Gérard Viennot

Factorisations des monoïdes libres, bascules, et algèbres de Lie libres

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 25, n° 2 (1971-1972), exp. n° J5, p. J1-J8
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1971-1972__25_2_A5_0>

Séminaire DUBREIL (Algèbre)
25e année, 1971/72, n° J5, 8 p.
Journées d'Algèbre [1972. Paris]
Demi-groupes. Anneaux (P. DUBREIL)

29 juin 1972

FACTORISATIONS DES MONOÏDES LIBRES, BASCULES, ET ALGÈBRES DE LIE LIBRES

par Gérard VIENNOT

Introduction.

Une bi-section d'un monoïde libre X^* est un couple (U , V) de sous-monoïdes de X^* tel que tout $f \in X^*$ se factorise de manière unique en $f = uv$, $u \in U$, $v \in V$. Cet objet est un cas particulier de la notion de factorisation de monoïde libre, introduite par M. P. SCHÜTZENBERGER en [15]. D'après une communication personnelle de celui-ci, basée sur une méthode de M. LAZARD [6], on peut alors associer à toute bi-section de X^* une décomposition de l'algèbre de Lie libre $L(X)$ engendrée par X en somme directe de sous-algèbres de Lie libres dont les familles basiques sont monomiales en X (voir proposition 3.6 ci-dessous). Un cas particulier extrêmement simple de cette propriété est le théorème d'élimination de M. LAZARD [6], N. BOURBAKI [1], p. 26, ou [8] p. 318, et qui permet de donner une construction de bases de $L(X)$ (voir M. HALL [5] ou MEIER-WUNDERLI [9]). Cette propriété permettrait aussi de démontrer l'indépendance des bases construites en [2].

Le but de ce travail est d'introduire la notion de bascule, et de montrer comment celle-ci permet d'interpréter et de démontrer simplement la correspondance citée entre monoïde libre et algèbre de Lie libre, qui devient alors un "morphisme de bascule". Pour d'autres aspects de la notion de bascule, on verra [20] pour les liens avec la théorie des demi-groupes, et [22] pour certaines propriétés de nature combinatoire. Enfin pour d'autres généralisations, les factorisations de X^* et certaines applications aux demi-groupes nilpotents (au sens de [10]), on verra M. P. SCHÜTZENBERGER [15], G. VIENNOT [18], [19] et [21], et D. FOATA [3].

Notations et rappels. - X^* désigne le sous-monoïde libre engendré par X ; e désigne l'élément neutre de X^* . Pour $A \subseteq X^*$, $A^* = \bigcup_{n\geq 0} A^n$ est le sous-monoïde de X^* engendré par A . Un sous-monoïde L de X^* est dit libre lorsque L est isomorphe à un monoïde libre. Le système minimal de générateurs de L est alors appelé base ou code sur X (En somme, tout mot $f \in A^*$ se factorise de manière unique en $f = a_1 a_2 \ldots a_p$, $a_i \in A$). Pour la théorie générale des codes, on verra par exemple M. NIVAT [11].

Les démonstrations complètes des propositions ci-dessous seront exposées ultérieurement.

1. Bi-sections des monoïdes libres.

Définition 1.1. - Une bi-section du monoïde libre X^* est un couple (U , V) de sous-monoïdes de X^* tel que tout mot $f \in X^*$ se factorise de manière unique $f = uv$, $u \in U$, $v \in V$.

<u>Exemple</u> 1. - Soit (X_1 , X_2) une partition d'un ensemble X , et soient $V = X_2^*$, $U = X^* X_1 \cup \{e\}$. Alors (U , V) est une bi-section de X^* .

<u>Exemple</u> 2. - Soient

$X = \{b , a\}$, $B = \{b , b^2 a\}$, $A = \{a , ba\} \cup \{b , b^2 a\} * \{b^2 a^2 , b^2 aba\}$.

Alors (A^* , B^*) est une bi-section de X^* .

<u>Exemple</u> 3 (Voir M. P. SCHÜTZENBERGER et D. FOATA [4]). - Soit σ un morphisme de X^* dans le groupe additif des réels $\underset{\sim}{R}$. Soient U et V les deux sous-monoïdes de X^* , définis par

$$U = \{f \in X^* , \quad f = uv \Rightarrow \sigma v \geq 0\} ,$$

$$V = \{f \in X^* , \quad f = uv , u \neq e \Rightarrow \sigma u < 0\} .$$

Alors (U , V) est une bi-section de X^* .

Si (U , V) est une bi-section de X^* , U est un sous-monoïde préfixe de X^* (ou unitaire à droite), c'est-à-dire vérifiant la condition :

$$\forall\, u , v \in X^* , \quad (u \in U , uv \in U) \Rightarrow (v \in U) .$$

Sur les sous-monoïdes préfixes de X^* , on verra par exemple J.-F. PERROT [13] ou D. PERRIN [12], faisant suite aux travaux de M. P. SCHÜTZENBERGER [14]. Un monoïde préfixe est un sous-monoïde libre.

Notons par $\underset{\sim}{Z}\langle\langle X\rangle\rangle$ l'algèbre large du monoïde libre X^* , c'est-à-dire l'algèbre des séries formelles en variables non commutatives X sur l'anneau $\underset{\sim}{Z}$. Pour une partie P de X^* , nous noterons $\underset{\sim}{P}$ la série caractéristique de P : $\underset{\sim}{P} = \sum_{f \in P} f$. Alors U est un sous-monoïde libre de base A de X^* si, et seulement si, $\underset{\sim}{U} = (1 + \underset{\sim}{A} + \ldots + \underset{\sim}{A}^n + \ldots) = (1 - \underset{\sim}{A})^{-1}$. De même, (U , V) est une bi-section de X^* si, et seulement si, $\underset{\sim}{X^*} = \underset{\sim}{U}\,\underset{\sim}{V}$. En appelant A et B les bases de U et V respectivement, ceci équivaut à :

$$(1 - \underset{\sim}{X})^{-1} = (1 - \underset{\sim}{A})^{-1} (1 - \underset{\sim}{B})^{-1} \quad \text{soit} \quad \underset{\sim}{X} + \underset{\sim}{B}\,\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{A} + \underset{\sim}{B} .$$

On peut donc énoncer la proposition suivante.

PROPOSITION 1.1. - <u>Soient</u> (U , V) <u>une bi-section de</u> X^* , A <u>la base de</u> U , <u>et</u> B <u>celle de</u> V . <u>Alors</u> $BA \subseteq A \cup B$, $B^* A^* \subseteq A^* \cup B^*$, <u>tout mot de</u> $A \cup B \setminus X$ <u>se factorise de manière unique</u> $f = ba$, $a \in A$, $b \in B$.

En fait, on peut caractériser les sous-monoïdes préfixes facteurs gauches d'une bi-section de X^* :

PROPOSITION 1.2. - <u>Un sous-monoïde</u> U <u>de</u> X^* <u>est facteur gauche d'une bi-section</u> (U , V) <u>de</u> X^* <u>si, et seulement si,</u>

$$\forall\, u\,,\, v \in X^*\,,\quad (uv \in A^*) \Rightarrow (v \in A^*)$$

(C'est-à-dire consistant à droite selon la terminologie de P. DUBREIL).

Une autre caractérisation peut être donnée, en terme de représentation du monoïde libre, d'après M. P. SCHÜTZENBERGER :

Appelons automate ordonné une représentation μ de X^* dans le monoïde des endomorphismes d'un ensemble ordonné E , $\mu : X^* \to E^E$, E possédant un élément minimum ω . Pour $u \in X^*$, notons l'action de $\mu(u)$ sur un élément $s \in E$ par $s.u$. Alors le stabilisateur U de ω , $U = \{u \in X^*\,,\ \omega.u = \omega\}$, est facteur gauche d'une bi-section de X^* . Réciproquement, tout facteur gauche d'une bi-section est obtenu par ce procédé.

En appliquant la méthode "d'élimination" de M. LAZARD [6], M. P. SCHÜTZENBERGER a donné en [15] une construction générale des bi-sections de X^* . Nous rappelons ici la construction donnée en [18] ou [19], et qui redémontre le théorème de [15].

PROPOSITION 1.3. - Soit $(P\,,\,Q)$ une partition quelconque de X^* . Alors il existe un couple unique $(A\,,\,B)$ de parties de XX^* tel que :

$$A \subseteq P\,,\ B \subseteq Q\,,\qquad (1 - \underset{\sim}{X})^{-1} = (1 - \underset{\sim}{A})^{-1}\,(1 - \underset{\sim}{B})^{-1}\,.$$

De plus, A et B sont donnés par la récurrence :

$$A_1 = X \cap P \qquad\qquad B_1 = X \cap Q$$
$$A_{n+1} = (B_n\, A_n \cap P) \cup A_n \qquad\qquad B_{n+1} = (B_n\, A_n \cap Q) \cup B_n$$
$$A = \bigcup_{n\geq 1} A_n \qquad\qquad B = \bigcup_{n\geq 1} B_n\,.$$

L'étude des bi-sections de X^* est facilitée par l'introduction de la notion de bascule, qui revient à généraliser celle de bi-section.

2. Bi-sections des monoïdes libres et bascules.

Définition 2.1. - Une bascule est un triplet $T = (A\,,\,B\,,\,\varphi)$ dans lequel A et B sont deux ensembles disjoints, et φ une application de $B \times A$ dans $A \cup B$. Pour $a \in A$, $b \in B$, nous noterons aussi $\varphi(b\,,\,a) = \langle b\,,\,a\rangle$.

Définition 2.2. - Soient $T = (A\,,\,B\,,\,\varphi)$ et $T' = (A'\,,\,B'\,,\,\varphi')$ deux bascules. Un morphisme $f : T \to T'$ est une application de $A \cup B$ dans $A' \cup B'$ telle que $f(A) \subseteq A'$, $f(B) \subseteq B'$ et

$$\forall\, a \in A\,,\ \forall\, b \in B\,,\qquad f(\langle b\,,\,a\rangle) = \langle f(b)\,,\,f(a)\rangle\,.$$

Nous pouvons ainsi parler de la catégorie des bascules. Une sous-bascule de $T = (A\,,\,B\,,\,\varphi)$ est définie par la donnée de deux parties $U \subseteq A$, $V \subseteq B$ telles que

$$\langle V\,,\,U\rangle = \{\langle v\,,\,u\rangle\,,\ u \in U\,,\ v \in V\} \subseteq U \cup V\,.$$

On identifiera cette sous-bascule avec (U , V). On peut définir l'intersection d'une famille de sous-bascules $\{T_i = (A_i , B_i) , i \in I\}$ de T comme la sous-bascule $T' = (\bigcap A_i , \bigcap B_i)$. On peut alors parler de la bascule engendrée par une partie X de $A \cup B$. Celle-ci se construit par récurrence :

$$T_1(X) = X ,$$

$$T_{n+1} = \{u \in A \cup B , \quad u = \langle b,a\rangle \quad \text{avec} \quad b \in B \cap T_p(X) , \quad a \in A \cap T_q(X) , \quad p+q=n+1\} .$$

En appelant $T(X) = \bigcup_{n\geq 1} T_n(X)$, la sous-bascule, engendrée par X, est

$$(B \cap T(X) , \quad A \cap T(X)) .$$

Les éléments de $T(X)$ seront appelés des X-produits de bascule de degré n.

Une congruence σ de bascule est définie par la donnée d'une relation d'équivalence sur $A \cup B$ saturant A et B et telle que :

$$\forall\, a , a' \in A , \quad \forall\, b , b' \in B , \quad (a\,\sigma\, a' \quad \text{et} \quad b\,\sigma\, b') \Longrightarrow (\langle b , a\rangle\, \sigma\, \langle b' , a'\rangle) .$$

On définirait de même facilement les notions de bascule quotient, de bascule image, d'image réciproque de bascule.

Soient (U , V) une bi-section de X^*, A la base de U, et B celle de V. Notons φ la restriction du produit de X^* à $B \times A$. Alors $T = (A , B , \varphi)$ est une bascule. Les bascules de ce type seront appelées libres. Nous allons donner une caractérisation des bascules libres.

Définition 2.3. - Soit $T = (A , B , \varphi)$ une bascule. Nous notons par $M(T)$ le monoïde ayant $A \cup B$ comme générateurs et défini par les relations :

$$\forall\, a \in A , \quad \forall\, b \in B , \qquad ba = \langle b , a\rangle .$$

Nous avons là un foncteur de la catégorie des bascules dans celle des monoïdes. Il est aisé de vérifier que tout élément de $M(T)$ se factorise de manière unique

$$f = a_1\, a_2 \dots a_p\, b_1\, b_2 \dots b_q \qquad (a_i \in A' , \; b_j \in B') ,$$

A' et B' étant deux parties de $M(T)$ en bijection respectivement avec A et B. Lorsque la bascule T est libre, $M(T)$ est en fait isomorphe à X^*. Cette propriété est caractéristique :

PROPOSITION 2.1. - *Une bascule* T *est libre si, et seulement si,* $M(T)$ *est un monoïde libre.*

Cette proposition permet de donner une caractérisation algébrique des bascules libres. Pour ceci, donnons la définition suivante.

Définition 2.4. - On appelle base d'une bascule $T = (A , B , \varphi)$, toute partie X de $A \cup B$ vérifiant les deux conditions :

T est engendrée par X ;

Tout élément de X ne peut être un X-produit de bascule de degré > 1.

Remarquons qu'une bascule admet au plus une base. Celle-ci est un système minimal de générateurs.

Remarquons qu'un monoïde M est libre si et seulement si tout $f \in M$ n'admet qu'un nombre fini de factorisations $f = f_1 f_2 \dots f_n$ et si M est équidivisible (au sens de McKNIGHT et STOREY [7]). Alors on a le résultat ci-après.

LEMME. - Soit T une bascule. $M(T)$ est équidivisible si, et seulement si, T vérifie

$$\forall\, a\,,\, a' \in A\,,\ \forall\, b\,,\, b' \in B\,, \quad (\langle b,a\rangle = \langle b',a'\rangle) \Longleftrightarrow (a = a' \ \text{et}\ b = b')\,.$$

Nous pouvons alors énoncer la proposition qui va suivre.

PROPOSITION 2.2. - Une bascule T est libre si, et seulement si, T vérifie les deux conditions :

$$\forall\, a\,,\, a' \in A\,,\ \forall\, b\,,\, b' \in B\,, \quad (\langle b\,,\, a\rangle = \langle b'\,,\, a'\rangle) \Longleftrightarrow (a = a' \ \text{et}\ b = b')\ ;$$

T admet une base.

Enfin, la proposition suivante est utile dans la construction de certaines bisections (voir G. VIENNOT [22]) :

PROPOSITION 2.3. - Soient $T' = (A'\,,\, B'\,,\, \varphi')$ une bascule, X un ensemble, et f une application $X \dashrightarrow A' \cup B'$. Alors il existe une, et une seule, bascule libre $T = (A\,,\, B\,,\, \varphi)$ image réciproque de T' selon un morphisme F prolongeant f. De plus, ce morphisme F est alors unique.

3. Bascules et algèbres de Lie libres.

Dans ce paragraphe, K désigne un anneau commutatif unitaire, non réduit à 0, dont l'élément unité est noté 1.

Nous notons par $L(X)$ l'algèbre de Lie libre engendrée par l'ensemble X non vide sur l'anneau K. $K\langle X\rangle$ désigne l'algèbre associative libre sur K engendrée par X, c'est-à-dire l'algèbre du monoïde libre X^*. $K_L\langle X\rangle$ est l'algèbre de Lie associée à l'algèbre associative $K\langle X\rangle$, et nous identifierons $L(X)$ avec la sous-algèbre de Lie de $K_L\langle X\rangle$ engendrée par X.

DÉFINITION et PROPOSITION 3.1. - Soit $T = (A\,,\, B\,,\, \varphi)$ une bascule. Il existe une, et une seule, algèbre de Lie, notée $L(T)$, ayant pour module sous-jacent $L(A) \oplus L(B)$ et dont le produit de Lie $[x\,,\, y]$ prolonge ceux de $L(A)$ et $L(B)$, et vérifie :

$$\forall\, a \in A\,,\ \forall\, b \in B\,, \qquad [b\,,\, a] = \langle b\,,\, a\rangle\,.$$

DÉFINITION et PROPOSITION 3.2. - Soit $T = (A\,,\, B\,,\, \varphi)$ une bascule. Il existe une et une seule, algèbre associative, notée $K\langle T\rangle$, dont le module sous-jacent est

$K\langle A\rangle \otimes K\langle B\rangle$ (c'est-à-dire l'algèbre du monoïde $A^* \times B^*$), et dont le produit $x.y$ prolonge ceux de $K\langle A\rangle$ et de $K\langle B\rangle$, et vérifie :

$$\begin{aligned} &\forall\, a \in A\,,\ \forall\, b \in B\,, \quad b.a = a \otimes b + \langle b\,,\,a\rangle \\ &\forall\, \alpha \in A^*\,,\ \forall\, \beta \in B^*\,, \quad \alpha.\beta = \alpha \otimes \beta \end{aligned} \quad \left(\begin{aligned} &\text{en identifiant } \alpha \text{ et } \alpha \otimes 1 \\ &\qquad\qquad\quad\ \beta \text{ et } 1 \otimes \beta \end{aligned}\right)$$

PROPOSITION 3.3. - Pour une bascule T, $K\langle T\rangle$ est l'algèbre enveloppante de $L(T)$.

L'application $T \to L(T)$ (resp. $T \to K\langle T\rangle$), avec une correspondance évidente sur les flèches, est un foncteur de la catégorie des bascules dans celle des algèbres de Lie (resp. algèbres associatives).

Soit T une bascule libre $T = (A\,,\,B\,,\,\varphi)$, c'est-à-dire $(A^*\,,\,B^*)$ est une bi-section d'un monoïde libre X^*. Soit f l'application de $A \cup B$ dans $L(X)$, définie par récurrence :

$$\begin{cases} \text{pour } x \in X\,,\ f(x) = x \in L(X) \\ \text{pour } x \in (A \cup B) \setminus X\,,\ x = ba \ (a \in A\,,\, b \in B) \text{ de manière unique,} \end{cases}$$

alors

$$f(x) = [f(b)\,,\,f(a)] \in L(X)\,.$$

L'application f est injective.

Soit T' la bascule $T' = (A'\,,\,B'\,,\,\varphi')$ avec $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, et φ' défini par

$$\forall\, a \in A'\,,\ \forall\, b \in B'\,,\quad \varphi'(b\,,\,a) = [b\,,\,a] \in A' \cup B' \qquad (A' \cap B' = \emptyset)\,.$$

La proposition 2.2 permet alors de démontrer les propositions suivantes :

PROPOSITION 3.4. - T' est une bascule isomorphe à T, $L(T')$ est isomorphe à $L(X)$, $K\langle T'\rangle$ est isomorphe à $K\langle X\rangle$.

PROPOSITION 3.5. - Une bascule T est libre si, et seulement si, $L(T)$ (resp. $K\langle T\rangle$) est une algèbre de Lie (resp. associative) libre.

Une conséquence directe est la propriété annoncée :

PROPOSITION 3.6. - Soient $(A^*\,,\,B^*)$ une bi-section de

$$X^* :\ (1 - \underset{\sim}{X})^{-1} = (1 - \underset{\sim}{A})^{-1}\,(1 - \underset{\sim}{B})^{-1}$$

et A' et B', famille d'alternants de $L(X)$, construits comme ci-dessus. Alors les algèbres de Lie engendrées par A' (resp. B') (libres d'après [17] ou [23]) ont pour famille basique A' (resp. B'). De plus :

$$L(X) = L(A') \oplus L(B') \qquad \text{(en tant que module).}$$

Les parties A' et B', considérées comme des polynômes de $K\langle X\rangle$, engendrent

<u>des algèbres associatives libres isomorphes respectivement à</u> $K\langle A\rangle$ <u>et</u> $K\langle B\rangle$. <u>De plus, les polynômes</u> $a_1 a_2 \ldots a_p b_1 \ldots b_q$ $(a_i \in A'$, $b_j \in B')$ <u>forment une base de</u> $K\langle X\rangle$.

Le théorème d'élimination de N. BOURBAKI [1] ou de [8] correspond à l'exemple 2 du § 1, c'est-à-dire $X = X_1 + X_2$, $A = X_2^* X_1$, $B = X_2$.

Nous avons donné en [22] une construction générale des bi-sections (U , V) de X^* telles que U et V soient des sous-monoïdes de X^* saturés par une congruence d'index fini. La bascule libre associée (A , B) est alors image réciproque d'une base finie T (c'est-à-dire dont les facteurs sont finis) d'un certain type appelé (S) . La proposition 3.6 permet alors de montrer que $L(T)$ est obtenue par certaines extensions inessentielles successives. Par contre, pour les bascules "associatives" de [20], le type (S) correspond à des extensions successives de "produit de translation". Nous avons une certaine correspondance entre les dérivations des algèbres de Lie et les translations dans les demi-groupes.

Enfin, une application directe de la proposition 3.6 (voir [21]), est de donner une construction d'une famille de bases des algèbres de Lie libres, généralisant celles définies en [2], [5], [9] et [17].

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI (N.). - Groupes et algèbres de Lie, Chapitre 2. - Paris, Hermann, 1972 (Act. scient. et ind., 1349 ; Bourbaki, 37).

[2] CHEN (K. T.), FOX (R. H.) and LYNDON (R. C.). - Free differential calculus, IV., Annals of Math., Series 2, t. 68, 1958, p. 81-95.

[3] FOATA (D.). - Etude algébrique de certains problèmes d'analyse combinatoire et du calcul des probabilités, Publ. Inst. Statist.Univ. Paris, t. 14, 1965, p. 81-241 (Thèse Sc. math. Paris, 1965).

[4] FOATA (D.) et SCHÜTZENBERGER (M. P.). - On the principle of equivalence of Sparre-Andersen, Math. Scand., t. 28, 1971, p. 308-316.

[5] HALL (M.). - A basis for free Lie rings and higher commutators in free groups, Proc. Amer. math. Soc., t. 1, 1950, p. 575-581.

[6] LAZARD (M.). - Groupes, anneaux de Lie et problème de Burnside, Ist. Mat. Univ. Roma, 1960.

[7] McKNIGHT (J. D.) and STOREY (A. J.). - Equidivisible semigroups, J. of Algebra, t.12, 1969, p. 24-48.

[8] MAGNUS (W.), KARRASS (A.) and SOLITAR (D.). - Combinatorial group theory. - New York, Interscience Publishers, 1966 (Pure and applied Mathematics, Interscience, 13).

[9] MEIER-WUNDERLI (H.). - Note on a basis of P. Hall for the higher commutators in free groups, Comment. Math. Helvet., t. 26, 1952, p. 1-5.

[10] NEUMANN (B. H.) and TAYLOR (Tekla). - Subsemigroups of nilpotent groups, Proc. Roy. Soc. London, Series A, t. 274, 1963, p. 1-4.

[11] NIVAT (M.). - Elément de la théorie générale des codes, "Automata theory", p. 278-294. - New York, Academic Press, 1966.

[12] PERRIN (D.). - Le langage engendré par un code préfixe et son monoïde syntaxique, Thèse 3e cycle, math., Paris 1970.

[13] PERROT (J. F.). - On the relationship between finite automata, finite monoides and prefix codes, "ACM Symposium on theory of Computing [1970. Northampton].

[14] SCHÜTZENBERGER (M. P.). - Une théorie algébrique du codage, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et théorie des nombres, 9e année, 1955/56, n° 15, 24 p.

[15] SCHÜTZENBERGER (M. P.). - On a factorisation of free monoïdes, Proc. Amer. math. Soc., t. 16, 1965, p. 21-24.

[16] SCHÜTZENBERGER (M. P.). - Communication personnelle.

[17] ŠIRŠOV (A. I.). - Subalgebras of free Lie algebras [en russe], Mat. Sbornik, N. S., t. 33, 1953, p. 441-452.

[18] VIENNOT (G.). - Factorisations des monoïdes, Thèse Sc. math. Univ. Paris-7, 1971.

[19] VIENNOT (G.). - Factorisations de certains monoïdes, Journées sur la théorie algébrique des demi-groupes [1971. Lyon].

[20] VIENNOT (G.). - Bascule associative, Séminaire P. Dubreil : Algèbre, 25e année, 1971/72, n° 9, 8 p.

[21] VIENNOT (G.). - Factorisations des monoïdes libres (à paraître).

[22] VIENNOT (G.). - Automate et Bascule, "Automata, languages and Programming" [1972. Rocquencourt], p. 123-133. - Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1973.

[23] WITT (E.). - Die Unterringe der freien Lieschen Ringe, Math. Z., t. 64, 1956, p. 195-216.

Gérard VIENNOT
10 allée Bernadotte
92330 SCEAUX