

SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

ARTIBANO MICALI

Résultats récents sur la théorie des formes quadratiques

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 26 (1972-1973), exp. n° 12,
p. 1-4

http://www.numdam.org/item?id=SD_1972-1973__26__A11_0

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1972-1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

RÉSULTATS RÉCENTS SUR LA THÉORIE DES FORMES QUADRATIQUES

par Artibano MICALI

1. L'anneau de Witt d'un anneau.

Dans la suite, A désignera un anneau commutatif à élément unité, et $\text{Quad}(A)$ la catégorie des A -modules quadratiques, i. e. les objets de $\text{Quad}(A)$ sont les couples (P, q) , où P est un A -module projectif de type fini et $q : P \rightarrow A$ une forme quadratique non dégénérée, à savoir, si $\varphi : P \times P \rightarrow A$ est la forme A -bilinéaire symétrique associée à q , l'application A -linéaire $P \rightarrow P^*$ définie par $x \mapsto (y \mapsto \varphi(x, y))$ est un isomorphisme de A -modules. Les morphismes de $\text{Quad}(A)$ sont les applications A -linéaires $f : (P, q) \rightarrow (P', q')$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{f} & P' \\ & \searrow q & \swarrow q' \\ & A & \end{array}$$

La somme orthogonale

$$(P, q) \perp (P', q') = (P \oplus P', q \oplus q'),$$

où $q \oplus q' : P \oplus P' \rightarrow A$, $(x, x') \mapsto q(x) + q'(x')$, munit $\text{Quad}(A)$ d'une structure de catégorie monoïdale, on peut donc considérer le groupe de Grothendieck de $\text{Quad}(A)$, que nous appellerons le groupe de Witt-Grothendieck de A , et qu'on notera $\mathbb{W}\mathcal{S}(A)$.

A tout A -module projectif de type fini P , on peut associer un espace hyperbolique, noté $h(P)$: en tant que A -module quadratique, $h(P) = (P \oplus P^*, q)$, où $q : P \oplus P^* \rightarrow A$ est la forme quadratique définie par $(x, f) \mapsto f(x)$. Les propriétés suivantes des espaces hyperboliques sont faciles à établir.

1.1 : Quels que soient P et P' , A -modules projectifs de type fini,

$$h(P \oplus P') \approx h(P) \perp h(P'),$$

isomorphisme de A -modules quadratiques.

1.2 : Pour tout A -module quadratique (P, q) , on a un isomorphisme de A -modules quadratiques $(P, q) \perp (P, -q) \approx h(P)$.

1.3 : Pour tout A -module quadratique (P, q) et pour tout espace hyperbolique $h(R)$, on a un isomorphisme de A -modules quadratiques $(P, q) \otimes_A h(R) \approx h(P \otimes_A R)$.

Si $K_0(A)$ désigne le groupe de Grothendieck de la catégorie des A -modules projectifs de type fini, l'application $P \mapsto h(P)$ induit un morphisme de groupes abéliens $h : K_0(A) \rightarrow \mathbb{W}\mathcal{S}(A)$. Si l'on munit $\mathbb{W}\mathcal{S}(A)$ de sa structure d'anneau commutatif (à élément unité, si 2 est inversible dans A), alors $\text{Im}(h)$ est un

idéal de $\mathbb{W}\mathbb{S}(A)$.

L'anneau de Witt de l'anneau A est, par définition, l'anneau quotient

$$\mathbb{W}(A) = \mathbb{W}\mathbb{S}(A)/h(K_0(A)).$$

Il est clair que $\mathbb{W} : \underline{\text{Ann}} \rightarrow \underline{\text{Ann}}$ est un foncteur covariant défini dans la catégorie $\underline{\text{Ann}}$ des anneaux commutatifs à élément unité à valeur dans la catégorie des anneaux commutatifs.

Le calcul du groupe de Witt des entiers (Cf. [5]) nous conduit au résultat suivant.

THÉOREME 1.4. - Soient A un anneau de Prüfer, et (P, q) un A -module quadratique, où P est un A -module projectif de rang 4. Si l'algèbre de Clifford $C(P, q)$ est triviale, (P, q) est hyperbolique.

Ceci est une conséquence d'un résultat analogue dans le cas d'un corps et du résultat suivant.

THÉOREME 1.5. - Soient A un anneau de Prüfer, et K son corps de fractions. Le morphisme $\mathbb{W}(A) \hookrightarrow \mathbb{W}(K)$ qui prolonge l'injection canonique $A \hookrightarrow K$, est injectif.

On remarque que si A est un anneau de Prüfer et K son corps de fractions, pour tout idéal premier p de A , le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} A & \hookrightarrow & K \\ & \searrow & \nearrow \\ & A_p & \end{array}$$

nous fournit le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{W}(A) & \hookrightarrow & \mathbb{W}(K) \\ & \searrow & \nearrow \\ & \mathbb{W}(A_p) & \end{array}$$

donc $\mathbb{W}(A) \hookrightarrow \mathbb{W}(A_p)$ est injectif. Ceci entraîne que $\mathbb{W}(A) \hookrightarrow \bigcap_p \mathbb{W}(A_p)$. On peut se poser le problème de savoir si $\mathbb{W}(A) \hookrightarrow \bigcap_p \mathbb{W}(A_p)$ est un isomorphisme de groupes abéliens. On a le résultat suivant (Cf. [6]).

THÉOREME 1.6. - Si A est un anneau de Dedekind de caractéristique $\neq 2$, il existe un isomorphisme d'anneau $\mathbb{W}(A) \xrightarrow{\sim} \bigcap_p \mathbb{W}(A_p)$.

On remarque que la méthode suivie dans [5] pour le calcul du groupe de Witt de \mathbb{Q} (rationnels) s'étend au cas d'un corps de nombres (voir aussi [4]). D'autre part, le calcul de $\mathbb{W}(\mathbb{Q})$ par les méthodes de [5] et [9] nous permettent de calculer $\mathcal{B}_2(\mathbb{Q})$ (sous-groupe du groupe de Brauer $\mathcal{B}(\mathbb{Q})$ dont tous les éléments sont d'ordre 2).

2. Le groupe des classes d'isomorphismes d'algèbres de Clifford.

Si A est un anneau commutatif à élément unité, on note $\mathbb{W}(A)$ l'anneau des classes d'isomorphismes d'algèbres de Clifford sur A (Cf. [7]). Il existe un morphisme surjectif d'anneaux $C : \mathbb{W}(A) \rightarrow \mathbb{W}(A)$, induit par l'application

$$(P, q) \mapsto C(P, q),$$

où $C(P, q)$ désigne l'algèbre de Clifford du A -module quadratique (P, q) .

Il est intéressant de remarquer que $\mathbb{W}(A)$ est un sous-groupe de $\mathbb{B}\mathbb{W}(A)$, le groupe de Brauer-Wall de A . En effet, on sait qu'il existe une suite exacte de groupes abéliens $0 \rightarrow \mathbb{B}(A) \rightarrow \mathbb{B}\mathbb{W}(A) \rightarrow Q_2(A) \rightarrow 0$, où $Q_2(A)$ est le groupe des extensions quadratiques $(\mathbb{Z}/(2))$ -graduées de A (Cf. [10]). D'autre part, il existe un morphisme surjectif évident $\mathbb{W}(A) \rightarrow Q_2(A)$, et son noyau $N(A)$ est un sous-groupe de $\mathbb{B}_2(A)$ (sous-groupe de $\mathbb{B}(A)$ dont tous les éléments sont d'ordre 2) (Cf. théorème 6 de [7]). Le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & N(A) & \rightarrow & \mathbb{W}(A) & \rightarrow & Q_2(A) \rightarrow 0 \\ & & \downarrow \cap & & \downarrow \cap & & \parallel \\ 0 & \rightarrow & \mathbb{B}(A) & \rightarrow & \mathbb{B}\mathbb{W}(A) & \rightarrow & Q_2(A) \rightarrow 0 \end{array}$$

nous montre bien que le morphisme de groupes abéliens $\mathbb{W}(A) \rightarrow \mathbb{B}\mathbb{W}(A)$ est injectif.

Ceci répond à une question posée par A. FRÖHLICH (Cf. [3]). En fait, on a une suite exacte de groupes abéliens,

$$0 \rightarrow \mathbb{W}(A) \rightarrow \mathbb{B}\mathbb{W}(A) \rightarrow \mathbb{B}(A)/N(A) \rightarrow 0.$$

Le calcul de $\mathbb{W}(A)$ passe, parfois, par celui de $\mathbb{W}(Z)$. Avant d'en donner un exemple, on remarque que le morphisme d'anneaux $\mathbb{Z} \rightarrow A$ défini par $n \mapsto n.1$ nous donne le diagramme commutatif de groupes abéliens (et aussi, d'anneaux)

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{W}(\mathbb{Z}) & \rightarrow & \mathbb{W}(A) \\ \downarrow & \dashrightarrow & \downarrow \\ 0 \approx \mathbb{W}(A) & \rightarrow & \mathbb{W}(A) \end{array}$$

donc $\text{Im}(\mathbb{W}(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{W}(A)) \subset \text{Ker}(\mathbb{W}(A) \rightarrow \mathbb{W}(A))$.

Si, par exemple, $A = \mathbb{R}$, on sait que $\mathbb{W}(\mathbb{Z}) \hookrightarrow \mathbb{W}(\mathbb{R}) \approx \mathbb{Z}$ est injectif et que $\mathbb{W}(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}/(8)$ (Cf. [10]). Donc, $\mathbb{W}(\mathbb{Z}) \subset C \ 8 \ \mathbb{Z}$. Par ailleurs, il est clair que $8\mathbb{Z} \subset C\mathbb{W}(\mathbb{Z})$ (matrice de Milnor), donc $\mathbb{W}(\mathbb{Z}) = 8\mathbb{Z}$.

On renvoie le lecteur à la bibliographie (voir notamment [2], [4], [5] et [6]) pour d'autres résultats dans cette direction.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BASS (H.). - Lectures on topics in algebraic K-theory. - Bombay, Tata Institute, 1967 (Tata Institute of fundamental Research. Lectures on Mathematics, 41).
- [2] DORBOZ (M.). - Autour du groupe de Witt, Thèse 3^e cycle, Math., Montpellier, 1972.

- [3] FRÖHLICH (A.). - Lettre à l'auteur, du 2 mars 1972.
- [4] LABORDE (O.). - Formes quadratiques, algèbres de Clifford et signatures, C. R. Acad. Sc. Paris (à paraître).
- [5] LAROTONDA (A.), MICALI (A.) et VILLAMAYOR (O. E.). - Sur le groupe de Witt, "Symposia Mathematica", Vol. 11, p. 211-219. - London and New York, Academic Press, 1973 (Istituto nazionale di alta Matematica).
- [6] LEFRANC (C.). - Anneaux de Witt de certains anneaux de Prüfer, Thèse 3e cycle, Math., Montpellier, 1972.
- [7] MICALI (A.) et VILLAMAYOR (O. E.). - Sur les algèbres de Clifford, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 4e série, t. 1, 1968, p. 271-304.
- [8] MICALI (A.) et VILLAMAYOR (O. E.). - Algèbres de Clifford et groupe de Brauer, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 4e série, t. 4, 1971, p. 285-310.
- [9] SCHARLAU (W.). - Quadratic reciprocity laws, J. Number Theory, t. 4, 1972, p. 78-97.
- [10] SMALL (C.). - The Brauer-Wall groups of a commutative ring, Trans. Amer. math. Soc., t. 156, 1971, p. 455-491.

Artibano MICALI
Université du Languedoc
Mathématiques
Place Eugène Bataillon
34060 MONTPELLIER
