{H}} \qquad \text{(III.23).}$$

Si (B, U) est une linéarisation de $\tilde{H}$ telle que $p_H|U : U \to V$ est un homéomorphisme, et si (C, W) est une linéarisation de G telle que $q(W) \subseteq V$, où $q : G \to H$ est le morphisme-quotient, alors $(p_H|U)^{-1} \circ (q|W) : W \to H$ est un morphisme local qui peut être prolongé de façon unique en un morphisme $Q : G \to H$ d'après III.10 ; on note qu'on a $L(Q) = L(q)$ d'après l'identification $L(\tilde{H})=L(H)$.

Si $N_1 = \ker Q$, alors on a la suite exacte

(b) $$0 \longrightarrow L(N_1) \longrightarrow L(G) \longrightarrow L(\tilde{H}) \longrightarrow 0$$

d'après III.32, puisque $q = p_H Q$, on a

(c) $$N_1 \subseteq N ,$$

(d) $$\ker Q \cong N/N_1 .$$

Donc $L(N_1) = L(N)$, parce que $L(\tilde{H}) = L(H)$, et $N_0 \subseteq N_1$ où N_0 est la composante de 1 dans N , parce que N_0 , N_1 et N appartiennent à la même sous-algèbre $L(N)$ de $L(G)$. Mais N_0 est ouvert dans N_1 , alors N_1/N_0 est un sous-groupe discret distingué de G/N_0 , d'où $G/N_0 \longrightarrow \tilde{H} \cong G/N_1$ est un revêtement, qui est nécessairement trivial, $\tilde{H}$ étant simplement connexe. Donc $N_0 = N_1$. Alors démontrons la proposition : Si N est connexe, alors $N_0 = N$, donc p_H est un isomorphisme, donc H est simplement connexe. Inversement, si H est simplement connexe, $N = \ker q = \ker Q = N_0$, donc N est connexe.

III.61. EXEMPLE. - Si $G = Gl(E)$ pour un espace de Hilbert E de dimension infinie et si $N = U(1).1_E$, alors G/N est simplement connexe, tandis que N n'a pas cette propriété. On note même que $L(N)$ admet dans $L(G)$ un complément en tant qu'espace vectoriel topologique, parce que $\dim L(N) = 1$. Remarquons que $G \longrightarrow G/N$ est un fibré au sens de la théorie d'homotopie. On a donc une suite exacte

$$0 = \pi_2(G) \longrightarrow \pi_2(G/N) \longrightarrow \pi_1(N) \longrightarrow \pi_1(G) = 0 .$$

Donc $\pi_2(G/N) \cong \pi_1(U(1)) = \underset{\sim}{Z}$. Notons que $\pi_2(X) = 0$ quel que soit le groupe topologique X connexe par arcs tel que $H_n(X) = 0$ pour n assez grand [3].

La proposition III.57 donne aussi une contribution à la question III.41. En fait, soient G un groupe de Lie connexe, et S un groupe de Lie connexe tel que $S = G$ en tant que groupe et que la topologie de S soit égale ou plus fine que celle de G . Alors on a $L(S) \subseteq L(G)$, mais la topologie de $L(S)$ pourrait être plus fine que la topologie induite par $L(G)$. (Si $L(S)$ porte la topologie induite, alors S définit sur G une structure de sous-groupe analytique différente de la structure de groupe de Lie donnée sur G ; rappelons III.47 dans ce contexte.) Pour $g \in G$, soit I_g l'automorphisme donné par $I_g(x) = gxg^{-1}$. Alors I_g est un automorphisme de G et S , donc $L(I_g)$ est un automorphisme de $L(G)$ et $L(S)$ puisque L est un foncteur. Si (B , U) est une linéarisation de G , on en déduit que $x * (L(S) \cap B) * (-x) \subseteq L(S)$ quel que soit $x \in B$; donc $\overline{L(S)}$ est un idéal de $L(G)$ (cf. II.13). Soit maintenant A un idéal fermé de $L(G)$ tel que $L(S) \subseteq A$ et que $L(G)/A$ soit global ; alors il existe un groupe de Lie H tel que $L(H) \cong L(G)/A$. Si $\tilde{G}$ est le revêtement universel de G , le raisonnement de III.54 (ii) montre l'existence d'un morphisme $f : \tilde{G} \longrightarrow H$ tel que le morphisme $L(f) : L(\tilde{G}) \longrightarrow L(H)$ est équivalent au morphisme-quotient $L(G) \longrightarrow L(G)/A$. Si nous supposons

$$L(\tilde{S}) = L(S) \ , \quad L(\tilde{G}) = L(G) \ , \quad L(p_S) = 1_{L(S)} \ , \quad L(p_G) = 1_{L(G)} \qquad \text{(III.23)} \ ,$$

alors le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{S} & \xrightarrow{\tilde{j}} & \tilde{G} & \xrightarrow{f} & H \\ p_S \downarrow & & \downarrow p_G & & \\ S & \xrightarrow{j} & G & & \end{array}$$

donne une suite

$$L(S) \xrightarrow{L(j)} L(G) \xrightarrow{L(f)} L(H) \ ,$$

où nous avons $L(fj) = L(f)\,L(j) = 0$. Donc $j(S) \subseteq \ker f$. Puisque j est surjectif, on en déduit $(\ker p_G)(\ker f) = G$. Si $\pi_1(G) \cong \ker p_G$ est dénombrable, alors le groupe de Lie H est dénombrable, donc est 1 , donc $L(G)/A \cong L(H) = 0$, donc $A = L(G)$. Tenant compte III.34, et adaptant la notation à celle de III.38, nous avons observé le résultat suivant.

III.62. REMARQUE (Voir III.38, III.48). - Soit $f : G \to H$ un morphisme surjectif de groupes de Lie connexes. Alors $\overline{\mathrm{im}\,L(f)}$ est un idéal de $L(H)$. Si $\pi_1(H)$ est dénombrable (par exemple si H est simplement connexe) et si $\mathrm{im}\,L(f) \subseteq A \subseteq L(H)$ avec un idéal A fermé tel que $L(H)/A$ soit global, alors $A = L(H)$. En particulier, si $\mathrm{im}\,L(f)$ est fermé et si $L(H)/\mathrm{im}\,L(f)$ est global, alors $L(f)$ est surjectif, et f est ouvert.

5. Constructions algébriques globales.

Si G est un groupe de Lie, il est naturellement d'un grand intérêt de savoir si, par exemple, le centre, le groupe des commutateurs, ou ceux d'un sous-groupe analytique, sont encore des groupes de Lie ou, au moins des sous-groupes analytiques. La théorie locale a été préparée dans le paragraphe 5 du chapitre II. Nous allons discuter ici l'aspect global.

La théorie est tout à fait satisfaisante en ce qui concerne les normalisateurs (voir III.51) et les centralisateurs, donc les centres. En fait, on démontre dans l'esprit de III.51, mais un peu plus facilement, la proposition suivante.

III.63. PROPOSITION. - Soient G un groupe de Lie, et S un sous-groupe analytique strict. Alors le centralisateur

$$Z(S\ ,\ G) = \{g \in G \ ; \quad gs = sg \quad \text{quel que soit} \quad s \in S\}$$

de S dans G est un sous-groupe de Lie (fermé) tel que

$$L(Z(S\ ,\ G)) = Z(L[S]\ ,\ L(G)) = \{x \in L(G) \ ; \quad (\mathrm{ad}\ x)(L[S]) = \{0\}\} \ .$$

III.64. COROLLAIRE. - Le centre d'un groupe de Lie est un groupe de Lie, et le foncteur L conserve les centres.

On peut alors considérer les termes $Z_n(G)$ de la suite croissante centrale de G (i. e. $Z_1(G) = Z(G\ ,\ G)$, $Z_{n+1}(G)/Z_n(G) = Z_1(G/Z_n(G))$) et on trouve que L conserve la suite croissante centrale d'un groupe de Lie connexe.

III.65. COROLLAIRE. - Un groupe de Lie connexe est nilpotent si, et seulement si, son algèbre de Lie est nilpotente.

Comme nous avons déjà vu dans le cas local (II.28), la question du groupe des commutateurs est plus difficile. Soient G un groupe de Lie connexe, et S_j, 1, 2 deux groupes analytiques stricts qui se normalisent. Soit T le sous-groupe analytique construit à partir de la sous-algèbre fermée

$$[L[S_1] , L[S_2]]^{-} \subseteq L[S_1] \cap L[S_2] .$$

D'après III.51, on a $S_1 S_2 \subseteq N(T , G)$. Soit $(B , \mathfrak{U})$ une linéarisation de G suffisamment petite ; posons $K_j = \exp(L[S_j] \cap B)$; alors on a $\langle x,y\rangle = xyx^{-1} y^{-1} \in T$ quels que soient $x \in K_1$, $y \in K_2$ d'après II.28. L'application itérée de la formule $\langle x , yz\rangle = \langle x , y\rangle(y\langle x , z\rangle y^{-1})$, et le fait que K_j engendre S_j démontrent que le groupe $\langle S_1 , S_2\rangle$ engendré par les $\langle s_1 , s_2\rangle$, $s_j \in S_j$ est contenu dans T. Si on utilise la notation du (25) de II (précédant II.26), on a que $\exp(\langle L[S_1] \cap B , L[S_2] \cap B\rangle)$ est dense dans l'ensemble $\exp([L[S_1] , L[S_2]]^{-} \cap B)$, qui engendre T, donc $\langle S_1 , S_2\rangle$ est dense dans T. Nous avons indiqué une démonstration de la proposition suivante.

III.66. PROPOSITION. - Si S_1 et S_2 sont des sous-groupes analytiques stricts d'un groupe de Lie G, tels que S_1 et S_2 se normalisent, alors le sous-groupe $\langle S_1 , S_2\rangle$ est dense dans le groupe analytique engendré par $[L[S_1] , L[S_2]]^{-}$.

III.67. COROLLAIRE. - Soit G un groupe de Lie connexe. Alors le groupe des commutateurs algébriques G' est dense dans le sous-groupe analytique G'_{an} engendré par l'algèbre des commutateurs fermée $[L(G) , L(G)]^{-}$.

L'exemple II.29 montre que G' n'est pas nécessairement analytique et que $G' \neq G'_{an}$ est possible. Il peut aussi arriver que G'_{an} ne soit pas fermé, même en dimensions finies, comme le démontre l'exemple suivant.

III.68. EXEMPLE. - Soit $H = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ avec la multiplication

$$(a , x , y)(a' , x' , y') = (a + a' + (xy' , xy' \sqrt{2}) , 0 , 0) .$$

$G = H/(\mathbb{Z}^2 \times \{0\} \times \{0\})$, alors G' est un sous-groupe analytique non-fermé.

Notons que cette pathologie là est typique pour le cas d'un groupe G non simplement connexe.

III.69. REMARQUE. - Soit G un groupe de Lie simplement connexe et séparable. Alors G'_{an} est fermé.

Démonstration. - Tenant compte de III.25, G'_{an} a une base dénombrable, donc est séparable ; d'après III.52 (ii), G'_{an} est distingué. L'algèbre de Dynkin $L(G)/[L(G) , L(G)]^{-}$, étant abélienne, est évidemment globale. Donc III.58

s'applique, et démontre la proposition.

En raisonnant par récurrence, toujours en utilisant III.60, on peut obtenir un critère suffisant pour la résolubilité d'un groupe de Lie : c'est certainement le cas si la suite

$$L(G)^{(n)} \ , \ L(G)^{(0)} = L(G) \ , \ L(G)^{(n+1)} = [L(G)^{(n)} \ , \ L(G)^{(n)}]$$

se termine par 0 après un nombre fini de pas. On peut traiter la suite centrale décroissante d'une façon analogue.

6. Groupes de Lie linéaires. Représentation adjointe.

III.70. DÉFINITION. - Un groupe de Lie G est dit linéaire s'il existe une algèbre de Banach unifère A, et un isomorphisme de groupes topologiques sur un sous-groupe fermé de A^{-1}, groupe des éléments inversibles de A. Une algèbre de Dynkin est dite linéaire si elle est isomorphe à une sous-algèbre de Lie d'une algèbre de Dynkin ΛA, obtenue en prenant sur une algèbre de Banach A convenablement choisie la multiplication $[x , y] = xy - yx$.

Il est immédiat que $L(G)$ est linéaire si G est linéaire (III.31). On a vu, dans III.15, des exemples de groupes de Lie linéaires. Nous ajoutons ici quelques exemples d'un grand intérêt théorique. Pour cela, nous référons au paragraphe 6 du chapitre I. Soit E un espace de Banach, et soit $\mathcal{L}(E)$ l'algèbre de Banach de tous les opérateurs bornés de E dans E. (Il pourrait y avoir confusion si, comme dans le chapitre I, nous écrivions $L(E)$.) Supposons E muni d'un produit (I.35). Soit $Der(E)$ l'espace vectoriel de toutes les dérivations de E, et $Aut(E)$ le groupe multiplicatif des automorphismes de E (I.35). Nous nous proposons de démontrer que $Aut(E)$ est un groupe de Lie linéaire et que $Der(E)$ est son algèbre de Lie. Notons d'abord le lemme suivant.

III.71. LEMME. - $Der(E)$ <u>est une algèbre de Dynkin linéaire par rapport à</u>

$$[d_1 , d_2] = d_1 d_2 - d_2 d_1 .$$

En fait, un calcul immédiat montre que $[d_1 , d_2]$ est une dérivation, si $d_j \in Der(E)$, et on voit simplement que $Der(E)$ est fermé dans $\mathcal{L}(E)$ (parce qu'il est même fermé par rapport à la topologie de la convergence simple).

D'après le théorème I.36 il est évident qu'il est nécessaire de montrer que $(d \otimes 1 + 1 \otimes d , d)$ est exponentiellement engendré (I.32) dans $\mathcal{L}(E \hat{\otimes} E) \times \mathcal{L}(E)$ pour tous d suffisamment petits. Démontrons donc un analogue de I.33 pour le cas classique.

III.72. PROPOSITION. - <u>Soit</u> A <u>une algèbre de Banach unifère complexe</u>. <u>Alors un élément</u> $a \in A$ <u>est exponentiellement engendré si, et seulement si, la fonction complexe</u> $\exp : Sp\ a \to \exp(Sp\ a) = Sp(\exp a)$ <u>est bijective</u> (i. e. <u>la restriction de</u> exp <u>au spectre</u> $Sp\ a$ <u>de</u> a <u>est injective</u>).

<u>Démonstration</u>. - Supposons d'abord que la condition est satisfaite. La fonction $\exp : \underset{\sim}{C} \to (\underset{\sim}{C} \times \{0\})$ est un morphisme de groupes topologiques avec le noyau discret $2\pi i\underset{\sim}{Z}$. Si $f : G \to H$ est un morphisme des groupes topologiques à noyau discret tel que la restriction de f à un ensemble compact $C \subseteq G$ est injective, alors on trouve un voisinage ouvert U de 1 dans G tel que $f|UC$ soit encore injectif. Alors $\exp$ est injectif sur un voisinage V de $\mathrm{Sp}\, a$; nous pouvons supposer que V est polyédrique et comporte un nombre fini de composantes. La fonction inverse $(\exp|V)^{-1} : \exp V \to V$ est localement holomorphe (et coïncide, en effet, sur chaque composante de V avec une des valeurs de $\log$). Ecrivons $\log = (\exp|V)^{-1}$. Soit maintenant B la sous-algèbre unifère fermée de A engendrée par $\exp a$. Par le calcul fonctionnel sur B (voir par exemple [1], p. 31, ou [5], p. 164), il existe un morphisme d'algèbres $\varphi : H(C) \to B$, où $H(C)$ est l'algèbre des germés de fonctions localement holomorphes sur $\mathrm{Sp}(\exp a)$ tel que $\varphi(f) = f(\exp a)$. On sait que $\varphi(\log) = \log(\exp a) = a$ (voir [5], p. 173). Donc $a \in B$.

Inversement, supposons $a \in B$, et soient c, $c' \in \mathrm{Sp}\, a$ tels que $\exp c = \exp c'$. D'après le calcul fonctionnel, on peut faire correspondre à c, c' deux caractères M, M' de l'algèbre de Banach unifère B. Puisque $\exp a$ engendre B et $a \in B$, alors a engendre B. On a alors $f(c) = M(f(a))$ et $f(c') = M'(f(a))$ quel que soit le germe f d'une fonction localement holomorphe sur $\mathrm{Sp}\, a$. Or, $M(\exp a) = \exp c = \exp c' = M'(\exp a)$. Mais B étant engendré par $\exp a$, on en déduit $M = M'$, donc $c = c'$. On note que la fonction exponentielle complexe est injective sur un ensemble $C \subseteq \underset{\sim}{C}$ si, et seulement si, $(z + 2\pi i\underset{\sim}{Z}) \cap C$ contient au plus un point, quel que soit $z \in \underset{\sim}{C}$. Si A est une algèbre de Banach unifère réelle, considérons l'algèbre complexifiée $\tilde{A} = \underset{\sim}{C} \otimes_{\underset{\sim}{R}} A$. Identifions A avec son image canonique dans $\tilde{A}$.

III.73. COROLLAIRE. - <u>Soit</u> A <u>une algèbre de Banach unifère réelle</u>. <u>Alors</u> $a \in A$ <u>est exponentiellement engendré dans</u> A <u>si, et seulement si, le spectre complexe</u> $\mathrm{Sp}\, a$ <u>de</u> a <u>satisfait la condition de</u> III.66.

<u>Démonstration</u>. - Soit $J : \tilde{A} \to \tilde{A}$ l'involution réelle donnée par $J(c \otimes a) = \bar{c} \otimes a$. Alors $P = \frac{1}{2}(1_{\tilde{A}} + J)$ est une projection continue sur A. Donc, si a peut être approché par des polynômes $p(\exp a)$ en $\exp a$ dans $\tilde{A}$, alors il est approché par des polynômes $P(p(\exp a))$ en $\exp a$ dans A. Donc a est exponentiellement engendré dans A s'il est exponentiellement engendré dans $\tilde{A}$; l'inverse est trivial.

Soit maintenant $d \in \mathfrak{L}(E)$, calculons $\mathrm{Sp}(d \otimes 1 + 1 \otimes d\, ,\, d)$. D'abord

$$\mathrm{Sp}_{\mathfrak{L}(E \hat{\otimes} E)}\, d \otimes 1 = \mathrm{Sp}_{\mathfrak{L}(E)}\, d$$

puisque $(d \otimes 1_E - \lambda . 1_{E \hat{\otimes} E})^{-1}$ existe si, et seulement si, $(d - \lambda . 1_E)^{-1}$ existe (et est égal à $(d - \lambda . 1_E)^{-1} \otimes 1_E$ dans ce cas). Similairement, $\mathrm{Sp}\, 1 \otimes d = \mathrm{Sp}\, d$. Si, dans une algèbre de Banach unifère A, deux éléments a_1 et a_2 commutent, on peut calculer leur spectre par rapport à une sous-algèbre pleine, donc on peut supposer que A est commutative ; alors $\mathrm{Sp}\, a_j = \mathrm{im}\, \mathcal{G} a_j$, où $\mathcal{G}$ est la transformation de Gel'fand. Donc

$$\mathrm{Sp}(a_1 + a_2) = \mathrm{im}\, \mathcal{G}(a_1 + a_2) \subseteq \mathrm{im}\, \mathcal{G}a_1 + \mathrm{im}\, \mathcal{G}a_2 = \mathrm{Sp}\, a_1 + \mathrm{Sp}\, a_2 .$$

Finalement, on a évidemment

$$\mathrm{Sp}_{A_1 \times A_2}(a_1 , a_2) = \mathrm{Sp}_{A_1}\, a_1 \cup \mathrm{Sp}_{A_2}\, a_2 .$$

En considérant toutes ces informations, on trouve le lemme ci-après.

III.74. LEMME. - *Si* E *est un espace de Banach complexe et si* $d \in \mathcal{L}(E)$, *alors*

$$\mathrm{Sp}_{\mathcal{L}(E \hat{\otimes} E) \times \mathcal{L}(E)}(d \otimes 1 + 1 \otimes d , d) \subseteq \mathrm{Sp}_{\mathcal{L}(E)}\, d \cup (\mathrm{Sp}_{\mathcal{L}(E)}\, d + \mathrm{Sp}_{\mathcal{L}(E)}\, d) .$$

Prenant I.36, III.72 et III.73 ensemble, on a le résultat suivant.

III.75. THÉORÈME. - *Soit* E *un espace de Banach réel ou complexe muni d'un produit* (I.35), *et soit* $d \in \mathcal{L}(E)$. *Si* d *est une dérivation, alors* $\exp d$ *est un automorphisme. Si l'ensemble* $D = \mathrm{Sp}\, d \cup (\mathrm{Sp}\, d + \mathrm{Sp}\, d)$ *est tel que* $(z+2\pi i \underset{\sim}{Z}) \cap D$ *contient au plus un point quel que soit* $z \in \underset{\sim}{C}$, *et si* $\exp d$ *est un automorphisme, alors* d *est une dérivation.*

III.76. COROLLAIRE. - *Soit* E *un espace de Banach réel ou complexe muni d'un produit, et soit* $d \in \mathcal{L}(E)$ *tel que* $\mathrm{Sp}\, d$ *est contenu dans une bande*

$$\{z \in \underset{\sim}{C} ; \ -\delta < \mathrm{Im}\, z < -\delta + \pi\} \text{ où } 0 \leq \delta \leq \pi ,$$

alors d *est une dérivation si, et seulement si,* $\exp d$ *est un automorphisme.*

Il est démontré par BOURBAKI dans [2] (§6, n° 9, cor. 2) que, en ce qui concerne les bandes symétriques, III.74 n'est pas optimal ; le résultat persiste si on prend la bande $\{z \in \underset{\sim}{C} ; \ -\frac{2\pi}{3} < \mathrm{Im}\, z < \frac{2\pi}{3}\}$; par contre, III.75 s'applique dans des situations qui ne sont pas couvertes par le résultat de Bourbaki. De toute façon, on a le résultat suivant.

III.77. COROLLAIRE. - *Soit* E *un espace de Banach réel ou complexe, muni d'un produit* (I.35). *Alors* $\mathrm{Aut}(E)$ *est un groupe de Lie linéaire tel que*

$$L(\mathrm{Aut}(E)) = \mathrm{Der}(E) \ \underline{\text{et}} \ \exp_{\mathrm{Aut}(E)} = \exp_{\mathrm{Gl}(E)}|\mathrm{Der}(E) .$$

Démonstration. - Soit B une boule ouverte de $\mathcal{L}(E)$, de centre 0 et de rayon $\pi/4$. Alors $d \in B$ entraîne $\mathrm{Sp}\, d = \{z \in \underset{\sim}{C} ; \ |z| < \pi/4\}$, donc

$$\mathrm{Sp}\, d \cup (\mathrm{Sp}\, d + \mathrm{Sp}\, d) \subseteq \{z \in \underset{\sim}{C} ; \ |z| < \tfrac{\pi}{2}\} .$$

D'après III.70, on sait alors que $d \in \mathrm{Der}(E)$ si, et seulement si, $\exp d \in \mathrm{Aut}(E)$, ce qui entraîne la proposition en tenant compte de III.65.

Le corollaire précédent s'applique en particulier aux cas d'une algèbre de Banach $E = A$ et d'une algèbre de Dynkin $E = L$.

III.78. COROLLAIRE. - Si L est une algèbre de Dynkin, alors la fonction $\operatorname{ad} x : L \to L$ est un élément de $\operatorname{Der}(L)$ quel que soit $x \in L$, et

$$\operatorname{ad} : L \to \operatorname{Der}(L)$$

est un morphisme d'algèbres de Dynkin tel que

$$\|\operatorname{ad}\| = \sup\{\|[x , y]\| \; ; \; \|x\| , \|y\| \leq 1\} \leq 1 ,$$

si on considère sur L une norme unité. On a $\ker \operatorname{ad} = Z_1(L)$ (= centre de L). En particulier $L/Z_1(L)$ est globale.

Démonstration. - Elle se fait par calcul direct et III.55.

Le morphisme ad est appelé la représentation adjointe de L. Son image est notée $\operatorname{Ad}(L)$. Les éléments de $\operatorname{Ad}(L)$ [resp. $\operatorname{Der}(L) \setminus \operatorname{Ad}(L)$] sont les dérivations intérieures [extérieures]. Pour voir que $\operatorname{Ad} L$ n'est pas nécessairement fermé dans $\operatorname{Der}(L)$, considérons l'exemple II.29 : dans L, prenons l'idéal fermé L_0 de tous les $(x_m) \in L$ avec $\lim x_m = 0$. Pour $(a_m) \in L$, avec $a_m = (0 , 1 , 0)$; alors $d = \operatorname{ad}(a_m)$ est une dérivation extérieure sur L_0 ; mais si $u_n \in L_0$ est donné par $u_n = ((0 , e_{mn} , 0))$ avec $e_{mn} = 1$ si $m \leq n$, et $e_{mn} = 0$ autrement, alors

$$(d - \operatorname{ad} u_n)((p_m , q_m , r_m)) = (\tfrac{1}{m} (1 - e_{mn}) r_m , 0 , 0) \leq \tfrac{1}{n} \sup_m r_m ,$$

donc $\lim \operatorname{ad} u_n = d$ dans $\operatorname{Der}(L_0)$.

On peut maintenant utiliser III.62 et III.78 pour démontrer un complément de III.38.

III.79. THÉORÈME. - Soit $f : G \to H$ un morphisme surjectif de groupes de Lie connexes tel que $\pi_1(H)$ soit dénombrable. Alors $\operatorname{im} L(f)$ est dense dans $L(H)$.

Démonstration. - Soit $I = (\operatorname{im} L(f))^-$; alors I est un idéal fermé de $L(H)$ d'après III.62. Appelons A l'image réciproque du centre de $L(H)/I$ par le morphisme-quotient. Alors $L(H)/A$ est global d'après III.78. Donc $A = L(H)$ d'après III.62, i. e. $L(H)/I$ est abélien, donc global. Une deuxième application de III.62 montre que $I = L(H)$.

L'exemple III.40 montre que l'hypothèse sur $\pi_1(H)$ est essentielle.

Si G est un groupe de Lie connexe, le foncteur L induit un morphisme de groupes injectif $L^G : \operatorname{Aut} G \to \operatorname{Aut} L(G)$, et ce morphisme est bijectif si G est simplement connexe (III.41). Si on munit $\operatorname{Aut} G$ de la topologie qui fait de L^G un homéomorphisme sur son image, alors $\operatorname{Aut} G$ est un groupe de Lie si G est simplement connexe tel que

$$L(\operatorname{Aut} G) = \operatorname{Der} L(G) , \quad \exp_{\operatorname{Aut} G} = (L^G)^{-1} \exp_{\operatorname{Aut} L(G)} .$$

Si nous utilisons notre convention de la page 1-22 (précédant 1.38), cela signifie que

$$L^G(\exp_{\mathrm{Aut}\,G}\, d) = e^d \text{ , quel que soit } d \in \mathrm{Der}(L(G)) \text{ .}$$

Soit maintenant G un groupe, alors on a un morphisme $I : G \longrightarrow \mathrm{Aut}\, G$ donné par $I(g)(x) = gxg^{-1}$; l'image $\mathrm{im}\, I$ est appelée $\mathrm{Int}(G)$, et les éléments de $\mathrm{Int}(G)$ [resp. $\mathrm{Aut}\, G \setminus \mathrm{Int}\, G$] sont les <u>automorphismes intérieurs</u> [<u>extérieurs</u>].

III.80. LEMME. - <u>Soit</u> $p_G : \tilde{G} \longrightarrow G$ <u>le revêtement universel d'un groupe de Lie. Alors</u> $f \longmapsto \tilde{f} : \mathrm{Aut}\, G \longrightarrow \mathrm{Aut}\, \tilde{G}$ <u>est un morphisme injectif qui induit une bijection</u> $\mathrm{Int}\, G \longrightarrow \mathrm{Int}\, \tilde{G}$ <u>telle que, si on identifie</u> $L(\tilde{G})$ <u>et</u> $L(G)$, <u>on a</u>

$$L(I(g)^{\sim}) = L(I(g)) \text{ .}$$

<u>Démonstration.</u> - Puisque $\sim$ est un foncteur, le morphisme

$$f \longmapsto \tilde{f} : \mathrm{Aut}\, G \longrightarrow \mathrm{Aut}\, \tilde{G}$$

est bien défini. Si F est un automorphisme de G , alors $F = f$ pour un $f \in \mathrm{Aut}\, G$ proprement choisi si, et seulement si, $F(\ker p_G) = \ker p_G$. Puisque $\ker p_G$ est central, chaque automorphisme $F = I(g)$ intérieur a cette propriété, donc $f \longmapsto \tilde{f} : \mathrm{Int}\, G \longrightarrow \mathrm{Int}\, \tilde{G}$ est surjectif. Si $f_1 = f_2$, alors f_1 coïncide avec f_2 sur un voisinage de 1 , donc $f_1 = f_2$ parce que G est connexe. Donc $\mathrm{Aut}\, G \longrightarrow \mathrm{Aut}\, \tilde{G}$ est injectif et $\mathrm{Int}\, G \longrightarrow \mathrm{Int}\, \tilde{G}$ est bijectif. Si on pose

$$L(\tilde{G}) = L(G) \text{ , } \exp_G = p_G \exp_{\tilde{G}} \text{ ,}$$

prenons $h \in G$ tel que $p_G(h) = g$; alors

$$\begin{aligned} \exp_G L(I(g)^{\sim})(x) &= \exp_G L(I(h))(x) = p_G \exp_{\tilde{G}} L(I(h))(x) \\ &= p_G(I(h)(\exp_{\tilde{G}} x)) = I(g)(\exp_G x) = \exp_G L(I(g))(x) \text{ .} \end{aligned}$$

Le morphisme $g \longmapsto L(I(g)) : G \longrightarrow \mathrm{Aut}\, L(G)$ est appelé la <u>représentation adjointe</u> de G sur $L(G)$; on écrit $\alpha\delta(g) = L(I(g))$. La connexion entre les diverses notions que nous avons introduites est décrite dans le théorème suivant.

III.81. THÉORÈME. - <u>Pour un groupe de Lie connexe</u> G , <u>on a le diagramme commutatif suivant</u> :

$$\begin{tikzcd}
L(G) \arrow[rr, dashed, "\mathrm{ad}"] \arrow[d, "\exp_{\tilde{G}}"'] \arrow[ddr, "\exp_G"] & & \mathrm{Ad}(L(G)) \arrow[rrrr, dashed, hook] \arrow[d] & & & & \mathrm{Der}(L(\;)) \arrow[d, "d \longmapsto e^d"] \\
\tilde{G} \arrow[rr, "I_{\tilde{G}}"] \arrow[dr, "p_G"'] & & \mathrm{Int}(\tilde{G}) \arrow[rr, dashed, hook] & & \mathrm{Aut}(\tilde{G}) \arrow[rr, dashed, leftrightarrow, "L^{\tilde{G}}"] & & \mathrm{Aut}\, L(G) \\
& G \arrow[rr, "I_G"'] \arrow[urrrrr, dashed, "\alpha\delta"] & & \mathrm{Int}(G) \arrow[rr, dashed, hook] \arrow[ul, "\cong"] & & \mathrm{Aut}(G) \arrow[ul, "\subseteq"'] &
\end{tikzcd}$$

<u>On a les formules suivantes</u> :

(i) $\alpha\delta(\exp_G x) = L^G(I_G(\exp_G x)) = L^{\tilde{G}}(I_G(\exp_G x)^{\sim}) = e^{\mathrm{ad}\, x}$ <u>quel que soit</u> $x \in L(G)$, <u>donc</u> $L(\alpha\delta) = \mathrm{ad}$.

(ii) $\exp_G x \exp_G y \exp_G - x = \exp_G(e^{\mathrm{ad}\, x}\, y)$ <u>quels que soient</u> $x , y \in L(G)$.

Démonstration. - La commutativité du diagramme résulte des discussions précédentes et de la formule (i), et (ii) entraîne (i) d'après les définitions. Reste à démontrer (ii). Soit (B , U) une linéarisation de G suffisamment petite ; alors quels que soient $x , y \in B$, nous avons

$$\exp_G x \exp_G y \exp_G(- x) = \exp_G(x * y * (- x)) = \exp_G(e^{\operatorname{ad} x} y)$$

d'après III.14 (i), et (12) de II (suivant II.5). Donc les sous-groupes à un paramètre $t \longmapsto I(\exp_G x)(\exp_G ty)$ et $t \longmapsto \exp_G t(e^{\operatorname{ad} x} y)$ coïncident pour des t petits, donc sont égaux. Par conséquent, (ii) est valable pour $x \in B$, $y \in L(G)$. Mais puisque

$$e^{\operatorname{ad} nx} = (e^{\operatorname{ad} x})^n = (\alpha\delta(\exp_G x))^n = \alpha\delta((\exp_G x)^n) = \alpha\delta \exp_G nx$$

(d'après III.14 (ii)), la formule (ii) est vraie quels que soient $x , y \in L(G)$.

III.82. COROLLAIRE. - Sous les conditions de III.80, le groupe $\operatorname{Int}(G)$ s'identifie à un sous-groupe faiblement analytique de $\operatorname{Aut} L(G)$ avec un morphisme définissant $f : G/Z_1(G) \longrightarrow \operatorname{Aut} L(G)$, $\operatorname{im} L(f) = \operatorname{Ad}(L(G))$.

Démonstration. - On déduit l'affirmation de la définition III.44 et du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
L(G) \arrow[rr, "\operatorname{ad}"] \arrow[dr] \arrow[dd, "\exp_G"'] & & \operatorname{Ad}(L(G)) \arrow[r, hook] \arrow[dd] & \operatorname{Der}(L(G)) \arrow[dd, "\exp_{\operatorname{Aut}(L(G))}"] \\
& L(G)/Z_1(L(G)) \arrow[ur] \arrow[urr, "L(f)"] \arrow[dd, dashed, "\exp_{G/Z_1(G)}"] & & \\
G \arrow[rr, dashed] \arrow[dr] & & \operatorname{Int}(G) \arrow[r, hook] & \operatorname{Aut}(L(G)) \\
& G/Z_1(G) \arrow[ur] \arrow[urr, "f"'] & &
\end{tikzcd}$$

Ce formalisme nous permet de développer la théorie des produits semi-directs (et même localement semi-directs) de groupes de Lie, nous ommettons ici les détails, mais mentionnons les principaux résultats :

III.83. PROPOSITION.

(a) Soient L , A deux algèbres de Dynkin, et soit $\Phi : A \longrightarrow \operatorname{Der} L$ un morphisme d'algèbres de Dynkin. Alors l'espace vectoriel topologique produit $L \times A$ est une algèbre de Dynkin s'il est muni de l'addition par coordonnées et de la multiplication

$$[(x , a) , (x' , a')] = ([x , x'] + \Phi(a)(x') + \Phi(a')(x) , [a , a']) .$$

(b) Soient N , G deux groupes topologiques, et soit $\varphi : G \longrightarrow \operatorname{Aut} N$ un morphisme tel que $(g\,,\,n) \longmapsto \varphi(g)(n) : G \times N \to N$ soit continu. Alors l'espace produit $N \times G$ est un groupe topologique s'il est muni de la multiplication

$$(n\,,\,g)(n'\,,\,g') = (n\varphi(g)(n')\,,\,gg')\ .$$

L'algèbre de Dynkin sur $L \times A$ est dite produit semi-direct de L et A, et est notée $L \times_{\Phi} A$; le groupe topologique sur $N \times G$ est dit le produit semi-direct de N et G, et est noté $N \times_{\varphi} G$.

III.84. THÉORÈME. - Soient G et N deux groupes de Lie connexes, et soit $\varphi : G \to \mathrm{Aut}(N)$ un morphisme tel que $(g\,,\,n) \longmapsto \varphi(g)(n) : G \times N \to N$ soit continu. Alors $\varphi : G \to \mathrm{Aut}\,N$ définit un morphisme $L \circ \varphi : G \to \mathrm{Aut}\,L(N)$, et donc un morphisme $\Phi = L(L \circ \varphi) : L(G) \to \mathrm{Der}\,L(N)$ donné par

$$e^{\Phi(x)} = L(\varphi(\exp_G x))\ .$$

Le groupe $N \times_{\varphi} G$ est un groupe de Lie avec $L(G \times_{\varphi} N) = L(N) \times_{\Phi} L(G)$ et $\exp_{N \times_{\varphi} G}$ est décrit localement comme suit : La fonction

$$(x\,,\,y) \longmapsto (x\,,\,0) * (0\,,\,y)$$

est définie sur un voisinage ouvert U de $(0\,,\,0)$ dans $L(G) \times L(N)$, et donne un homéomorphisme $\rho : U \to V$ sur un voisinage ouvert V de $(0\,,\,0)$; alors on a

$$\exp_{G \times_{\varphi} N}|V = (\exp_G \times \exp_N) \circ \rho^{-1}\ .$$

Notons qu'ici on a rencontré une situation dans laquelle la fonction exponentielle ne se présente pas directement ; il faut la construire par un raisonnement séparé local, puis par une application de III.21.

On a vu dans le chapitre I (voir p. 1-18, à 1-19) que la construction de l'algèbre enveloppante $U(L)$ d'une algèbre de Lie (discrète) ramène, en un sens, l'étude des algèbres de Lie à celle des algèbres de Lie linéaires. On peut imiter la construction de l'algèbre enveloppante pour les algèbres de Dynkin L munies d'une norme ν telle que $\nu([x\,,\,y]) \leq C\,\nu(x)\,\nu(y)$: Alors l'espace $|L|$ des Banach sous-jacents de L permet de construire, dans la catégorie des espaces de Banach et des contractions comme morphismes, l'algèbre tensorielle $T(|L|)$. Ici l'algèbre tensorielle $T(V)$ d'un espace de Banach V est

$$K.1 \oplus T \oplus (T \hat{\otimes} T) \oplus (T \hat{\otimes} T \hat{\otimes} T) \oplus \ldots ,$$

où $\hat{\otimes}$ désigne le produit tensoriel projectif (introduit dans le chapitre I, § 4, p. 1-11, (15)) et où la somme $W_0 \oplus W_1 \oplus W_2 \oplus W_3 \oplus \ldots$ désigne le coproduit dans la catégorie, c'est-à-dire la ℓ^1-somme comportant tous les $(w_n)_{n=0,1,2,3,\ldots}$ tels que $\sum_{n=0}^{\infty} \|w_n\| < \infty$. En utilisant la propriété universelle du produit tensoriel projectif (voir p. 1-11), on démontre immédiatement la propriété universelle suivante : Quelle que soit la contraction $f : V \to |A|$ de V dans l'espace de Banach sous-jacent d'une algèbre de Banach unifère A, il existe un prolongement, et un seul, en un morphisme (contractif) d'algèbres de Banach unifères

$f : T(V) \longrightarrow A$. Alors si on prend pour $I \subseteq T(|L|)$ l'idéal fermé engendré par $v \otimes w - w \otimes v - [v , w]$, $v , w \in L$, et si on pose $U(L , \nu) = T(|L|)/I$, on a trouvé une algèbre de Banach unifère et un morphisme caractéristique

$$\lambda_L : L \longrightarrow U(L , \nu)$$

(donné par $\lambda(x) = x + I$) tels que, pour chaque morphisme d'algèbres de Dynkin contractif, $f : L \longrightarrow \Lambda A$, où A est une algèbre de Banach et ΛA l'algèbre de Dynkin associée, on trouve uniquement un morphisme contractif d'algèbres de Banach unifères $f' : U(L , \nu) \longrightarrow A$ satisfaisant $f' \lambda = f$. Notons que la construction de $U(L , \nu)$ dépend définitivement du choix d'une norme ν sur L . Mais si L est linéaire, alors il existe sur L une norme ν telle qu'òn a une isométrie $L \longrightarrow \Lambda A$; donc $\lambda_L : L \longrightarrow \Lambda U(L , \nu)$ est nécessairement une isométrie.

On a donc une caractérisation universelle des algèbres de Dynkin linéaires.

III.85. PROPOSITION. - *Soit* L *une algèbre de Dynkin ; les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) L *est linéaire ;*

(2) *Il existe sur* L *une norme* ν *telle que* $\lambda_L : L \longrightarrow \Lambda U(L , \nu)$ *est une isométrie ;*

(3) *Il existe sur* L *une norme* ν *telle que* $\nu_L : L \longrightarrow \Lambda U(L , \nu)$ *est un homéomorphisme sur son image.*

Ces conditions entraînent les deux conditions équivalentes :

(i) *Il existe un monomorphisme* $L \longrightarrow \Lambda A$ *dans* Dyn , *où* A *est une algèbre de Banach ;*

(ii) *Il existe sur* L *une norme* ν *telle que* $\lambda_L : L \longrightarrow \Lambda U(L , \nu)$ *est injectif.*

Nous avons remarqué dans III.55, que chaque algèbre de Dynkin linéaire est globale et, en fait, qu'il suffit pour la globalité de L de trouver une injection dans une algèbre globale (III.55). Par conséquent, si L est une algèbre de Dynkin non globale (III.59), alors $\lambda_L : L \longrightarrow \Lambda U(L , \nu)$ n'est jamais injectif quelle que soit la norme ν sur L . Dans ce cas, l'idéal fermé I de $T(|L|)$ et le sous-groupe vectoriel $|L|$ de $T(|L|)$ ont une intersection non vide. C'est ici qu'on note une divergence des théories discrètes et topologiques des algèbres enveloppantes : on n'a pas de théorème de Birkhoff-Poincaré-Witt précis (I.31) dans le cas topologique.

Le problème suivant se pose alors naturellement.

PROBLÈME. - Trouver, pour une algèbre de Dynkin L , les relations précises entre les propriétés d'être globale et d'avoir un morphisme injectif $\lambda_L : L \longrightarrow \Lambda U(L,\nu)$.

7. Théorie de Lie en dimensions finies.

Les résultats que nous venons de discuter deviennent plus simples, plus élégants et, en plusieurs cas, aussi plus forts dans la situation des dimensions finies. Cela est immédiat pour tous les résultats qui, dans la théorie générale, dépendaient de l'hypothèse de la séparabilité, car nous notons le résultat suivant.

III.86. PROPOSITION. - Si G est un groupe de Lie tel que $\dim L(G) < \infty$, alors G_0 est séparable.

Démonstration. - Cela résulte de III.25 et du fait que chaque espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie est séparable.

La supposition sur la dimension peut s'exprimer aussi en termes purement topologiques.

III.87. THÉORÈME. - Soit G un groupe de Lie. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) La dimension linéaire de $L(G)$ est finie ;

(2) La dimension topologique de G est finie ;

(3) $L(G)$ est localement compact ;

(4) G est localement compact.

Démonstration. - Puisqu'un espace vectoriel topologique sur $\mathbb{R}$ est localement compact si, et seulement si, sa dimension est finie, on voit que $(1) \Leftrightarrow (3)$. Mais G étant localement homéomorphe à $L(G)$, d'après III.14, on a $(1) \Leftrightarrow (2)$ et $(3) \Leftrightarrow (4)$.

REMARQUE. - La question de la dimension topologique est, en général, technique et difficile. Néanmoins, l'espace sous-jacent d'un groupe de Lie est une variété, i. e. il est ou bien localement euclidien, ou bien localement homéomorphe à un espace de Banach de dimension infinie ; donc, dans le premier cas, toutes les notions de dimension topologique donnent le même nombre de dimensions (à savoir la dimension linéaire des systèmes de coordonnées), et dans le deuxième cas, la dimension topologique est toujours infinie par rapport à n'importe quel concept de dimension topologique.

La caractérisation des sous-groupes de Lie (III.30) est alors plus simple.

III.88. THÉORÈME. - Soit G un groupe de Lie. Alors chaque sous-groupe localement compact est un groupe de Lie.

Démonstration. - Elle résulte de II.18 et de III.30.

III.89. COROLLAIRE. - Soit G un groupe de Lie de dimension finie. Alors quel que soit le sous-groupe H , il est un groupe de Lie si, et seulement si, il est fermé.

III.90. COROLLAIRE. - Soit G un groupe de Lie de dimension finie. Alors chaque groupe-quotient de G est un groupe de Lie.

Démonstration. - Elle est une conséquence de III.32 et III.89.

Les sous-groupes analytiques sont caractérisés par un théorème particulièrement puissant, dont la démonstration repose sur des résultats énoncés, mais non démontrés dans le chapitre II.

III.91. THÉORÈME. - Soient G un groupe de Lie, S un sous-groupe tel que $\overline{S}$ soit localement compact donc un groupe de Lie d'après III.88. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

(1) S est faiblement analytique ;

(2) S est analytique ;

(3) S est analytique strict ;

(4) S est connexe par arcs.

Démonstration. - $(1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow (3)$: Conséquence du fait que $\dim L(\overline{S}) < \infty$ (voir III.87, 88 et III.46).

$(1) \Rightarrow (4)$: S est l'image d'un groupe de Lie connexe d'après III.44, qui est toujours connexe par arcs.

$(4) \Rightarrow (2)$: Soit $(B\ ,\ U)$ une linéarisation telle que B satisfait les hypothèses de II.22. Alors $\overline{\Gamma} = \log(U \cap S)$ est un sous-groupe local de B , tel que $\overline{\Gamma}$ est localement compact. D'après II.21, l'algèbre $L_\Gamma \subseteq L(\overline{S})$ (de dimension finie) contient un idéal L_Γ^a tel que la composante connexe par arcs Γ_a de 0 dans Γ est précisément $L_\Gamma^a \cap B$ (III.23). Soit T le sous-groupe analytique de G engendré par L_Γ^a . Puisque T est engendré par $\exp(L_\Gamma^a \cap B) = \exp \Gamma_a \subseteq S$, alors $T \subseteq S$. Réciproquement, si $s \in S$, alors il existe un arc $f : [0\ ,\ 1] \to S$ tel que $f(0) = 1$ et $f(1) = s$. Puisque f est uniformément continu sur son image, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $f(V(x\ ,\ \varepsilon))\ f(x)^{-1} \subseteq U$, quel que soit $x \in [0\ ,\ 1]$, où $V(x\ ,\ \varepsilon) = \{y \in [0\ ,\ 1] :\ |x - y| < \varepsilon\}$. Mais $f(V(x\ ,\ \varepsilon))\ f(x)^{-1} \subseteq U \cap S$, et est connexe par arcs, donc est contenu dans $\exp \Gamma_a \subseteq T$. Il en résulte que, chaque fois que l'on a $f(x) \in T$, alors $f(V(x\ ,\ \varepsilon)) \subseteq T$ aussi. Nous en déduisons que $\{x \in [0\ ,\ 1] :\ f(x) \in T\}$ est à la fois ouvert et fermé, donc, étant non vide, est égal à $[0\ ,\ 1]$. En particulier, $sF(1) \in T$. On voit ainsi $S \subseteq T$, donc $T = S$.

III.92. COROLLAIRE. - Si G est un groupe de Lie de dimension finie, alors un sous-groupe S est analytique (strict) si, et seulement si, S est connexe par arcs, et il y a une bijection $S \longmapsto L[S]$ entre les sous-groupes connexes par arcs S et des sous-algèbres de Lie de $L(G)$.

Les résultats sur le groupe des commutateurs dans le paragraphe 5 se présentent aussi sous une forme plus satisfaisante en dimension finie.

III.93. THÉORÈME. - Soient G un groupe de Lie, et G_j , $j = 1$, 2 , des sous-groupes analytiques stricts qui se normalisent. Supposons que

$$\dim[L[G_1] , L[G_2]] < \infty .$$

Alors le groupe $\langle G_1 , G_2\rangle$ engendré par les commutateurs $\langle g_1,g_2\rangle = g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}$ est analytique strict et $L\langle G_1 , G_2\rangle = [L[G_1] , L[G_2]]$.

Démonstration. - Le sous-groupe analytique S engendré par $[L[G_1] , L[G_2]]$ est strict (III.46), et on sait que $\langle G_1 , G_2\rangle \subseteq S \subseteq \langle G_1 , G_2\rangle^-$ d'après III.66. D'autre part, si C est le plus petit sous-groupe local de G contenant tous les $x_1 * x_2 * (- x_1) * (- x_2)$ avec $x_j \in L[G_j] \cap B$, on sait d'après II.28 que C est un sous-groupe de Lie local tel que $L_C = [L[G_1] , L[G_2]]$.

Mais alors $\exp C \subseteq \langle G_1 , G_2\rangle$, et $\exp C$ engendre S . Donc $S \subseteq \langle G_1 , G_2\rangle$. Nous avons donc démontré l'égalité $S = \langle G_1 , G_2\rangle$.

En particulier, le théorème précédent s'applique au cas d'un groupe de Lie G pour lequel on a $\dim[L(G) , L(G)] < \infty$, si on prend $G_j = G$. Plus généralement, si $\dim[L(G) , L(G)] < \infty$, on peut raisonner par récurrence pour démontrer le corollaire suivant.

III.94. COROLLAIRE. - Soit G un groupe de Lie connexe tel que

$$\dim[L(G) , L(G)] < \infty$$

(ce qui est certainement satisfait si $\dim L(G) < \infty$). Alors les membres de la suite des commutateurs $G^{(n)}$ sont analytiques (stricts) tels que $L[G^{(n)}] = L(G)^{(n)}$. Les membres de la suite décroissante centrale $G^{[n]}$ sont analytiques (stricts) tels que $L[G^{[n]}] = L(G)^{[n]}$. En bref : Le foncteur L conserve les suites de commutateurs et les suites décroissantes centrales des groupes de Lie connexes de dimensions finies.

III.95. COROLLAIRE. - Soit G un groupe de Lie connexe de dimension finie ; alors G est résoluble si, et seulement si, $L(G)$ est résoluble.

L'information est ici plus complète que dans le cas général (remarques suivant III.69). Rappelons que la situation "nilpotent" était totalement clarifiée en utilisant la suite centrale croissante (III.65).

Finalement, on rappelle le théorème de Ado :

III.96. THÉORÈME. - Si L est une algèbre de Lie réelle (ou, plus généralement sur un corps de caractéristique 0), il existe un espace vectoriel V , de dimension finie, tel que L est isomorphe à une sous-algèbre de Lie de $\Lambda\mathfrak{L}(V)$. En particulier, L est linéaire.

III.97. COROLLAIRE. - Chaque algèbre de Dynkin de dimension finie est linéaire, donc globale.

8. Références.

[1] BOURBAKI (N.). - Théories spectrales. - Paris, Hermann, 1967 (Act. scient. et ind., 1332 ; Bourbaki, 32).

[2] BOURBAKI (N.). - Groupes et algèbres de Lie. Chap. 2 et 3. - Paris, Hermann, 1973 (Act. scient. et ind., 1349 ; Bourbaki, 37).

[3] BROWDER (W.). - Homology and homotopy of H-spaces, Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A., t. 46, 1960, p. 543-545.

[4] COMFORT (W. W.). - A survey of cardinal invariants, General Topology and Appl., t. 1, 1971, p. 163-199.

[5] HILLE (E.) and PHILLIPS (R. E.). - Functional analysis and semigroups. - Providence, American mathematical Society, 1957 (American mathematical Society. Colloquium Publications, 31).

[6] ILLUSIE (L.). - Contractibilité du groupe linéaire des espaces de Hilbert de dimension infinie, Séminaire Bourbaki, 17e année, 1964/65, n° 284, 9 p.

[7] KUIPER (N. H.). - The homotopy type of the unitary group of Hilbert space, Topology t. 3, 1965, p. 19-30.

(Texte reçu le 18 mars 1974)

Karl H. HOFMANN
Résidence de l'Ormaille
Pavillon 9
91440 BURES SUR YVETTE