Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Antibano Micali

Sur les n-normes

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 26 (1972-1973), exp. n° 3, p. 1-3
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1972-1973__26__A3_0>

Séminaire DUBREIL
(Algèbre)
26e année, 1972/73, n° 3, 3 p.

29 janvier 1973

SUR LES n-FORMES

par Artibano MICALI

On résumera ici les principaux résultats obtenus dans la théorie des n-formes (pour $n = 2$, ce sont des formes quadratiques).

Dans la suite, A désignera un anneau commutatif à élément unité, et tout A-module est unitaire. Si M est un A-module et $n > 1$ un entier, on note $M^n = M \times \ldots \times M$ (n fois) et $\underset{\sim}{S}_n$ le groupe symétrique d'un ensemble à n objets.

Soient M et N deux A-modules, et $f : M \dashrightarrow N$ une application. On dira que $f : M \dashrightarrow N$ est une <u>n-application</u> si les conditions suivantes sont vérifiées :

(n-A_1) Pour tout $(a, x) \in A \times M$, $f(ax) = a^n f(x)$;

(n-A_2) L'application $\varphi : M^n \dashrightarrow N$, définie par

$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} (-1)^{n-p} f(x_{i_1} + \ldots + x_{i_p})$ pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in M^n$,

est n-linéaire, nécessairement symétrique, i. e.

$$\varphi(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$$

pour tout $\sigma \in \underset{\sim}{S}_n$. On dira que φ est l'<u>application n-linéaire symétrique associée</u> à f.

On remarque que si $n = 2$, on retrouve la notion habituelle de forme quadratique et que si $n = 1$, $\varphi = f$.

On considère la catégorie $n - \underset{\sim}{\mathrm{Apr}}(A)$, dont les objets sont les triplets (M, f, N), où $f : M \dashrightarrow N$ est une n-application et où les morphismes sont les couples d'applications A-linéaires $(g, h) : (M, f, N) \to (M', f', N')$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{g} & M' \\ \downarrow f & & \downarrow f' \\ N & \xrightarrow{h} & N'. \end{array}$$

Si $f : M \dashrightarrow N$ est une n-application et $\varphi : M^n \dashrightarrow N$ l'application n-linéaire symétrique associée à f, on a $\varphi(x, \ldots, x) = n! f(x)$ pour tout $x \in M$. Ainsi, si $n!$ est inversible dans A, f est déterminée par φ.

Dans la catégorie $n - \underset{\sim}{\mathrm{For}}(A)$ des <u>n-formes</u> $f : M \dashrightarrow A$, on peut définir une <u>somme orthogonale</u> analogue à celle des formes quadratiques. Dès lors, $n - \underset{\sim}{\mathrm{For}}(A)$ est une catégorie monoïdale, et on peut parler de son groupe de Grothendieck. Pour plus de détails, le lecteur pourra consulter [1].

Soient M un A-module, $A^{(M)}$ le A-module libre de base M et $(e_x)_{x \in M}$ sa base canonique. On note $R_n(M)$ le sous-A-module de $A^{(M)} \times M^{\otimes n}$, engendré par les éléments de la forme

$$(e_{ax} - a^n e_x \ , \ 0) \quad \text{et} \quad \left(\sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} (-1)^{n-p} e_{x_{i_1} + \ldots + x_{i_p}} \ , \ - x_1 \otimes \ldots \otimes x_n\right) ,$$

pour a parcourant A et x , x_1 , ... , x_n parcourant M , et soit

$$\Gamma_n(M) = A^{(M)} \times M^{\otimes n} / R_n(M)$$

le A-module quotient. L'application évidente composée $\gamma_n : M \longrightarrow A^{(M)} \times M^{\otimes n} \longrightarrow \Gamma_n(M)$ est une n-application. De plus, pour tout n-application $f : M \longrightarrow N$, il existe une unique application A-linéaire $\bar{f} : \Gamma_n(M) \longrightarrow N$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, dashed, "f"] \arrow[d, "\gamma_n"'] & N \\ \Gamma_n(M) \arrow[ur, dashed, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Pour tout A-module M , il existe des isomorphismes de A-modules $\Gamma_0(M) \approx A$ et $\Gamma_1(M) \approx M$. De plus, pour tout entier $n \geq 0$, il existe un isomorphisme de A-modules $\Gamma_n(A) \approx A$. Le foncteur Γ_n commute aux limites inductives. Si $S_n(M)$ désigne le sous-A-module des éléments homogènes de degré n de l'algèbre symétrique $S_A(M)$, il existe, pour chaque entier n , des applications A-linéaires

$$f_n : \Gamma_n(M) \longrightarrow S_n(M) \quad \text{et} \quad g_n : S_n(M) \longrightarrow \Gamma_n(M)$$

vérifiant

$$f_n \circ g_n = n! \, id_{S_n(M)} \quad \text{et} \quad g_n \circ f_n = n! \, id_{\Gamma_n(M)} .$$

Ainsi, si $n!$ est inversible dans A , $f_n : \Gamma_n(M) \longrightarrow S_n(M)$ est un isomorphisme de A-modules. Dès lors, le rapport avec les puissances divisées (Cf. [2]) est évident.

Une autre notion importante est celle de <u>n-forme non dégénérée</u>. On dira qu'une n-forme $f : M \longrightarrow N$ est <u>non dégénérée</u> si l'application A-linéaire $M \longrightarrow Hom_A(M, N)$ définie par $x \longmapsto (y \longmapsto \varphi(x , \ldots , x , y))$, est un isomorphisme de A-modules. Si M et N sont projectifs de type fini, ceci entraîne que nécessairement $N \in Pic(A)$. La catégorie des n-formes non dégénérées $f : M \longrightarrow N$, où M et N sont projectifs de type fini et $N \in Pic(A)$, nous conduit à la construction du groupe de Witt-Grothendieck $WG_n(N)$ (Cf. [1]).

Finalement, on remarque que, à chaque n-forme $f : M \longrightarrow A$, on peut associer une <u>algèbre de Clifford</u>. Plus précisément, l'algèbre de Clifford de (M , f) , notée $C(M , f)$, est le quotient de l'algèbre tensorielle $T(M)$ par l'idéal bilatère de $T(M)$ engendré par les éléments de la forme $x^{\otimes n} - f(x).1$, pour x parcourant M . C'est une A-algèbre graduée sur $\mathbb{Z}/(n)$. Les propriétés fonctorielles de l'algèbre de Clifford sont faciles à établir (Cf. [1] ; voir aussi [3]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] MICALI (A.). - Sur les n-formes (à paraître).

[2] ROBY (N.). - Lois polynômes et lois formelles en théorie des modules, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., t. 80, 1963, p. 213-348 (Thèse Sc. math., Paris 1963).

[3] ROBY (N.). - Algèbres de Clifford des formes polynômes, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 268, 1969, p. 484-486.

Artibano MICALI
Université du Languedoc
Mathématiques
Place Eugène Bataillon
34060 MONTPELLIER CEDEX