Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

MICHEL PAUGAM

Condition G_q d'Ischebeck-Auslander et condition S_q de Serre

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 26 (1972-1973), exp. n° 14, p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1972-1973__26__A13_0>

Séminaire DUBREIL
(Algèbre)
26e année, 1972/73, n° 14, 12 p.

21 mai 1973

CONDITION G_q D'ISCHEBECK-AUSLANDER ET CONDITION S_q DE SERRE

par Michel PAUGAM

Le but de cet exposé est de montrer brièvement que la condition G_q , définie dans [12] et [1] pour les anneaux, peut également être définie pour les schémas localement noethériens et pour les modules. De plus, elle possède les mêmes propriétés que la condition S_q de Serre.

Tous les anneaux considérés sont commutatifs unitaires et noethériens. Tous les modules sont unitaires.

0. Préliminaires.

0.1. Définition ([2], § 2). - Soient A un anneau, et M un A-module de type fini. Une suite $\underset{\sim}{x} = (x_1 , x_2 , \ldots , x_n)$ d'éléments de A est appelée une M-suite si $xM \neq M$ et si x_i n'est pas diviseur de zéro dans $M/(x_0, x_1, \ldots, x_{i-1})M$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$, où $x_0 = 0$.

0.2. Définition ([2], 2-10). - Soient A un anneau, M et N deux A-modules de type fini, et $\mathfrak{A} = \operatorname{ann} M$. Supposons $\mathfrak{A}.N \neq N$. Alors toutes les N-suites maximales contenues dans $\mathfrak{A}$ ont le même nombre d'éléments que l'on appelle le N-grade de M , et que l'on note $\operatorname{grade}_N M$.

0.3. Définition [22]. - Soit A un anneau local. On dit qu'un A-module de type fini non nul M est un module de Gorenstein si $\operatorname{prof}_A M = \dim_A M = \operatorname{di}_A M$. On a alors

$$\operatorname{di}_A M = \operatorname{prof} A = \dim A .$$

$\operatorname{prof}_A M$ désigne la profondeur du A-module M ([9], 16-4), $\operatorname{di}_A M$ désigne la dimension injective de M .

Pour $M = A$, on retrouve la définition des anneaux de Gorenstein ([2], 4-1).

0.4. Définition ([2], § 2). - Soient A un anneau et M un A-module ; on appelle résolution injective minimale de M une suite exacte

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow E_0(M) \longrightarrow \ldots \longrightarrow E_i(M) \xrightarrow{di} E_{i+1}(M) \longrightarrow \ldots$$

telle que, pour tout $i \geqslant 0$, $E_i(M)$ est une enveloppe injective de $\ker di$.

Si M est de type fini, on montre que

$$E_i(M) = \bigoplus_{p \in \operatorname{Spec}(A)} \mu_i(p , M)\, E_A(A/p) ,$$

où μE désigne une somme directe de μ copies de E et $E_A(A/p)$ est l'[illegible] injective de A/p (voir [2], 2-4, 2-6 et 2-7 pour les propriétés des μ_i).

Pour les modules de Cohen-Macaulay ([9], 16-5), on connaît la proposition suivante :

0.5. PROPOSITION ([10], 6.3.3, p. 139) et ([13], 1.24). - Soient A et B deux anneaux locaux d'idéaux maximaux respectifs m , n ; Soient k le corps résiduel de A , φ : $A \to B$ un homomorphisme local tel que B soit A-plat, et M un A-module de type fini non nul ; pour que $M \otimes B$ soit un B-module de Cohen-Macaulay, il faut et il suffit que M soit un A-module de Cohen-Macaulay et que $B \otimes_A k$ soit un anneau de Macaulay.

De plus, si $\dim M = m$ et si $\dim B \otimes k = n$, alors

$$\mu^B_{m+n}(n , M \otimes B) = \mu^A_m(m , M).\mu_n^{B\otimes k}(n/mB , B \otimes_A k) .$$

1. Résultats.

Nous allons établir un résultat similaire à celui de (0.5) pour les modules de Gorenstein. Démontrons d'abord deux lemmes.

1.1. LEMME. - Soient A et B deux anneaux locaux artiniens ; soient k le corps résiduel de A , et φ : $A \to B$ un homomorphisme local tel que B soit un A-module plat. Soit I un A-module de type fini non nul. Si I est un module injectif et si $B \otimes_A k$ est un anneau de Gorenstein, alors $I \otimes_A B$ est un B-module injectif.

Preuve. - Comme $\dim A = \dim B = 0$, A et B sont des anneaux de Cohen-Macaulay (D'après (0.5), $I \otimes_A B$ est un B-module de Cohen-Macaulay). Montrons que $I \otimes_A B$ est B-injectif. Soit ℓ le corps résiduel de B . Soit $E_A(k)$ (resp. $E_B(\ell)$) l'enveloppe injective du A-module k (resp. du B-module ℓ). Si m désigne l'idéal maximal de A , on a :

$$\mu_i(m , I) = 0 \quad \text{pour} \quad i \neq 0 \qquad ([22], 3.11 (ii)).$$

et $E_A(I) = I = \mu_0(m , I)\, E_A(k)$. Mais l'on a par ailleurs $E_A(k) \otimes_A B \simeq E_B(\ell)$, car B est A-plat ([13], 6.15, page 80). On en déduit :

$$I \otimes_A B \simeq \mu_0^A(m , I)\, E_A(k) \otimes_A B \simeq \mu_0^A(m , I)\, E_B(\ell)$$

et $I \otimes B$ est un B-module injectif puisque somme directe de B-modules injectifs.

1.2. LEMME. - Soient A un anneau local de profondeur ≥ 1 , M un A-module de type fini non nul. Soit x un élément du radical de A , non diviseur de zéro dans M ni dans A . Alors M est de Gorenstein sur A si, et seulement si, M/xM est un (A/xA)-module de Gorenstein.

Preuve. - Sous les hypothèses faites ci-dessus sur x , on sait que les foncteurs $\mathrm{Ext}^r_A(\cdot , M)$ et $\mathrm{Ext}^{r-1}_{A/xA}(\cdot , M/xM)$ définis sur la catégorie des (A/xA)-modules de type fini sont isomorphes pour $r \geq 1$ [19].

D'autre part, on sait que :

$$\operatorname{prof} A/xA = \operatorname{prof} A - 1 \quad \text{et} \quad \operatorname{prof} M/xM = \operatorname{prof} M - 1 \qquad [9],$$

et l'on a toujours : $\operatorname{prof} A \leqslant \dim A$ et $\operatorname{prof} M \leqslant \dim M \leqslant \dim A$. De plus, si $\operatorname{di}_A M < +\infty$ (resp. $\operatorname{di}_{A/xA} M/xM < +\infty$) alors

$$\operatorname{di}_A M = \operatorname{prof} A \quad (\text{resp. } \operatorname{di}_{A/xA} M/xM = \operatorname{prof} A/xA).$$

1° Si M est un A-module de Gorenstein, on a, puisque $\dim A \geqslant 1$,

$$\operatorname{Ext}^{r-1}_{A/xA}(\cdot \, , M/xM) = 0 \quad \text{pour} \quad r > \dim A \, ;$$

par suite

$$\operatorname{di}_{A/xA} M/xM \leqslant \dim A - 1 \, .$$

Or $\dim A - 1 = \operatorname{prof} A - 1 = \operatorname{prof} A/xA$, donc

$$\operatorname{di}_{A/xA} M/xM = \dim A/xA = \operatorname{prof} A/xA \quad (\text{car } \dim A/xA \leqslant \dim A - 1).$$

Enfin,

$$\operatorname{prof} M/xM = \operatorname{prof} M - 1 = \operatorname{di}_{A/xA} M/xM \quad \text{et} \quad \operatorname{prof} M/xM \leqslant \dim M/xM \leqslant \dim A/xA$$

entraînent :

$$\operatorname{prof} M/xM = \dim M/xM \, .$$

2° Inversement, si M/xM est un (A/xA)-module de Gorenstein, alors :

$$\operatorname{prof} M = \operatorname{prof} M/xM + 1 = \operatorname{prof} A/xA + 1 = \operatorname{prof} A$$

$$\operatorname{prof} M = \dim M/xM + 1$$

et comme $\dim M/xM \leqslant \dim M \leqslant \dim M/xM + 1 = \operatorname{prof} M \leqslant \dim M$, on a

$$\operatorname{prof} M = \dim M \, .$$

De même, on a : $\dim A/xA \leqslant \dim A \leqslant \dim A/xA + 1 = \operatorname{prof} A$, et par suite

$$\dim A = \operatorname{prof} A \, .$$

Reste à prouver que M est de dimension injective finie sur A . On utilise la suite spectrale ([5], p. 348, Cas 3) :

$$\operatorname{Ext}^p_{A/xA}(\operatorname{Tor}^A_q(A/xA \, , N) \, , M/xM) \underset{q}{\Longrightarrow} \operatorname{Ext}^n_A(N \, , M/xM)$$

qui dégénère (puisque la dimension projective de A/xA est 1) et on a la suite exacte :

$$\cdots \to \operatorname{Ext}^r_{A/xA}\left(\frac{N}{xN} , \frac{M}{xM}\right) \to \operatorname{Ext}^r_A\left(N , \frac{M}{xM}\right) \to \operatorname{Ext}^{r-1}_{A/xA}\left(\operatorname{Tor}^A_1\left(\frac{A}{xA} , N\right) , \frac{M}{xM}\right)$$
$$\to \operatorname{Ext}^{r+1}_{A/xA}\left(\frac{N}{xN} , \frac{M}{xM}\right) \to \operatorname{Ext}^{r+1}_A\left(N , \frac{M}{xM}\right) \to \operatorname{Ext}^r_{A/xA}\left(\operatorname{Tor}^A_1\left(\frac{A}{xA} , N\right) , \frac{M}{xM}\right) \to \cdots$$

Si $\operatorname{di}_{A/xA} M/xM = p$, on en déduit que

$$\operatorname{Ext}^r_A(N \, , M/xM) = 0$$

pour $r > p + 1$ et pour tout A-module de type fini N . De la suite exacte

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{x} M \longrightarrow M/xM \longrightarrow 0$$

on obtient alors une suite exacte

$$\mathrm{Ext}_A^{r-1}(N\ ,\ \frac{M}{xM}) \longrightarrow \mathrm{Ext}_A^r(N\ ,\ M) \xrightarrow{x} \mathrm{Ext}_A^r(N\ ,\ M) \longrightarrow \mathrm{Ext}_A^r(N\ ,\ \frac{M}{xM})$$

qui montre que $\mathrm{Ext}_A^r(N\ ,\ M) = 0$ pour r assez grand et pour tout A-module de type fini N , donc $\mathrm{di}_A\ M < +\infty$, et $\mathrm{di}_A\ M = \mathrm{prof}\ A$.

1.3. THÉORÈME. - Soient A et B deux anneaux locaux, k le corps résiduel de A , $\varphi : A \longrightarrow B$ un homomorphisme local tel que B soit un A-module plat. Soit M un A-module de type fini non nul.

(i) Si M est de Gorenstein et si $B \otimes_A k$ est un anneau de Gorenstein, alors $M \otimes_A B$ est un B-module de Gorenstein, et l'on a

$$\mathrm{di}_B\ M \otimes B = \mathrm{di}_A\ M + \mathrm{di}_{B\otimes k}\ B \otimes k\ .$$

(ii) Si $M \otimes B$ est un B-module de Gorenstein, M est un A-module de Gorenstein.

Démonstration.

(i) M étant un A-module de Gorenstein, A est un anneau de Macaulay d'après (0.3). En vertu de (0.5) on peut donc supposer que A et B sont des anneaux de Macaulay et que $M \otimes_A B$ est un B-module de Macaulay. Soit $\underset{\sim}{x}$ une A-suite et une M-suite maximale. Comme B est A-plat, $\underset{\sim}{x}$ est aussi une B-suite. Posons

$$A' = A/\underset{\sim}{x}A\ ,\quad B' = B/\underset{\sim}{x}B\ ,\quad M' = M/\underset{\sim}{x}M\ .$$

Soit $\underset{\sim}{y}$ une $(B' \otimes_{A'} k)$-suite maximale, alors $\underset{\sim}{y}$ est aussi une B'-suite ([13], 1.23), et si l'on pose $B'' = B'/\underset{\sim}{y}B'$, B'' est A'-plat ([13], 1.23), et l'on a :

$$B'' \otimes_{A'} k = \frac{B' \otimes_{A'} k}{\underset{\sim}{y}(B' \otimes_{A'} k)}\ .$$

Il en résulte que $\underset{\sim}{y}$ est une B'-suite maximale puisque

$$\dim B'' = \dim A' + \dim B'' \otimes_{A'} k = 0 \qquad ([10],\ 6.1.2).$$

Mais alors $B'' \otimes_{A'} k$ est un anneau de Gorenstein de dimension nulle (puisque $B' \otimes_{A'} k = B \otimes_A k$ est un anneau de Gorenstein).

Par ailleurs, M' est un A'-module de Macaulay injectif d'après [22], 3.9 ou 1.2. Le lemme (1.1) indique que $M' \otimes_{A'} B''$ est un B''-module de Cohen-Macaulay injectif.

Si $\underset{\sim}{y} = (y_1\ , \ldots ,\ y_r)$, on a la suite exacte de A'-modules

$$0 \longrightarrow B' \xrightarrow{y_1} B' \longrightarrow B'/y_1\ B' \longrightarrow 0\ .$$

Comme $B'/y_1\ B'$ est A'-plat, on en déduit la suite exacte

$$0 \longrightarrow M' \otimes_{A'} B' \longrightarrow M' \otimes_{A'} B' \longrightarrow M' \otimes_{A'} (B'/y_1\ B') \longrightarrow 0$$

et on en conclut l'isomorphisme

$$M' \otimes_{A'} (B'/y_1\ B') \simeq (M' \otimes_{A'} B')/(y_1.(M' \otimes_{A'} B'))$$

et en outre que y_1 est $(M' \otimes_{A'} B')$-régulier.

Par récurrence sur r, on a l'isomorphisme

$$M' \otimes_{A'} B'' \simeq (M' \otimes_{A'} B')/(\underset{\sim}{y}(M' \otimes_{A'} B'))$$

et le lemme (1.2) implique que $M' \otimes_{A'} B'$ est un B'-module de Gorenstein. Mais on a aussi $M' \otimes_{A'} B' = (M \otimes_A B)/(\underset{\sim}{x}(M \otimes_A B))$ et puisque $\underset{\sim}{x}$ est une A-suite et une M-suite, c'est aussi une B-suite et une $(M \otimes B)$-suite, et (1.2) indique que $M \otimes_A B$ est un B-module de Gorenstein.

D'autre part, $\dim_B(M \otimes B) = \dim_A M + \dim B \otimes k$ ([10], 6.1.2). La dernière assertion de (i) découle alors de (0.3).

(ii) Supposons $M \otimes_A B$ de Gorenstein. Posons $\mathrm{di}_B(M \otimes B) = p$. Pour tout A-module de type fini N, on a

$\mathrm{Ext}^i_A(N, M) \otimes_A B = \mathrm{Ext}^i_B(N \otimes_A B, M \otimes_A B) = 0$ pour $i > p$ ([20], prop. 18, IV, 31).

Comme B est fidèlement plat, on a

$$\mathrm{Ext}^i_A(N, M) = 0 \quad \text{pour} \quad i > p$$

et par suite,

$$\mathrm{di}_A M \leq p .$$

En outre, $\dim M \otimes B = \dim B$ implique $\dim M = \dim A$ et $\dim M = \mathrm{di}\, M$. Par ailleurs, on sait que M est de Cohen-Macaulay (0.5), d'où

$$\mathrm{prof}\, M = \dim M = \mathrm{di}\, M .$$

1.4. DÉFINITION. <u>Soit $(A, \mathfrak{m})$ un anneau local de Cohen-Macaulay de dimension n. On appelle rang d'un A-module de Gorenstein M le nombre $\mu^A_n(\mathfrak{m}, M)$.</u>

Cette terminologie est utilisée par REITEN [18] qui a étudié l'existence des modules de Gorenstein de rang 1 (ou modules canoniques de [13] ; voir aussi [23]).

1.5. THÉORÈME. - <u>Soient A et B deux anneaux locaux de Cohen-Macaulay, k le corps résiduel de A, et $\varphi : A \to B$ un homomorphisme local tel que B soit A-plat. Soit M un A-module de type fini non nul. Alors pour que $M \otimes_A B$ soit un B-module de Gorenstein de rang 1, il faut et il suffit que M soit un A-module de Gorenstein de rang 1 et que $B \otimes_A k$ soit un anneau de Gorenstein.</u>

<u>Démonstration</u>. - Si M est un A-module de Gorenstein, et si $B \otimes_A k$ est un anneau de Gorenstein, alors $M \otimes_A B$ est un B-module de Gorenstein d'après (1.3), et de rang 1 d'après la dernière assertion de (0.5). Établissons la réciproque.

1° Si $\dim A = \dim B = 0$ et si $M \otimes_A B$ est un B-module de Gorenstein de rang 1, alors M est un A-module de Gorenstein en vertu de (1.3, ii) et de rang 1 (0.5). En outre, $B \otimes k$ est un anneau de Gorenstein d'après le théorème de Dieudonné ([2], 2.8, p. 12).

2° Si $\dim A > 0$, on sait (1.3 (ii)) que M est un A-module de Gorenstein ; soit $\underset{\sim}{x}$ une A-suite et une M-suite maximale ; $\underset{\sim}{x}$ est aussi une B-suite. Posons

$$A' = A/\underset{\sim}{x}A \ ; \quad B' = B/\underset{\sim}{x}B \quad \text{et} \quad M' = M/\underset{\sim}{x}M$$

Soit $\underset{\sim}{y}$ une $(B' \otimes_{A'} k)$-suite maximale ; on sait que $\underset{\sim}{y}$ est aussi une B'-suite et, comme dans la preuve de (1.3) si l'on pose $B'' = B'/\underset{\sim}{y}B'$, $M' \otimes_{A'} B''$ est un B''-module de Gorenstein de rang 1 , car si $\dim M \otimes B = p$,

$$\mu_p^B(M \otimes_A B) = \mu_0^{B''}(M' \otimes_{A'} B'') \qquad ([2], 2.6).$$

D'après le premier cas, $B'' \otimes_{A'} k$ est un anneau de Gorenstein, et comme on a l'isomorphisme $B'' \otimes_{A'} k = (B' \otimes_{A'} k)/(y(B' \otimes_{A'} k))$, $B' \otimes_{A'} k = B \otimes k$ est un anneau de Gorenstein (1.2).

1.6. THÉORÈME. - Soient A et B deux anneaux locaux, m l'idéal maximal de A , $\varphi : A \longrightarrow B$ un homomorphisme local tel que B soit A-plat. Alors B est un anneau de Gorenstein si, et seulement si, A et B/mB sont des anneaux de Gorenstein.

Preuve. - Prendre $M = A$ dans (1.5).

Le théorème (1.3) généralise donc un résultat de HARTSHORNE ([11], prop. 96, page 297), WATANABE ([26], I, th. 1) et KUNZ-HERZOG ([13], 6.14).

Terminons ce paragraphe par un lemme utile pour la suite.

1.7. LEMME. - Soient A un anneau, M un A-module de type fini et

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow E_0 \longrightarrow \dots \longrightarrow E_i \longrightarrow \dots$$

une résolution injective minimale de M . Alors

(a) $p \in \mathrm{Ass}(E_i) \Rightarrow \mu_i(p , M) > 0$,

(b) Si $p \in \mathrm{Supp}\, M$ et si $\dim M_p = i$, alors $\mu_i(p , M) > 0$.

Preuve.

(a) Soit $p \in \mathrm{Ass}\, E_i$, alors il existe une suite exacte $0 \longrightarrow A/p \longrightarrow E_i$, et par suite

$$\mathrm{Hom}_{A_p}(k(p) , E_{i_p}) \neq 0 , \text{ où } k(p) = A_p/pA_p .$$

Mais comme

$$\mathrm{Ext}^i_{A_p}(k(p) , M_p) \simeq \mathrm{Hom}_{A_p}(k(p) , E_{i_p}) \qquad ([2], \text{preuve de } 2.7).$$

on a

$$\mu_0(p , E_i) = \mu_i(p , M) \neq 0 \quad \text{d'après ([2], 2.7).}$$

(b) Soit $p \in \mathrm{Supp}\, M$ tel que $\dim M_p = i$.

Soit $p_i \subset \dots \subset p_1 \subset p_0 = p$ une chaîne saturée maximale de $\mathrm{Supp}\, M$. Alors p_i

est minimal dans $\operatorname{Supp} M$, donc $\mathfrak{p}_i \in \operatorname{Ass} M$ et $\mu_0(\mathfrak{p}_i , M) > 0$ d'après (a) ; mais on en déduit que $\mu_i(\mathfrak{p} , M) > 0$ par ([2], 3.1).

2. La condition G_q .

Soient A un anneau, M un A-module de type fini, et q un entier. On dit que M vérifie la condition S_q de Serre si

$$\operatorname{prof} M_{\mathfrak{p}} \geqslant \min(q , \dim M_{\mathfrak{p}})$$

pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A .

Dans tout ce qui suit, q désigne un entier non nul.

2.1. PROPOSITION. - *Soit A un anneau. Les assertions suivantes sont équivalentes pour un A-module M de type fini non nul.*

(i) *Pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A tel que $\operatorname{prof} M_{\mathfrak{p}} < q$, $M_{\mathfrak{p}}$ est un $A_{\mathfrak{p}}$-module de Gorenstein.*

(ii) *M vérifie la condition S_q de Serre, et pour tout idéal $\mathfrak{p}$ du support de M , tel que $\dim M_{\mathfrak{p}} < q$, $M_{\mathfrak{p}}$ est un $A_{\mathfrak{p}}$-module de Gorenstein.*

(iii) *Pour tout A-module de type fini L , $\operatorname{grade}_M \operatorname{Ext}^r_A(L , M) \geqslant \min(q , r)$.*

Démonstration. - L'équivalence de (i) et (ii) est immédiate. Montrons que (ii) entraîne (iii). Posons $E = \operatorname{Ext}^r(L , M)$. Si $\operatorname{grade}_M E$ est infini, il n'y a rien à prouver ; sinon, soit $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} E$. Il suffit, d'après [1], 4.3, de prouver que $\operatorname{grade}_M A/\mathfrak{p} \geqslant \min(q , r)$. Soit

$$0 \to M \to I_0 \to I_1 \to \dots \to I_r \xrightarrow{d_r} I_{r+1} \to \dots$$

une résolution injective minimale de M . Considérons le complexe

$$0 \to \operatorname{Hom}(L,M) \to \operatorname{Hom}(L,I_0) \to \dots \to \operatorname{Hom}(L,I_r) \xrightarrow{\overline{d}_r} \operatorname{Hom}(L,I_{r+1}) \to \dots$$

et, pour $r \geqslant 1$, la suite exacte

$$0 \to \operatorname{im} \overline{d}_{r-1} \to \ker \overline{d}_r \to \operatorname{Ext}^r (L , M) \to 0 .$$

D'après [3] (chap. II, prop. 16, p. 133) on a

$$\operatorname{Supp} \operatorname{Ext}^r(L , M) \subset \operatorname{Supp} \ker \overline{d}_r \subset \operatorname{Supp} \operatorname{Hom}(L , I_r) \quad \text{pour} \quad r \geqslant 1 .$$

Il est d'autre part clair que $\operatorname{Supp} \operatorname{Ext}^0(L , M) \subset \operatorname{Supp} \operatorname{Hom}(L , I_0)$. Comme

$$\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} E , \quad \mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} L \cap \operatorname{Supp} I_r \quad \text{pour} \quad r \geqslant 0 ;$$

d'après [4] (prop. 7, p. 136), $\exists\, \mathfrak{q} \in \operatorname{Ass} I_r$ tel que $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$.

Mais $\mathfrak{q} \in \operatorname{Ass} I_r$ implique $\mu_r(\mathfrak{q} , M) > 0$ d'après (1.7.a) ; de plus $M_{\mathfrak{q}} \neq 0$ en vertu de [2], 2.7, et aussi $\mathfrak{q}.M \neq M$ (NAKAYAMA). De même, on a $M_{\mathfrak{p}} \neq 0$ et $\mathfrak{p}M \neq M$.

Par (0.2), on sait que $\operatorname{grade}_M A/\mathfrak{q}$ et $\operatorname{grade}_M A/\mathfrak{p}$ sont finis. Comme

$$\operatorname{grade}_M A/\mathfrak{q} = \inf\{\operatorname{prof} M_{\mathfrak{b}} , \mathfrak{b} \in V(\mathfrak{q})\} \qquad ([1], 4.5)$$

on a $\text{grade}_M A/q \leqslant \text{grade}_M A/\mathfrak{p}$ puisque $V(\mathfrak{p}) \subset V(q)$. Il suffit donc de montrer que $\text{grade}_M A/q \geqslant \min(q , r)$.

Si $r = 0$, il n'y a rien à prouver. Supposons $r \geqslant 1$, et soit $\mathfrak{b} \in V(q)$; on sait que $\mathfrak{b} \in \text{Supp } M$.

Si $\dim M_{\mathfrak{b}} < \min(q , r)$, alors M_q est un A_q-module de Gorenstein, donc

$$\mu_i(q , M) = 0 \quad \text{pour} \quad i \neq \dim M_q \qquad ([22], 3.6)$$

et en particulier $\dim M_q < r$ implique $\mu_r(q , M) = 0$, or $q \in \text{Ass } I_r \Rightarrow \mu_r(q,M)>0$ (1.7) ; on a donc nécessairement $\dim M_{\mathfrak{b}} \geqslant \min(q , r)$ et, d'après (ii), on en déduit

$$\text{prof } M_{\mathfrak{b}} \geqslant \min(q , r)$$

et finalement

$$\text{grade}_M A/q \geqslant \min(q , r) .$$

Réciproquement, prouvons que (iii) implique (ii). Montrons d'abord que

$$\text{prof } M_{\mathfrak{p}} \geqslant \min(q , \dim M_{\mathfrak{p}}) \quad \text{pour tout} \quad \mathfrak{p} \in \text{Spec } A .$$

Si $M_{\mathfrak{p}} = 0$, il n'y a rien à prouver, car $\text{prof } M_{\mathfrak{p}} = +\infty$ ([9], 16.4.5.).

Soit $\mathfrak{p} \in \text{Supp } M$, et posons $\dim M_{\mathfrak{p}} = r$. D'après (iii), avec $L = A/\mathfrak{p}$, on a $\text{grade}_M E \geqslant \min(q , r)$. Par ailleurs,

$$\dim M_{\mathfrak{p}} = r \Rightarrow \mu_r(\mathfrak{p} , M) > 0 \Rightarrow E_{\mathfrak{p}} = \text{Ext}^r(A/P , M)_{\mathfrak{p}} \neq 0 \qquad ([2], 2.7)$$

donc $\mathfrak{p} = \text{Ann } E$, et $\mathfrak{p}.M \neq M$ indique que $\text{grade}_M E$ est fini (0.2). On déduit de [1], 4.5 que $\text{prof } M_{\mathfrak{p}} \geqslant \text{grade}_M E \geqslant \min(q , \dim M_{\mathfrak{p}})$.

Soit maintenant $\mathfrak{p} \in \text{Supp } M$ tel que $\dim M_{\mathfrak{p}} < q$; $M_{\mathfrak{p}}$ est un $A_{\mathfrak{p}}$-module de Cohen-Macaulay puisque M vérifie S_q . D'après [22], 3.3, il suffit de montrer que $\mu^i(\mathfrak{p} , M) = 0$ pour $i > \dim M_{\mathfrak{p}}$. Or s'il existe $i > \dim M_{\mathfrak{p}}$ tel que $\mu_i(\mathfrak{p} , M) \neq 0$, on en déduit comme ci-dessus que $\text{grade}_M \text{Ext}^i(A/\mathfrak{p} , M)$ est fini, et de [1], 4.3, on déduit que

$$\dim M_{\mathfrak{p}} = \text{prof } M_{\mathfrak{p}} \geqslant \min(q , i)$$

ce qui est contradictoire.

2.2. DÉFINITION. - <u>Soient</u> A <u>un anneau, et</u> M <u>un</u> A-<u>module de type fini non nul. On dit que</u> M <u>vérifie la condition</u> G_q (<u>ou que</u> M <u>est un</u> G_q-<u>module</u>) <u>s'il possède les trois propriétés équivalentes de la proposition</u> (2.1).

<u>Remarques</u>. - Pour $M = A$, on retrouve la définition des G_q-anneaux de [12]. D'autres caractérisations des G_q-modules sont données dans [17] (Voir [21]).

2.3. PROPOSITION. - <u>Soient</u> A <u>un anneau,</u> M <u>un</u> A-<u>module de type fini non nul, et</u> (a) <u>une</u> A-<u>suite et une</u> M-<u>suite. Soit</u> $q \geqslant 2$. <u>Si</u> M <u>est un</u> G_q-<u>module,</u> M/aM <u>est un</u> (G_{q-1})-<u>module sur</u> A/aA .

Il suffit d'utiliser le fait que, dans la catégorie des (A/aA)-modules de type fini, on a les isomorphismes de foncteurs [19]

$$\mathrm{Ext}^r_A(\cdot\ ,\ M) \simeq \mathrm{Ext}^{r-1}_{A/aA}(\cdot\ ,\ M/aM) \quad \text{pour} \quad r \geq 1$$

et ensuite la propriété (iii) de (2.1).

Si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de A , on désigne par $k(\mathfrak{p})$ le corps résiduel de $A_{\mathfrak{p}}$.

2.4. PROPOSITION. - <u>Soit</u> $\varphi : A \to B$ <u>un homomorphisme d'anneaux tel que</u> B <u>soit</u> A-<u>plat, et soit</u> M <u>un</u> A-<u>module de type fini non nul, alors</u>

(i) <u>Si</u> φ <u>est fidèlement plat et si</u> $M \otimes_A B$ <u>est un</u> G_q-<u>module,</u> M <u>est un</u> G_q-module,

(ii) <u>Si</u> M <u>est un</u> G_q-<u>module et si pour tout idéal premier</u> $\mathfrak{p}$ <u>de</u> A , $B \otimes_A k(\mathfrak{p})$ <u>est un</u> G_q-<u>anneau, alors</u> $M \otimes_A B$ <u>est un</u> G_q-<u>module s'il est non nul.</u>

<u>Démonstration.</u>

(i) Soit $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} M$, et soit $\mathfrak{q}$ un idéal premier minimal au-dessus de $\mathfrak{p}$ ([14], 5.D, th. 4, page 33).

$\mathfrak{p} = \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \Rightarrow \mathfrak{q} \in {}^a\varphi^{-1}(\operatorname{Supp} M) = \operatorname{Supp}(M \otimes B)$ ([3], chap II, § 4, n° 4, prop. 19)

et

$$(M \otimes_A B) \otimes_B B_{\mathfrak{q}} = (M \otimes_A A_{\mathfrak{p}}) \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} B_{\mathfrak{q}} = M_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} B_{\mathfrak{q}} .$$

Comme

$$\dim(B_{\mathfrak{q}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} k(\mathfrak{p})) = \operatorname{prof}(B_{\mathfrak{q}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} k(\mathfrak{p})) = 0 ,$$

on a en vertu de [10], 6.3.1,

$$\operatorname{prof}(M_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} B_{\mathfrak{q}}) = \operatorname{prof} M_{\mathfrak{p}}$$

car $A_{\mathfrak{p}} \to B_{\mathfrak{q}}$ est un morphisme plat et local. Si $\operatorname{prof} M_{\mathfrak{p}} < q$, alors

$$\operatorname{prof}(M_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} B_{\mathfrak{q}}) < q ,$$

donc $M_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} B_{\mathfrak{q}}$ est de Gorenstein, et $M_{\mathfrak{p}}$ est un $A_{\mathfrak{p}}$-module de Gorenstein d'après (1.3 (ii)).

(ii) Soit $\mathfrak{q} \in \operatorname{Supp}(M \otimes B)$ tel que $\operatorname{prof}(M \otimes B)_{\mathfrak{q}} < q$ et soit $\mathfrak{p} = \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$.

On a $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} M$ d'après la formule ci-dessus. L'homomorphisme $A_{\mathfrak{p}} \to B_{\mathfrak{q}}$ est plat et local, et en outre

$$\operatorname{prof}(M_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} B_{\mathfrak{q}}) = \operatorname{prof} M_{\mathfrak{p}} + \operatorname{prof}(B_{\mathfrak{q}} \otimes k(\mathfrak{p})) < q \qquad ([10],\ 6.3.1).$$

Or $\operatorname{prof} M_{\mathfrak{p}} < q$ entraîne que $M_{\mathfrak{p}}$ est un $A_{\mathfrak{p}}$-module de Gorenstein et de même $\operatorname{prof}(B_{\mathfrak{q}} \otimes k(\mathfrak{p})) < q$ implique que $B_{\mathfrak{q}} \otimes k(\mathfrak{p})$ est un anneau de Gorenstein (hypothèse). Le théorème (1.3) indique que $(M \otimes B)_{\mathfrak{q}}$ est un $B_{\mathfrak{q}}$-module de Gorenstein.

2.5. THÉORÈME. - Soit $\varphi : A \to B$ un homomorphisme d'anneaux tel que B soit A-plat.

(i) Si φ est fidèlement plat et si B est un G_q-anneau, alors A est un G_q-anneau.

(ii) Si A est un G_q-anneau et si $B \otimes_A k(\mathfrak{p})$ est un G_q-anneau pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, alors B est un G_q-anneau.

2.6. COROLLAIRE. - Si A est un G_q-anneau, l'anneau des polynômes à une indéterminée $A[X]$ est un G_q-anneau.

2.7. COROLLAIRE. - Soit G un groupe abélien fini ; si A est un G_q-anneau, alors $A[G]$ est un G_q-anneau.

Preuve. - Avec les notations ci-dessus, on a les isomorphismes d'anneaux

$$A[X] \otimes_A k(\mathfrak{p}) \simeq k(\mathfrak{p})[X] \quad \text{et} \quad A[G] \otimes_A k(\mathfrak{p}) \simeq k(\mathfrak{p})[G]$$

or $k(\mathfrak{p})[X]$ est un anneau régulier ([9], 17.3.7), donc de Gorenstein, et

$$\mathrm{di}\ k(\mathfrak{p})[G] = 0$$

d'après [6] (§ 4, Cor 9', page 7). Le théorème (2.5) permet de conclure.

2.8. COROLLAIRE. - Soient k un corps commutatif, A une k-algèbre, k' une extension de k de degré fini, et soit $A' = A \otimes_k k'$. Alors A' est un G_q-anneau si, et seulement si, A est un G_q-anneau.

En effet, on sait que le morphisme canonique p : Spec $A' \to$ Spec A est fidèlement plat ([10], 2.2.13), et $A' \otimes_A k(\mathfrak{p}) \simeq k(\mathfrak{p}) \otimes_k k'$ est un anneau de Gorenstein d'après [26] (cor. 2, p. 416).

2.9. THÉORÈME (FOSSUM et REITEN [7], prop. 3). - Soient A un anneau local, et x un élément A-régulier. Si A/xA est un G_q-anneau, alors A est un G_q-anneau.

2.10. COROLLAIRE [7]. - Si A est un G_q-anneau, l'anneau des séries formelles à une indéterminée $A[[X]]$ est un G_q-anneau.

Signalons à cette occasion que la démonstration du corollaire 1 de [16] est erronée. Le résultat énoncé est celui du corollaire (2.10), prouvé par les deux auteurs ci-dessus, qui ont aussi établit indépendamment (2.4).

Comme dans [10], 5.7.2, on peut définir la condition G_q pour les schémas localement noethériens (voir [16]) et compte tenu de (2.4), elle vérifie les mêmes propriétés que la condition S_q.

Les G_q anneaux ont été utilisés pour l'étude de la q-torsion des modules ([12] et [15]) et d'autres caractérisations ont été données dans [7].

Nota. - Le théorème (1.3) a été établi également par R. Y. SHARP [25].

BIBLIOGRAPHIE

[1] AUSLANDER (M.) et BRIDGER (M.). - Stable module theory. - Providence, American mathematical Society, 1969 (Memoirs of the American mathematical Society, 94).

[2] BASS (H.). - On the ubiquity of Gorenstein rings, Math. Z., t. 82, 1963, p. 8-28.

[3] BOURBAKI (N.). - Algèbre commutative, chap. 1 et 2. - Paris, Hermann, 1961 (Act. scient. et ind., 1290 ; Bourbaki, 27).

[4] BOURBAKI (N.). - Algèbre commutative, chap. 3 et 4. - Paris, Hermann, 1967 (Act. scient. et ind., 1293 ; Bourbaki, 28).

[5] CARTAN (H.) and EILENBERG (S.). - Homological algebra. - Princeton, Princeton University Press, 1956 (Princeton mathematical Series, 19).

[6] EILENBERG (S.) and NAKAYAMA (T.). - On the dimension of modules and algebras, II., Nagoya J. Math., t. 9, 1955, p. 1-16.

[7] FOSSUM (R.) and REITEN (I.). - Commutative n-Gorenstein rings, Math. Scand., t. 31, 1972, p. 33-48.

[8] GRECO (S.) and SALMON (P.). - Topics in $\mathfrak{m}$-adic topologies. - Berlin, Springer-Verlag, 1971 (Ergebnisse der Mathematik, 58).

[9] GROTHENDIECK (A.) et DIEUDONNÉ (J.). - Eléments de géométrie algébrique, chapitre 4, première partie. - Paris, Presses universitaires de France, 1964 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques. Publications mathématiques, 20).

[10] GROTHENDIECK (A.) et DIEUDONNÉ (J.). - Eléments de géométrie algébrique, chapitre 4, seconde partie. - Paris, Presses universitaires de France, 1965 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques. Publications mathématiques, 24).

[11] HARTSHORNE (R.). - Residues and duality. - Berlin, Springer-Verlag, 1966 (Lecture Notes in Mathematics, 20).

[12] ISCHEBECK (F.). - Eine Dualität zwischen den Funktoren Ext. und Tor., J. of Algebra, t. 11, 1969, p. 510-531.

[13] KUNZ (E.) und HERZOG (J.). - Vorträge in "Der kanonische Modul eines Cohen-Macaulay-Rings", p. 17-32. - Berlin, Springer-Verlag, 1971 (Lecture Notes in Mathematics, 238).

[14] MATSUMURA (H.). - Commutative algebra. - New York, W. A. BENJAMIN, 1970.

[15] PAUGAM (M.). - G_q-anneaux et condition (a_q) de Samuel, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 274, 1972, Série A, p. 821-823.

[16] PAUGAM (M.). - La condition G_q de Ischebeck, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 276, 1973, Série A, p. 109-112.

[17] PAUGAM (M.). - La condition G_q de Ischebeck pour les modules, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 276, 1973, Série A, p. 1031-1033.

[18] REITEN (I.). - The converse to a theorem of Sharp on Gorenstein modules, Proc. Amer. math. Soc., t. 32, 1972, p. 417-420.

[19] Séminaire Samuel : Algèbre commutative, 1966/1967 : Anneaux de Gorenstein et torsion en algèbre commutative. - Paris, Secrétariat mathématique, 1967.

[20] SERRE (J.-P.). - Algèbre locale, multiplicités. - Berlin, Springer-Verlag, (Lecture Notes in Mathematics, 11).

[21] SHARP (R. Y.). - The Cousin Complex for a module over a commutative noetherian ring, Math. Z., t. 112, 1969, p. 340-356.

[22] SHARP (R. Y.). - Gorenstein modules, Math. Z., t. 115, 1970, p. 117-139.

[23] SHARP (R. Y.). - On Gorenstein modules over a complete Cohen-Macaulay local ring, Quart. J. Math., Oxford Series 2, t. 22, 1971, p. 425-434.

[24] SHARP (R. Y.). - Cousin Complex characterizations of two classes of commutative noetherian rings, J. London. math. Soc., Series 2, t. 3, 1971, p. 621-624.

[25] SHARP (R. Y.). - The Euler characteristic of a finitely generated module of finite injective dimension, Math. Z., t. 130, 1973, p. 79-93.

[26] WATANABE (K.), ISHIKAWA (T.), TACHIBANA (S.) and OTSUKA (K.). - On tensor products Gorenstein rings, J. Math. Kyoto Univ., t 9, 1969, p. 413-423.

(Texte reçu le 22 mai 1973)

Michel PAUGAM
Université de Caen
Mathématiques
Esplanade de la Paix
14032 CAEN CEDEX