Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Karl H. Hofmann

Théorie directe des groupes de Lie, II

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 27, nº 1 (1973-1974), exp. nº 2, p. 1-16
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1973-1974__27_1_A2_0>

Séminaire DUBREIL
(Algèbre)
27e année, 1973/74, n° 2, 16 p.

7 et 14 janvier 1974

THÉORIE DIRECTE DES GROUPES DE LIE, II.

par Karl H. HOFMANN

Sommaire

1. Rayon de convergence de la série de Campbell-Hausdorff, l'opération locale $(x , y) \longmapsto x * y$.

Pour la théorie algébrique de la fonction exponentielle, exposée dans le chapitre I, les algèbres de Banach fortement ultramétriques rendaient le cadre approprié.

On pourrait appeler ce chapitre II, la "théorie analytique locale de la fonction exponentielle" ; l'accent, ici, est mis sur les algèbres de Banach classiques ou, plus précisément, sur leur analogue dans la catégorie des algèbres de Lie. Cet analogue est introduit dans la définition suivante.

II.1. DÉFINITION. - Une algèbre de Dynkin L (sur K) est une algèbre de Lie topologique complète sur le corps topologique K et qui peut être munie d'une norme $\|.\| : L \to \underset{\sim}{R}^+$, définissant la topologie, telle que les conditions (i), (ii), (iv) de I.1 et la condition

(iii') $$\|[x , y]\| \leq \|x\| \, \|y\|$$

soient satisfaites quels que soient $x , y \in L$, $r \in K$.

Remarquons que toute algèbre de Lie topologique complète est une algèbre de Dynkin s'il existe une norme $|.|$ qui en fait un espace de Banach tel qu'il existe un nombre réel $C > 0$ avec

(iii") $$|[x , y]| \leq C|x| \, |y|$$

pour tous $x , y \in L$. La norme définie par $\|x\| = C|x|$ lui est équivalente, et satisfait (iii'). Nous dirons qu'une norme vérifiant (iii') est une norme unité.

Si A est une algèbre de Banach (associative), alors ΛA est une algèbre de Dynkin. Nous posons la question : Quels éléments $x , y \in L$ peuvent être substitués dans la formule de C.-H. (Campbell-Hausdorff) telle qu'elle a été présentée dans I. 14, en rendant la série infinie convergente dans L ? En fait, cela revient à trouver le rayon de convergence de la série de C.-H., ce que nous définirons maintenant.

II.2. DÉFINITION. - Nous appelons rayon de convergence ρ de la série de C.-H. (I.14 (13)) (par rapport au corps valué K) la borne supérieure dans $\underset{\sim}{R}^+ \cup \{\infty\}$ de l'ensemble des nombres réels $r \geq 0$ tels que la série I.14 (13) converge absolument dans toute algèbre de Dynkin par rapport à une norme unité, si on substitue à ξ, η les éléments x, $y \in L$ avec $\|x\|$, $\|y\| < r$.

Notons au demeurant que ρ dépend du développement particulier de $\xi * \eta$ en somme infinie donnée dans I.14 (13) ; il est concevable qu'un réarrangement de la série change le rayon de convergence. De toute façon, d'après le chapitre I, le rayon de convergence par rapport à un corps K discrètement valué est 1, et, pour le cas classique, sur lequel nous allons nous concentrer pour le reste de ces exposés, nous démontrerons la proposition suivante :

II.3. THÉORÈME. - Soit $K = \underset{\sim}{R}$, ou $K = \underset{\sim}{C}$. Alors

(a) $\rho = \frac{1}{2} \log 2$.

(b) Sur le disque complexe ouvert de rayon $\frac{1}{2} \log 2$, une fonction f est bien définie par $f(0) = 0$ et, autrement, par $f(z) = - z^{-1} \log(2 - e^{2z})$, et f est holomorphe dans ce disque, où il y a donc une fonction primitive F qui est uniquement définie par les conditions $F'(z) = f(z)$ et $F(0) = 0$, et qui a les propriétés suivantes :

(i) Si $F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, alors

$a_m = \sum\{\frac{|c(p_1,q_1,\dots,p_n,q_n)|}{m} : \sum_{k=1}^{n}(p_k+q_k) = m \; ; \; p_k+q_k \geq 1$ pour $k=1,\dots,n\}$ (voir I.14), et

$$\lim \sqrt[m]{a_m} = \frac{2}{\log 2} .$$

En particulier, $a_1 = 2$, $a_2 = \frac{5}{2}$.

(ii) Si L est une algèbre de Dynkin arbitraire munie d'une norme unité, et si x, $y \in L$ sont tels que $\|x\|$, $\|y\| \leq r < \frac{1}{2} \log 2$, alors

$$\|x * y\| \leq F(r) \leq - \log(2 - e^{2r}) .$$

Démonstration. - Dans $\underset{\sim}{Q}[[\zeta]]$, calculons

$$(\exp 2\zeta) - 1 = \sum_{p+q\geq 1} \frac{1}{p!\, q!} \zeta^{p+q}$$

et, par conséquent,

$$- \log(2 - \exp 2\zeta) = - L(1 - \exp 2\zeta) = \sum_{n\geq 1} \frac{((\exp 2\zeta) - 1)^n}{n}$$

$$= \sum \frac{\zeta^{\sum_1^n (p_k+q_k)}}{n \prod_1^n p_k! q_k!} = \sum |c(p_1,q_1,\dots,p_n,q_n)| \, \zeta^{\sum_1^n (p_k+q_k)} , \tag{1}$$

sommé sur $n \geqslant 1$, $p_k + q_k \geqslant 1$, $k = 1 , \ldots , n$, avec les coefficients c de I.14.

Soit I l'opérateur continu sur l'espace de Banach fortement ultramétrique $\underset{\sim}{Q}[[\zeta]]$ donné par $I(\zeta^n) = \zeta^{n+1}/(n+1) = 0 , 1 , 2 , \ldots$ (opérateur "intégration"); on a évidemment $DI = 1$ avec le D de I.7. La série trouvée dans (1) a le facteur ζ ; appelons $\zeta^{-1} \log(2 - \exp 2\zeta)$ la série obtenue par division par ζ . Alors nous trouvons

$$(2) \qquad - I(\zeta^{-1} \log(2 - \exp 2\zeta)) = \sum \frac{|c(p_1,q_1,\ldots,p_n,q_n)|}{\sum_1^n(p_k + q_k)} \zeta^{\sum_1^n(p_k+q_k)} ,$$

sommée comme dans (1).

Regardons maintenant la formule de C.-H. dans I.14. Par récurrence, à partir de II.1 (iii'), on observe

$$(3) \quad \|(\mathrm{ad}\ x)^{p_1} (\mathrm{ad}\ y)^{q_1} \ldots (\mathrm{ad}\ x)^{p_n} (\mathrm{ad}\ y)^{q_n - 1} y\| \leqslant r^{\sum_1^n(p_k+q_k)} \quad \text{si} \quad \|x\|,\|y\| \leqslant r .$$

Par conséquent, la série infinie, obtenue en substituant à ζ le nombre réel r dans (2), est une série majorante terme à terme pour la série infinie qui se présente si on substitue x à ξ et y à η dans I.14 (13), et si on prend la norme dans chaque terme. Nous en déduisons que ρ majore le rayon de convergence au sens classique de la série infinie à une variable (2). Si on pose

$$(4) \qquad F(z) = \sum \frac{|c(p_1 , q_1 , \ldots , p_n , q_n)|\ z^{\sum_1^n(p_k+q_k)}}{\sum_1^n(p_k + q_k)} ,$$

sommée comme dans (1) et (2), on définit une fonction F qui est holomorphe dans un disque ouvert maximum dont le rayon est le rayon de convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ obtenue en réordonnant la série de (4). Si on pose

$$(5) \qquad f(z) = \begin{cases} 0 , & \text{si } z = 0 \\ - z^{-1} \log(2 - e^{2z}) , & \text{si } 0 < |z| < \frac{1}{2} \log 2 , \end{cases}$$

on a $F'(z) = f(z)$. D'après des résultats classiques, f et F sont holomorphes dans le même disque maximum de centre 0 ; en tenant compte de (5), on voit que le rayon de ce disque est $\frac{1}{2} \log 2$. La formule classique pour le rayon de convergence donne $\lim a_m^{1/m} = 2/\log 2$. Si $\|x\|$, $\|y\| \leqslant r < \frac{1}{2} \log 2$, la série pour $F(r)$ dans (4) majore la série pour $x * y$ absolument (comme nous venons de voir), donc $\|x * y\| \leqslant F(r)$. Lorsque tous les coefficients des développements de $F(z)$ et de $f(z) = F'(z)$ sont positifs, nous avons $F(r) \leqslant rf(r)$ pour $0 \leqslant r$.

Il reste à démontrer que $\rho \leqslant \frac{1}{2} \log 2$. Nous achevons cette démonstration en choisissant une algèbre de Dynkin L spéciale, et en trouvant une série minorante pour la série obtenue en prenant les normes de tous les termes de la série de C.-H. Pour L , nous prenons $\underset{\sim}{R}^3$ (ou $\underset{\sim}{C}^3$) par rapport à la norme euclidienne et une base orthonormée e_1 , e_2 , e_3 , en posant

$$[e_j , e_{j+1}] = e_{j+2} , \qquad j = 1 , 2 , 3 \pmod 3 .$$

Si nous choisissons $\bar{x} = e_1$, $\bar{y} = e_2$, nous observons

$$(\mathrm{ad}\,\bar{x})^{p_1}\,(\mathrm{ad}\,\bar{y})^{q_1}\,\ldots\,(\mathrm{ad}\,\bar{x})^{p_n}\,(\mathrm{ad}\,\bar{y})^{q_n-1}\,\bar{y} \in \pm\,\{0\,,\,e_1\,,\,e_2\,,\,e_3\}\,,$$

donc la norme de cet élément est 0 ou 1 ; en fait elle est nulle si, et seulement si, $\overline{\xi^{p_1}\,\eta^{q_1}\,\ldots\,\xi^{p_n}}\,\eta^{q_n} = 0$ (I. 14).

Posons $x = r\bar{x}$, $y = r\bar{y}$ avec $r > \frac{1}{2}\log 2$. La série qui se présente, si on développe $x * y$ selon I.14 (13) et si on prend la norme dans chaque terme, comporte au moins les termes suivants :

$$\text{(6)}\qquad \frac{|c(p_1,q_1,\ldots,p_{n-1},q_{n-1},1,1)|\,r^{d+2}}{d+2}\,,\quad d = \textstyle\sum_1^{n-1}(p_k+q_k)\,,$$

$$n = 1,2,\ldots\ ;\quad p_k+q_k \geq 1 \quad \text{pour} \quad k = 1,\ldots,n-1\,.$$

Ces termes sont égaux aux expressions

$$\text{(7)}\qquad \frac{|c(p_1\,,\,q_1\,,\ldots,\,p_{n-1}\,,\,q_{n-1})|\,r^d}{d}\cdot\frac{d(n-1)r^2}{(d+2)n}\ ;$$

pour $n > 1$, on a toujours $(d(n-1)r^2)/((d+2)n) \geq r^2/4$.

Mais la série

$$\sum \frac{|c(p_1\,,\,q_1\,,\ldots,\,p_m,\,q_m)|\;r^{\sum_1^m(p_k+q_k)}}{\sum_1^m(p_k+q_k)}$$

sommée sur $m = 1\,,\ldots,$ $p_k + q_k \geq 1$, $k = 1\,,\ldots,\,m$ diverge parce que la série dans (4) a le rayon de convergence $1/2\,\log 2$. Donc la série des normes des termes de la série de $x * y$ diverge. Donc $\rho \leq r$. Puisque r était arbitraire, satisfaisant $r > \frac{1}{2}\log 2$, on a démontré $\rho \leq \frac{1}{2}\log 2$.

PROBLÈME. - Si on utilise, pour la définition du rayon de convergence de la série C.-H., la formule I.14 (14) ou I.14 (13), est-ce qu'on trouve le même rayon ou un rayon plus grand ?

Définissons un nombre positif c par

$$\text{(8)}\qquad F(c) = -\int_0^c t^{-1}\log(2-e^{2t})\,dt = \frac{1}{2}\log 2\,.$$

Lorsque $F(r) < -\log(2-e^{2r})$ pour $0 < r$ d'après II.3, on en déduit

$$\text{(9)}\qquad \frac{1}{2}\log\!\left(2-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) < c < \frac{1}{2}\log 2\ ;$$

et on a le lemme suivant.

II.4. LEMME. - Si $\|x\|$, $\|y\| < c$, alors $\|x * y\| < \frac{1}{2}\log 2$.

Donc si $\|x\|$, $\|y\|$, $\|z\| < c$, la série que nous obtenons à partir de la série formelle $(\xi * \eta) * \zeta \in \mathbb{Q}[[\xi\,,\,\eta\,,\,\zeta]]$, en substituant x , y , z à ξ , η , ζ , respectivement est absolument convergente ; le même raisonnement s'applique à $\xi * (\eta * \zeta)$. Mais on a $(\xi * \eta) * \zeta = \xi * (\eta * \zeta)$ d'après I.(14) 1°. Puisque les séries absolument convergentes dans un espace de Banach peuvent être réordonnées sans modification de leur somme, nous obtenons la proposition suivante.

II.5. PROPOSITION. - <u>Soit</u> c <u>le nombre positif donné par</u> (8), <u>et soit</u> B <u>la boule ouverte de centre</u> 0 <u>et de rayon</u> c <u>dans une algèbre de Dynkin arbitraire munie d'une norme unité</u>. <u>Alors, pour</u> $(x , y , z) \in B^3$, <u>les produits</u> $x * (y * z)$ <u>et</u> $(x * y) * z$ <u>sont bien définis et coïncident</u>.

Par un raisonnement similaire, on déduit de la proposition I. 41 que

$$a * x * (- a) = e^{\mathrm{ad}\ a}\ x$$

quels que soient $x , a \in B$.

Nous venons de voir que chaque algèbre de Dynkin (classique) possède des ensembles convexes ouverts équilibrés B qui vérifient les conditions suivantes :

(10) L'opération $* : B \times B \longrightarrow L$ est bien définie par la formule de C.-H., et est continue.

(11) $x , y , z \in B$ entraîne que $(x * y) * z$ et $x * (y * z)$ existent et sont égaux. De plus, $x * 0 = 0 * x = x$, $(- x) * x = x * (- x) = 0$.

(12) Quels que soient $x , a \in B$, on trouve $a * x * (- a) = e^{\mathrm{ad}\ a}\ x$. Il est facile d'ajouter :

(13) Si $x \in L$ et si n est un nombre naturel tel que $nx \in B$, alors la n-ième puissance de x par rapport à $*$ est bien définie et coïncide avec nx .

Un tel ensemble B , muni de la multiplication $*$ prenant ses valeurs dans L , sera appelé <u>un groupe local associé à</u> L .

Il est évident que la classe des algèbres de Dynkin (classiques) devient une catégorie Dyn si on la munit des morphismes continus d'algèbre de Lie. Si $f : L_1 \to L_2$ est un morphisme et si $B_1 \subseteq L_1$, $B_2 \subseteq L_2$ sont des groupes locaux associés tels que $\mathrm{Dyn}(B_1) \subseteq B_2$, alors on a visiblement $f(x * y) = f(x) * f(y)$ d'après la définition de l'opération locale $*$. Les $\mathfrak{L}$-morphismes induisent ainsi des morphismes de groupes locaux.

2. Groupes et sous-groupes locaux.

La question centrale qui se pose sur des groupes locaux associés à une algèbre de Dynkin est dans quelle mesure la structure d'un groupe local $(B , *)$ associé à L détermine la structure de L (l'inverse étant évident). Si l'on rappelle que

$$x * y = x + y + \frac{1}{2} [x , y] + \sum_{n=3}^{\infty} p_n(x , y) \quad \text{pour} \quad x , y \in B ,$$

où $p_n(x , y)$ est un polynôme (de Lie) homogène de degré n , on trouve facilement la réponse affirmative exprimée dans la proposition suivante.

II.6. PROPOSITION. - <u>Soit</u> L <u>une algèbre de Dynkin sur</u> $\underset{\sim}{R}$. <u>Si une suite</u>

$$(x_n , y_n , m_n) \in L \times L \times \underset{\sim}{N}$$

<u>satisfait aux conditions</u> :

(i) $(0\,,\,0) = \lim(x_n\,,\,y_n)$,

(ii) $(x\,,\,y) = \lim(m_n\,x_n\,,\,m_n\,y_n)$,

alors on a

(14) $$x + y = \lim m_n(x_n * y_n)\ ,$$

(15) $$[x\,,\,y] = \lim m_n^2(x_n * y_n * (-x_n) * (-y_n))\ .$$

Pour $x\,,\,y \in L$ on peut choisir $x_n = (1/n)x$, $y_n = (1/n)y$, $m_n = n$. En particulier, la structure d'algèbre de Lie est uniquement déterminée par la donnée d'un groupe local associé à L .

Notons que les éléments $x_n * y_n$ et $x_n * y_n * (-x_n) * (-y_n)$ sont toujours bien définis pour n assez grand, en tenant compte de (i). Si $x + y$ est même contenu dans un groupe local B , les termes $m_n(x_n * y_n)$ sont entièrement exprimés par le produit local d'après (13), si n est assez grand. Remarquons aussi que (14) fixe la multiplication scalaire par des nombres entiers, donc par des nombres rationnels, donc, finalement, par des nombres réels (tenant compte de la continuité de la multiplication scalaire dans L). Une multiplication scalaire complexe ne pourrait pas être retrouvée de cette manière, d'où l'hypothèse sur le corps de base.

Considérons maintenant les sous-groupes locaux.

II.7. DÉFINITION. - Soit B un groupe local associé à une algèbre de Dynkin. Une partie G de B est nommée un sous-groupe local de B si

(i) $-G = G$.

(ii) $(G * G) \cap B \subseteq G$.

On dit que G est fermé si G est fermé dans B , autrement dit si

(iii) $\overline{G} \cap B = G$.

Par récurrence, en utilisant (13), on constate :

(16) Si G est un sous-groupe local de B tel que $nx \in B$, avec $x \in G$ et un entier n , alors $nx \in G$.

Il est facile de découvrir des exemples : si S est une sous-algèbre de Lie fermée de L , alors $B \cap S$ est un sous-groupe local fermé de B . On discute dans les numéros suivants dans quel sens inversement, un sous-groupe local fournit une sous-algèbre fermée de L .

II.8. THÉORÈME. - Soit G un sous-groupe local d'un groupe local B associé à une algèbre de Dynkin L . Pour un élément $x \in L$, les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) [resp. (i')] $\mathbb{R}x \cap B = \mathbb{R}x \cap \overline{G} \cap B$ [resp. $\mathbb{R}^+ x \cap B = \mathbb{R}^+ x \cap \overline{G} \cap B$] .

(ii) $\frac{1}{n} x \in \overline{G}$ pour n assez grand.

(iii) *Il y a une suite* $x_n \in G$ *telle que* $x = \lim n\, x_n$.

(iv) [resp. (v)] . *Il y a une suite* $x_n \in G$ [resp. $x_n \in \overline{G}$] *telle que* $\lim x_n = 0$, *et une suite* $m_n \in \underset{\sim}{N}$ *telle que* $x = \lim m_n\, x_n$.

Démonstration.

(i) et (i') sont visiblement équivalents d'après II.7 (i).

(i) $\Rightarrow$ (ii) est trivial.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Choisissons $x_n \in G$ tel que $\|x_n - \frac{1}{n}x\| < \frac{1}{n^2}$ (par rapport à une norme compatible de L), donc $\|x - nx_n\| < \frac{1}{n}$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Prenons $m_n = n$, et notons $n\|x_n\| \leq \|x\| + 1$ pour n assez grand.

(iv) $\Rightarrow$ (v) est trivial.

Reste à voir (v) $\Rightarrow$ (i'). Soit donc $t \in \underset{\sim}{R}^+$ tel que $tx \in B$; il faut montrer que $tx \in \overline{G}$. Soit, comme d'habitude, $[r]$ le plus grand nombre entier majoré par le nombre réel r . Alors

$$0 \leq [tm_n] \leq tm_n < [tm_n] + 1 ,$$

puis

$$0 \leq t - [tm_n]/m_n < 1/m_n .$$

Evidemment on peut supposer que $x \neq 0$, donc $x_n \neq 0$; par conséquent, la suite m_n n'est pas bornée, donc $t = \lim [tm_n]/m_n$. Puisque

$$tx - [tm_n]x_n = t(x - m_n x_n) + (t - [tm_n]/m_n)(m_n x_n) ,$$

on conclut :

(a) $tx = \lim [tm_n]\, x_n$ quel que soit $t \geq 0$ avec $tx \in B$. Puisque B est ouvert, $[tm_n]x_n \in B$ pour tout n suffisamment grand, on déduit du (16) ci-dessus que :

(b) $[tm_n]x_n \in G$ pour t comme dans (a) et tous n grands. Mais (a) et (b) entraînent $tx \in \overline{G}$.

II.9. THÉORÈME. - *Soit* G *un sous-groupe local d'un groupe local* B *associé à une algèbre de Dynkin* L , *réelle. Alors l'ensemble* L_G *de tous les* $x \in L$ *qui satisfont les conditions équivalentes du théorème* II.8 *est une sous-algèbre de Lie fermée de* L . *On a*

$$L_G \cap B = \{g \in \overline{G} \cap B : (-1,1)\, g \subseteq \overline{G}\} .$$

Si, de plus, G *est fermé et équilibré* (i. e. $(-1,1)G = G = \overline{G} \cap B$), *alors on a* $L_G \cap B = G$.

Démonstration.

(a) L_G est fermée : c'est une conséquence assez directe de I.8 (i).

(b) L_G est stable pour la multiplication par des scalaires réels : Facile à déduire de II.8 (i).

(c) L_G est stable pour l'addition et la multiplication de L : Soient $x, y \in L_G$, donc $x = \lim nx_n$, $y = \lim ny_n$ avec $x_n, y_n \in G$ d'après II.8 (iii). On a $x_n * y_n \in G$ pour n grand, suivant II.7 (ii). Donc la formule (14) de II.6 $x + y = \lim n(x_n * y_n)$ montre que $x + y \in L_G$, d'après II.8 (iii). On traite $[x, y]$ d'une façon tout à fait analogue.

(d) Les dernières affirmations résultent de II.8 (i).

II.10. DÉFINITION. - Appelons L_G (de II.9) l'<u>algèbre de Lie associée au sous-groupe local</u> G de B. L'ensemble $G_* = L_G \cap G = \{g \in G \; ; \; [-1, 1]g \subseteq G\}$ est appelé la <u>composante équilibrée de</u> G ; soient G_a la <u>composante connexe par arcs de</u> 0 <u>dans</u> G, et G_0 la <u>composante connexe</u> de 0 dans G. Nous appelons G <u>un sous-groupe local de Lie</u> si G est fermé et G_* est ouvert dans G. Nous disons que G est <u>astellaire</u> si $G_* = \{0\}$ (Donc G est un sous-groupe local de Lie connexe si, et seulement si $G = L_G \cap B$).

Si G est fermé, alors $G_* = L_G \cap B$ (II. 9), donc est un sous-groupe local fermé de B. Il est facile de voir que G_a et G_0 sont toujours des sous-groupes locaux de B. Evidemment, on a $G_* \subseteq G_a \subseteq G_0 \subseteq G \subseteq B$. Il peut arriver que toutes les inclusions dans cette suite soient strictes. Indiquons un exemple qui illustre bien le cas de la première inclusion.

II.11. EXEMPLE. - Soit $L = L^2([0, 1], \lambda)$ l'espace de Hilbert des (classes de) fonctions réelles de carré intégrable sur $[0, 1]$ par rapport à la mesure de Lebesgue λ ; alors L est une algèbre de Dynkin abélienne relative au produit $[f, g] = 0$. Soient r un nombre positif, et A le sous-groupe additif de L de toutes les (classes de) fonctions f telles que $f([0, 1]) \subseteq r\underset{\sim}{Z}$. Evidemment A est fermé, et le seul sous-espace vectoriel de A est $\{0\}$. Pour $t \in [0, 1]$, soit T_t l'opérateur continu donné par $(T_t f)(s) = f(s)$ si $s \in [0, t]$ et $= 0$ si $s \in]t, 1]$. La fonction $t \longmapsto T_t$ est continue pour la topologie forte (topologie de la convergence simple) sur l'espace des opérateurs continus de L, car

$$\|T_t f - T_s f\|^2 \leq \int_s^t |f|^2 \, d\lambda \quad \text{pour} \quad 0 \leq s \leq t \leq 1 .$$

Tous les opérateurs T_t laissent stable A et chaque boule B de centre 0. Mais $t \longmapsto T_t f : [0, 1] \to L$ est un arc. Donc A est un sous-groupe connexe par arcs de L sans sous-espace vectoriel non dégénéré, et si on pose $G = A \cap B$, alors G est un sous-groupe local du groupe local B associé à L tel que $G_* = \{0\}$, $G_a = G_0 = G$ (donc est astellaire, mais connexe par arcs).

On connait des sous-groupes denses connexes de $\underset{\sim}{R}^2$ qui sont totalement disconnexes par arcs ; donc on peut aussi avoir $G_a = 0 \neq G_0$. On note que, d'après II. 8, II. 10, on a $L_G = L_{\overline{G \cap B}}$, et $L_G = L_{G_*} = L_{G_a} = L_{G_0}$ si G est fermé. De plus, si $\mathcal{U}$ est un voisinage convexe équilibré arbitraire de 0, on sait que $L_G = L_{G \cap \mathcal{U}}$; donc L_G est bien un concept "de caractère local".

Si A est une sous-algèbre d'une algèbre de Lie L , alors il existe une sous-algèbre maximum contenant A dans laquelle A est un idéal, appelée idéalisateur $I(A, L)$ de A dans L ; en fait

$$I(A, L) = \{x \in L : (\mathrm{ad}\, x)(A) \subseteq A\} . \tag{17}$$

Si L est une algèbre de Dynkin et A une sous-algèbre fermée, alors l'idéalisateur de A est aussi fermé. Pour la caractérisation de l'idéalisateur, il est bon de faire appel au lemme suivant.

II.12. LEMME. - Si L est une algèbre de Dynkin et V un sous-espace vectoriel fermé, alors $(\mathrm{ad}\, x)(V) \subseteq V$ entraîne $e^{\mathrm{ad}\, x}(V) \subseteq V$, et si $\|x\| < \log 2$ est relatif à une norme unité, les deux relations sont équivalentes.

Démonstration. - Si T est un opérateur continu de l'espace vectoriel topologique sous-jacent de L , alors $e^T(V) \subseteq V$ est visiblement une conséquence de $T(V) \subseteq V$. Si on considère une norme compatible sur L telle que $\|T\| < \log 2$ pour la norme d'opérateur, on note que

$$\|e^T - 1\| \leq e^{\|T\|} - 1 < e^{\log 2} - 1 = 2 - 1 = 1 ,$$

donc $T = L(e^T - 1)$ (tenant compte de I.8 (a) et de la convergence absolue des séries qui interviennent). Puis la relation

$$e^T(V) \subseteq V \quad \text{entraîne} \quad (e^T - 1)(V) \subseteq V ,$$

donc $T(V) \subseteq V$. Si on prend, finalement, une norme unité de L , alors $\|x\|<\log 2$ entraîne $\|\mathrm{ad}\, x\| < \log 2$, ce qui permet d'appliquer le raisonnement précédent avec $T = \mathrm{ad}\, x$.

II.13. PROPOSITION. - Soient L une algèbre de Dynkin et B un groupe local associé à L tel que, relativement à une norme unité, le rayon de B soit $< \log 2$. Si $x \in L$ et si A est une sous-algèbre fermée, alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $x \in I(A, L)$.

(ii) Il existe un $t \neq 0$ tel que $tx \in B$ et $\exp(t\, \mathrm{ad}\, x)(A) \subseteq A$.

(iii) Il existe un $t \neq 0$ tel que $tx \in B$ et $(tx) * (A \cap B) * (-tx) \subseteq A$.

(iv) Quel que soit t tel que $tx \in B$, on a $\exp(t\, \mathrm{ad}\, x)(A) \subseteq A$.

(v) Quel que soit t tel que $tx \in B$, on a $(tx) * (A \cap B) * (-tx) \subseteq A$.

Démonstration. - D'après (12), on sait que (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) et (iv) $\Longleftrightarrow$ (v) ; le lemme II. 12 montre que (i) $\Rightarrow$ (iv) et (ii) $\Rightarrow$ (i) (en tenant compte de (17)), (iv) $\Rightarrow$ (ii) est trivial.

II.14. COROLLAIRE. - Soit B un groupe local associé à une algèbre de Dynkin L , tel que rayon $B < \log 2$ par rapport à une norme unité, et soit G un sous-groupe local de B . Alors $G \subseteq I(L_G, L)$; notamment, si A est la sous-algèbre de Lie *fermée associée à* G , *alors* L_G *est un idéal de* A .

Démonstration. - Soient $g \in G$ et $x \in L_G$. Il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $0 \leq s \leq \varepsilon$ entraîne $g * sx * (-g) \in \overline{G} \cap B$, parce que $sx \in \overline{G} \cap B$ pour s assez petit, d'après II. 8 (i'), et $\overline{G} \cap B$ est un sous-groupe local. Donc

$$s(e^{\mathrm{ad}\, g}\, x) = e^{\mathrm{ad}\, g}(sx) = g * (sx) * (-g) \in \overline{G} \quad \text{quel que soit} \quad 0 \leq s \leq \varepsilon ,$$

tenant compte de (12). Puis $e^{\mathrm{ad}\, g}\, x \in L_G$ d'après II.8 (ii). Cela montre que $e^{\mathrm{ad}\, g}(L_G) \subseteq L_G$, donc $g \in I(L_G , L)$ d'après II.13.

Si maintenant G est fermé, donc $L_G \cap B \subseteq G$, alors II.14 et II.13 montrent que le sous-groupe local $L_G \cap B$ est "normal" dans G ; le résultat suivant indique comment on peut former un "quotient de sous-groupes locaux".

II.15. THÉORÈME. - *Soient* L *une algèbre de Dynkin,* B *et* C *deux sous-groupes locaux associés tels que* $C * C \subseteq B$. *Soit* G *un sous-groupe local fermé de* B , *alors on a les conclusions suivantes* :

(i) $(g + L_G) \cap C = (g * (L_G \cap B)) \cap C$ $[\subseteq G]$ *quel que soit* $g \in C$ [resp. $g \in G \cap C$] .

(ii) *Soit* $I = I(L_G , L)$ *l'idéalisateur de* L_G *dans* L , *alors* $G \subseteq I$.

Si $p : I \to I/L$ *est le morphisme canonique d'algèbres de Dynkin, et si on pose* $H = p(G \cap C)$, $D = p(C)$, *on a* $H = p(G) \cap D$, *et* H *est un sous-groupe local fermé de* D *qui est astellaire* (i. e. qui satisfait à $L_H = \{0\}$).

REMARQUE. - Evidemment, H joue le rôle d'un quotient de G par rapport au sous-groupe local distingué $L_G \cap B$. Puisque H est astellaire, on note que les algèbres de Lie ne rendent que des informations structurelles pour le sous-groupe local $L_G \cap B$; après la factorisation de ce sous-groupe local, ce qui reste ne peut plus se ramener à une analyse en termes d'algèbres.

Démonstration. - On a déjà vu que $G \subseteq I$ (II.14), donc $p : I \to I/L$ est bien défini, et, pour des éléments $x , y \in I$ assez petits, on a $p(x * y) = p(x) * p(y)$ donc $p(g * (L_G \cap B)) = p(g)$, d'où

$$(g * (L_G \cap B)) \cap C \subseteq (g + L_G) \cap C ;$$

si $c = g + a \in C$, $a \in L_G$, on pose $x = (-g) * c \in B$ et on trouve

$$p(x) = p(-g) * p(c) = p(-g) * p(g) = 0 ,$$

donc $x \in L_G$, d'où l'inclusion inverse. Cela démontre (i). Evidemment $H \subseteq p(G) \cap D$; inversement, soit $g + L_G \in p(G) \cap D$, $g \in G$; alors il existe $y \in C$ tel que $g + L_G = y \in L_G$, donc $y \in (g + L_G) \cap C \in G \cap C$ d'après (i). Donc

$$g + L_G \in p(G \cap C) = H .$$

Pour vérifier que H est un sous-groupe local de D , on note d'abord que $-H = H$; puis soient $u , v \in H$ tels que $u * v \in D$; il faut montrer que $u * v \in H$: alors on trouve $x , y \in G \cap C$ tels que $u = p(x)$, $v = p(y)$; donc

$$x * y \in (G \cap C) * (G \cap C) \subseteq (G * G) \cap B \subseteq G ,$$

parce que G est un sous-groupe local. On trouve ainsi que

$$u * v = f(x * y) \in p(G) \cap D = H .$$

Pour voir que H est fermé, soit $q \in \overline{H} \cap D$; donc il y a un $x \in C$ tel que $q = x + L_G$. Soit U un voisinage ouvert de x arbitraire tel que $U \subseteq C$; puisque p est ouvert, on a $p(U) \cap H \neq \emptyset$, donc

$$(U + L_G) \cap (G \cap C) \neq \emptyset .$$

Puis on trouve $w \in U$, $a \in L_G$ tel que $g = w + a \in G \cap C$, donc

$$w = g - a \in (g + L_G) \cap C \subseteq G \quad \text{(d'après (i))}.$$

Donc $U \cap G \neq \emptyset$ quel que soit le voisinage U de x suffisamment petit ; puisque G est fermé dans B cela entraîne $x \in G$. Donc $x \in G \cap C$, d'où $q=p(x) \in H$.
Finalement, démontrons que H est astellaire. Soit $q \in L_H$. Alors $q = x + L_G$ pour un x convenablement choisi. D'après II.8, on a $\frac{1}{n} u \in H$ et $\frac{1}{n} x \in C$ pour tous n suffisamment grands, donc

$$(\frac{1}{n} x + L_G) \cap (G \cap C) \neq \emptyset .$$

Puis on trouve des éléments $y_n \in L_G$ tels que $g_n = \frac{1}{n} x + y_n \in G \cap C$, donc

$$\frac{1}{n} x = g_n - y_n \in (g + L_G) \cap C \subseteq G .$$

Par conséquent, $\frac{1}{n} x \in G$ pour n suffisamment grand, donc $x \in L_G$ d'après II.8.
Ainsi $q = p(x) = 0$.

On voit sans peine qu'un sous-groupe local H est discret si, et seulement si, 0 est isolé dans H . Il n'est pas compliqué de déduire de cette observation, et du théorème précédent, une caractérisation utile des sous-groupes locaux, qu'on peut compléter par une remarque suivante du théorème de Baire.

II.16. COROLLAIRE. - Sous les conditions du théorème II.15, les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) G est un sous-groupe local de Lie.

(ii) 0 est isolé dans H .

(iii) H est discret.

(iv) H est un sous-groupe local de Lie.

Si H est dénombrable, ces conditions sont satisfaites.

3. Sous-groupes locaux localement compacts.

Nous avons vu dans l'exemple II.11 qu'il existe des sous-groupes locaux astellaires connexes. Si on se restreint aux sous-groupes locaux qui sont localement compacts, cette pathologie s'évanouit.

II.17. PROPOSITION. - Soient L une algèbre de Dynkin, B un groupe local associé, et G un sous-groupe local astellaire de B. Alors G est localement compact si, et seulement si, G est discret. En particulier si $\dim L < \infty$, alors G est discret.

Démonstration. - Cette condition est évidemment suffisante. Montrons qu'elle est nécessaire. Il suffit de démontrer que 0 est isolé. Sinon, on a une suite d'éléments $g_n \in G$, $g_n \neq 0$, $\lim g_n = 0$. Soit V un voisinage compact de 0 dans G. Soit $m(n)$ le plus grand entier tel que $g_n, 2g_n, \ldots, m(n)\, g_n \in V$. Puisque V est compact, on peut supposer (après avoir choisi une sous-suite convergente convenable) que $g = \lim m(n)\, g_n$ existe dans V. D'après II.8, on sait que cela entraîne $g \in L_G$, donc $g = 0$ parce que G est astellaire. Mais

$$(m(n) + 1)g_n \notin V ,$$

donc

$$0 = \lim m(n)\, g_n = \lim(m(n) + 1)g_n \notin \text{ intérieur de } V ,$$

ce qui est une contradiction.

Si $\dim L < \infty$, alors $\overline{G} \cap B$ est localement compact et astellaire, donc discret ; alors G est discret.

On démontre d'une manière directe qu'un sous-groupe local localement compact d'un groupe local est fermé dans ce groupe local. En conjonction avec II.16 et II.17, cela permet la conclusion suivante.

II.18. THÉORÈME. - Soient L une algèbre de Dynkin, B un groupe local associé, et G un sous-groupe local localement compact de B. Alors G est un sous-groupe local de Lie, et $\dim L_G < \infty$.

Naturellement, il y a des groupes locaux qui ne sont pas localement compacts : chaque espace de Banach de dimension infinie en donne un exemple. D'autre part, si G est un sous-groupe local de Lie tel que $\dim L_G < \infty$, alors G est localement compact. Si on combine les résultats de II.16-18, on trouve,

II.19. COROLLAIRE. - Soient une algèbre de Lie réelle de dimension finie (donc une algèbre de Dynkin), B un groupe local associé, et G un sous-groupe local de B. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) G est un sous-groupe local de Lie.

(ii) G est fermé dans B.

(iii) G est localement compact.

(iv) $G_* = G_0$.

(v) $G_* = G_a$.

(vi) $L_G \cap B \subseteq G$.

Cette proposition donne, pour le cas de dimensions finies, une caractérisation des sous-groupes locaux de Lie par des concepts purement topologiques. On a une caractérisation alternative, sans l'hypothèse que G soit fermé ; son esprit est analogue mais son exécution est plus difficile dans les détails, bien que le niveau des raisonnements soit celui de la topologie générale (avec l'exception du théorème de Brouwer sur les points fixes et le théorème des fonctions implicites). Indiquons sans donner les démonstrations les résultats principaux dans le paragraphe suivant.

4. Sous-groupes locaux connexes par arcs.

II.20. THÉORÈME. - Soient L une algèbre de Dynkin munie d'une norme unité, B un groupe local associé d'un rayon $r < \frac{1}{2} \log 2$, et soit G un sous-groupe local de B. Pour un sous-ensemble X de L contenant 0, appelons X_a la composante connexe par arcs de 0 dans X. Soit $B(r)$ la boule ouverte de rayon r et de centre 0. Alors, pour un élément $x \in L$, les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) Il y a une suite $x_n \in (G \cap B(2\|x\|/n))_a$ telle que $x = \lim nx_n$.

(ii) Il y a une suite de nombres naturels m_n, de nombres positifs t_n et d'éléments $x_n \in (G \cap B(t_n))_a$ telles que $\lim t_n = 0$ et $x = \lim m_n x_n$.

(iii) Quel que soit $s > 0$ tel que $\|x\| \leq r/2s$, on a $cx = \lim m_n x_n$ pour des suites d'entiers positifs m_n et des $x_n \in (G \cap B(t_n))_a$ avec une suite convenable $t_n > 0$ telle que $\lim t_n = 0$.

(iv) Quel que soit $s > 0$ tel que $\|x\| \leq r/2s$ et quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un arc $h : [0 , 1] \to G$ tel que $\|h(t) - tsx\| < \varepsilon$ pour tous $t \in [0,1]$.

Si, de plus, G est un sous-groupe local fermé de B, ces conditions sont équivalentes à celles du théorème II.8.

Dans les énoncés des trois résultats suivants nous continuons de supposer que L est muni d'une norme unité.

II.21. THÉORÈME. - Soit G un sous-groupe local d'un groupe local B de rayon $r < c$ (voir (8)) associé à une algèbre de Dynkin, réelle. Alors l'ensemble L_G^a de tous les $x \in L$ qui satisfont les conditions équivalentes du théorème II.20 est un idéal fermé de L_G ; plus précisément, on a $G \subseteq I(L_G^a , L)$. Si G est fermé, on a : $L_G^a = L_G$.

Si $L = \mathbb{R}$, $B = [- r , r]$, $G = \mathbb{Q} \cap B$, alors on a $L_G^a = \{0\}$, $L_G = L$.

La puissance de ces résultats se révèle dans la caractérisation suivante de la composante G_a connexe par arcs de 0 dans un sous-groupe local G. Cette caractérisation est valable si G n'est pas trop grand ; l'exemple II.11 montre que l'on a besoin de quelque restriction sur G.

II.22. THÉORÈME. - Soit G un sous-groupe local d'un groupe local B de rayon $r < c$ associé à une algèbre de Dynkin L réelle. Si $\overline{G}$ est localement compact, alors $G_a = L_G^a \cap B$, et G_a est homéomorphe à $\underset{\sim}{R}^n$, $n = \dim L_G^a$. En particulier, si G est connexe par arcs, alors G est un sous-groupe local de Lie, donc est fermé.

II.23. COROLLAIRE. - Soit G un sous-groupe local d'un groupe local B de rayon $r < c$ associé à une algèbre de Lie L réelle de dimension finie. Alors, on a

$$G_a = L_G^a \cap B \subseteq G_0 \subseteq (\overline{G} \cap B)_0 = G_* = (L_G \cap B) = (\overline{G} \cap B)_* = (\overline{G} \cap B)_a .$$

Comme on l'a remarqué, G_0 peut être proprement interpolé entre G_a et G, même si $\dim L = 2$.

5. Constructions algébriques.

Si on se donne une algèbre de Dynkin L avec un groupe local B associé et un sous-groupe local G de B, on déduit de la sous-algèbre $A = L_G$ canoniquement des algèbres associées, comme par exemple le centralisateur $Z(A, L)$ de A dans L donné par

(18) $Z(A, L) = \{x \in L : (\mathrm{ad}\, x)(a) = [x, a] = a \text{ quel que soit } a \in A\}$,

l'idéalisateur $I(A, L)$ (voir (17)) (qui évidemment contient $Z(A, L)$) ou l'algèbre de commutateurs $[A, A]$ définie par

(19) $[A,A]$ = sous-espace vectoriel engendré par les $[x,y]$, $x, y \in A$.

Pour les groupes, on connait les concepts analogues ; donc la question se pose d'examiner s'il est possible d'introduire les constructions correspondantes pour les sous-groupes locaux et de trouver leurs relations avec les sous-algèbres introduites ci-dessus.

Si on prend pour centralisateur de G dans B l'ensemble

(20) $$Z(G, B) = \{x \in B : g * x = x * g \text{ quel que soit } g \in G\} ,$$

on démontre avec les méthodes de la démonstration du lemme II.12 et de la proposition II.13 le résultat suivant.

II.24. PROPOSITION. - Soit G un sous-groupe local d'un groupe local B associé à une algèbre de Dynkin L. Alors $Z(G, B)$ est un sous-groupe local de Lie connexe de B (donc Z est égal à $L_{Z(G,B)} \cap B$) tel que

(21) $$L_{Z(G,B)} = Z(L_G, L) .$$

En particulier, le centre de B est précisément $Z \cap B$, où Z est le centre de L.

Le <u>normalisateur</u> de G dans B est l'ensemble

(22) $$N(G , B) = \{x \in B : x * G * (-x) \cap B \subseteq G\} .$$

Son étude a déjà été faite, par anticipation, dans II. 12, II.13. On trouve facilement le résultat suivant.

II.25. PROPOSITION. - <u>Soit</u> G <u>un sous-groupe local de Lie connexe d'un groupe local</u> B <u>associé à une algèbre de Dynkin</u> L . <u>Alors</u> $N(G , B)$ <u>est un sous-groupe local de Lie connexe de</u> B <u>tel que</u>

(23) $$L_{N(G,B)} = I(L_G , L) .$$

La question des commutateurs est toujours un peu compliquée. Soient encore L une algèbre de Dynkin, B un groupe local associé. D'abord convenons de choisir B suffisamment petit pour que, par exemple, $B * B * B * B$ soit bien défini ; donc tous les commutateurs des éléments de B sont aussi bien définis.

Pour des sous-ensembles $X , Y \subseteq L$, posons

(24) $[X,Y]$ = espace vectoriel engendré dans L par les $[x,y]$, $x \in X$, $y \in Y$.

Pour deux sous-groupes locaux G , H de B définissons

(25) $\langle G , H\rangle$ = sous-groupe local de B minimum qui contient tous les commutateurs $\langle g,h\rangle = g*h*(-g)*(-h)$ avec $g \in G$, $h \in H$, qui sont contenus dans B .

A l'aide de II.6 (15), on constate le résultat suivant.

II.26. LEMME. - $[L_G , L_H] \subseteq L_{\langle G,H\rangle}$.

C'est l'inclusion inverse qui pose des problèmes. Supposons maintenant que G et H sont des sous-groupes locaux de Lie connexes. D'après II.25, on a $G \subseteq N(H , B)$ et $H \subseteq N(G , B)$ si, et seulement si, $L_G \subseteq I(L_H , L)$ et $L_H \subseteq I(L_G , L)$, et la dernière condition évidemment équivaut à $[L_G , L_H] \subseteq L_G \cap L_H$. Disons que G et H se normalisent si ces conditions sont satisfaites. La formule de Campbell-Hausdorff (I. 14) permet alors de déduire une inversion partielle.

II.27. LEMME. - <u>Si</u> G <u>et</u> H <u>se normalisent, alors</u> $\langle G , H\rangle \subseteq [L_G , L_H]^\Gamma$.

Dans ce cas, on a maintenant déterminé l'algèbre de Lie associée à $\langle G , H\rangle$; en fait on a

(26) $$L_{\langle G,H\rangle} = [L_G , L_H]^\Gamma .$$

Mais cela n'explique pas encore si $\langle G , H\rangle$ est un sous-groupe local de Lie ou non. Il est facile de vérifier la condition II.20 (ii) pour $x = [a , b]$, $a \in L_G$; $b \in L_H$; donc

(27) $$L^a_{\langle G,H\rangle} = L_{\langle G,H\rangle} .$$

Si maintenant $\dim[L_G , L_H] < \infty$, on peut utiliser le résultat II.23 (plus difficile, on s'en souvient) pour en déduire que

$$\langle G , H\rangle_a = [L_G , L_H] \cap B = \langle G , H\rangle_*$$

(pour B suffisamment petit). Donc $\langle G , H\rangle$ est un sous-groupe local de Lie d'après II.19. En somme, on a démontré le théorème ci-après.

II.28. THÉORÈME. - Soit B un groupe local associé à une algèbre de Dynkin L tel que $B * B * B * B$ est bien défini. Soient G et H deux sous-groupes locaux de Lie connexes qui se normalisent. Soit $C = \langle G , H\rangle$ le sous-groupe local des commutateurs (défini dans (25)). Alors on a $L_C = L_C^a = [L_G , L_H]^-$, et la condition $\dim[L_G , L_H] < \infty$ suffit pour que C soit un sous-groupe local de Lie.

Le théorème s'applique aux cas particuliers

(i) $G = H$ (notamment $G = H = B$),

(ii) G arbitraire, $H = B$.

Il est peut-être un peu surprenant que C soit automatiquement fermé dans B sous les conditions énoncées. En fait, l'exemple suivant élucide l'importance de la restriction sur la dimension.

II.29. EXEMPLE. - Pour le nombre naturel n , soit L_n l'algèbre de Lie définie sur $\underset{\sim}{R}^3$ par

$$[(u , v , w) , (x , y , z)] = (\frac{1}{n} \begin{vmatrix} vw \\ yz \end{vmatrix} , 0 , 0) .$$

Soit L l'algèbre de Dynkin de tous les $(x_n) \in \prod L_n$ tels que $\sup\|x_n\| < \infty$ (par rapport à la norme $\|(a , b , c)\| = \max\{|a| , |b| , |b|\}$ sur $\underset{\sim}{R}^3$). Quel que soit $u , v \in L$, on a $[u , v] = ((a_n , 0 , 0))$ tel que $\sup n|a_n| < \infty$. Puisque $[L , [L , L]] = 0$, la multiplication $*$ est définie globalement par

$$u * v = u + v + \frac{1}{2}[u , v] ,$$

et on note $\langle u , v\rangle = [u , v]$. Si B est un groupe local arbitraire associé à L , alors $[B , B]$ n'est pas fermé dans B , donc n'est pas un sous-groupe local de Lie.

On peut démontrer des résultats plus généraux que II.28 sans l'hypothèse que G et H se normalisent, mais l'énoncé et les concepts qui interviennent sont nécessairement plus compliqués. Pour les applications, la version II.28 suffit.

(Texte reçu le 14 janvier 1974)

Karl H. HOFMANN
Résidence de l'Ormaille
Pavillon 9
91440 BURES SUR YVETTE