Alfred H. Clifford

Demi-groupes bisimples unipotents à gauche

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 25, nº 2 (1971-1972), exp. nº J4, p. J1-J9
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1971-1972__25_2_A4_0>

Séminaire DUBREIL (Algèbre)
25e année, 1971/72, n° J4, 9 p.
Journées d'Algèbre [1972. Paris]
Demi-groupes. Anneaux (P. DUBREIL)

29 juin 1972

DEMI-GROUPES BISIMPLES UNIPOTENTS À GAUCHE

par Alfred H. CLIFFORD

Rappelons-nous qu'un demi-groupe S est régulier si, et seulement si, chaque $\mathcal{R}$-classe (ou bien chaque $\mathcal{L}$-classe) de S contient un élément idempotent, et inverse si, et seulement si, chaque $\mathcal{R}$-classe et chaque $\mathcal{L}$-classe de S contient exactement un seul élément idempotent ([5], § 2.3). [Comme d'habitude, nous écrirons

$$\mathcal{R}\ ,\ \mathcal{L}\ ,\ \mathcal{H} = \mathcal{R} \cap \mathcal{L}\ ,\ \mathcal{D} = \mathcal{R} \circ \mathcal{L} = \mathcal{L} \circ \mathcal{R}$$

pour les relations de Green [5], § 2.1.]

Si chaque $\mathcal{L}$-classe de S contient, exactement, un seul idempotent, alors S est appelé " $\mathcal{L}$-unipotent" par R. J. WARNE [15], inverse à droite par P. S. VENKATESAN [13], et inverse à gauche par G. L. BAILES [1] ; nous appellerons un tel S <u>unipotent à gauche</u>.

Nous nous proposons d'examiner la structure des demi-groupes S unipotents à gauche qui sont également <u>bisimples</u>, c'est-à-dire qui consistent d'une seule $\mathcal{D}$-classe. Pour éviter les distractions techniques, nous exigeons que S possède un élément neutre 1 , et que 1 est le seul élément inversible dans S , c'est-à-dire que $(ab = ba = 1)$ implique $(a = 1$ et $b = 1)$.

La structure d'un demi-groupe bisimple inverse S , avec élément neutre 1 , était trouvée dans [2] en termes de la $\mathcal{R}$-classe $R = R_1$ de S contenant 1 . R est sous-demi-groupe de S jouissant de quelques propriétés, et l'on exprime les éléments de S comme couples ordonnés (a , b) d'éléments a , b de R . Un raffinement de cette méthode était donné dans [5], § 8.4, mais la forme que nous donnons ici à la multiplication dans un demi-groupe bisimple unipotent à gauche (théorème A) revient à celle de l'article [2] ; voir aussi REILLY [11].

Dans le cas inverse, S est déterminé par R , mais nous verrons à la fin de cette note (proposition 4) que ceci ne reste pas valable dans le cas unipotent à gauche.

Nous remarquons que W. D. MUNN ([8], [9], [10]) a donné une théorie de structure pour les demi-groupes bisimples inverses, généralisée par T. E. HALL [1], qui est tout à fait différente de celle-ci. Nous ne pouvons pas l'examiner dans le cadre de cet exposé.

Nous remarquons aussi que R. J. WARNE a donné dans [17] une théorie des demi-groupes bisimples réguliers. Il donne un résumé de ses travaux sur ce sujet dans [18]. De même E. W. EWING [6] donne une construction pour une classe de demi-groupes un peu plus restreinte que celle des demi-groupes bisimples unipotents à gauche.

Notation. - Pour deux éléments a , b d'un demi-groupe S , $a \perp b$ veut dire que a et b sont inverses l'un de l'autre, c'est-à-dire que $aba = a$ et $bab=b$.

1. Préliminaires.

Avec G. B. PRESTON et ses disciples, nous dirons qu'un demi-groupe S est *orthodoxe* s'il est régulier, et si l'ensemble E_S d'idempotents de S est sous-demi-groupe de S (c'est-à-dire que E_S est une bande, demi-groupe dont tous les éléments sont idempotents).

Rappelons-nous qu'une bande E peut s'exprimer comme demi-treillis Y de bandes rectangulaires E_α $(\alpha \in Y)$: $E = \bigcup_{\alpha \in Y} E_\alpha$ (réunion disjointe) et $E_\alpha E_\beta \subseteq E_{\alpha\beta}$ ($\alpha\beta$ le produit de α et β dans Y). Les $\mathcal{L}$-classes de E sont celles des composants E_α , et par conséquent E est unipotent à gauche si, et seulement si, chaque bande rectangulaire E_α se réduit à une seule ligne, c'est-à-dire que chaque E_α est un demi-groupe zéro à droite.

La proposition suivante due à REILLY et SCHEIBLICH [12] est très utile.

PROPOSITION 1. - *Pour un demi-groupe régulier* S , *les conditions suivantes sont équivalentes* :

(i) E_S *est un sous-demi-groupe de* S ;

(ii) *Si* $a \perp a'$ *et* $b \perp b'$ $(a , b , a' , b' \in S)$, *il vient* $ab \perp b'a'$;

(iii) *Si* $a \perp e$, *où* $a \in S$ *et* $a \in E_S$, *il vient* $a \in E_S$.

En fait, les implications (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) sont valables dans un demi-groupe quelconque, mais non (iii) $\Longrightarrow$ (i).

WARNE [15], VENKATESAN [13], et BAILES [1] ont démontré indépendamment la proposition suivante.

PROPOSITION 2. - *Un demi-groupe* S *est unipotent à gauche si, et seulement s'il vérifie les deux conditions suivantes* :

(i) S *est orthodoxe* ;

(ii) E_S *est unipotent à gauche*.

Démonstration. - Prenons S unipotent à gauche, et supposons que $a \perp e$, où $a \in S$ et $a \in E_S$. Alors ae est un idempotent dans L_e , et puisque S est unipotent à gauche, $ae = e$. Par conséquent, $a = aea = ea$, et $a^2 = aea = a$. Ainsi (i) est valable, et (ii) est évident.

Inversement, supposons remplies les conditions (i) et (ii). (i) exige que S soit régulier, si bien que chaque $\mathcal{L}$-classe de S contient au moins un idempotent. Si e et f sont deux idempotents dans la même $\mathcal{L}$-classe, $ef = e$, $fe = f$, et $e \mathcal{L} f$ dans la bande E_S ; ceci entraîne que $e = f$ à cause de (ii).

La proposition suivante est une spécialisation du théorème 2.1 et du lemme 2.3 de [2].

PROPOSITION 3. - Soit S un demi-groupe avec élément neutre 1 et sans éléments inversibles $\neq 1$. Soit R, L, D les $\mathcal{R}$-, $\mathcal{L}$-, et $\mathcal{D}$-classes de S contenant 1. Alors, S est bisimple si, et seulement si, $S = LR$. De plus, $(a'b = c'd$ $(a', c' \in L, b, d \in R))$ entraîne $(a' = c'$ et $b = d)$.

Démonstration. - Si $a' \in L$ et $b \in R$, on a $a'b \in R_{a'} \cap L_b$, puisque $L_{a'} \cap R_b$ contient l'idempotent 1. Par conséquent, $LR \subseteq D$. Inversement, si $c \in D$, $R \cap L_c \neq \square$. Puisque $\mathcal{H}$ est l'égalité dans S, $R \cap L_c = \{a\}$ pour un élément a de S, et $L \cap R_c = \{b'\}$ pour un élément b' de L. Puisque $L_{b'} \cap R_a$ contient l'idempotent 1, $b'a \in R_{b'} \cap L_a = H_c$; ceci entraîne que $c = b'a \in LR$. Ainsi, $LR = D$, et S est bisimple si, et seulement si, $S = D$.

Puisque $a'b \in R_{a'} \cap L_b$, l'égalité $a'b = c'd$ entraîne que $a' \mathcal{R} c'$ et $b \mathcal{L} d$. Puisque $a' \mathcal{L} c'$ et $b \mathcal{R} d$, nous avons $a' \mathcal{H} c'$ et $b \mathcal{H} d$, et ceci entraîne que $a' = c'$ et $b = d$.

Nous désignerons les éléments de R par $a, b, c, \ldots$ et ceux de L par $a', b', c', \ldots$. Mais si, par exemple, a et a' apparaissent simultanément dans une démonstration, nous supposerons toujours que $a \perp a'$. Suivant la proposition 3, nous pouvons décrire les éléments d'un demi-groupe S bisimple avec 1 et sans éléments inversibles $\neq 1$ par les "coordonnées" (a', b), $a' \in L$ et $b \in R$.

2. Structure d'un demi-groupe bisimple unipotent à gauche avec élément neutre et sans éléments inversibles $\neq 1$.

Soit S un tel demi-groupe. Si $a \in R$ et si $a', a'' \in L$ et $a' \perp a$, $a'' \perp a$, alors $a'a$ et $a''a$ sont idempotents dans L_a. Puisque S est unipotent à gauche, $a'a = a''a$, et la proposition 3 entraîne que $a' = a''$. Ainsi chaque élément a de R a un inverse unique a' dans L. La partie (ii) de la proposition 1 montre que l'application $a \longmapsto a'$ de R dans L est un anti-homomorphisme. Le noyau K de cet anti-homomorphisme (c'est-à-dire la relation binaire sur R définie par aKb si $a' = b'$) est une congruence en R, et R/K est anti-isomorphe à L. Nous remarquons que $a K 1$ entraîne que $a' = 1$, si bien que $a = aa' = 1$.

R est sous-demi-groupe de S simplifiable à droite

$$(ac = bc) \Longrightarrow (a = acc' = bcc' = b) .$$

De même, L est sous-demi-groupe de S simplifiable à gauche :

$$(c'a' = c'b') \Longrightarrow (a' = cc'a' = cc'b' = b') ,$$

où c est un élément quelconque de R inverse à c'. Par conséquent, R/K est simplifiable à droite.

Si $a \in R$, $a' a$ est l'unique idempotent appartenant à L_a . L'application $a \longmapsto a' a$ est une bijection de R sur E_S . Elle est injective car $\mathcal{H}$ est l'égalité dans notre cas, et elle est surjective car, si $e \in E_S$, il existe a dans $R \cap L_e$ puisque S est bisimple, si bien que $a' a = e$? Nous transportons l'opération binaire de E_S à R au moyen de cette bijection, et nous la noterons avec $(\circ)$. Ainsi, si $a , b , c \in R$,

(2.1) $$(a \circ b = c) \Longleftrightarrow ((a' a)(b' b) = c' c) .$$

Nous emploierons cette formule souvent sous la forme équivalente

(2.2) $$(a \circ b)' (a \circ b) = (a' a)(b' b) .$$

Nous remarquerons que $a' = b'$ si, et seulement si, $a' a \mathcal{R} b' b$, et par suite,

(2.3) $$a \mathcal{R}(\circ) b \Longleftrightarrow a K b ,$$

où $\mathcal{R}(\circ)$ désigne la relation $\mathcal{R}$ de Green sur la bande $R(\circ)$. Ainsi, K est identique à la relation $\mathcal{R}(\circ)$, et par conséquent $(a K b) \Longrightarrow (a \circ b = b)$. Nous remarquons aussi que $\mathcal{R}(\circ) = \mathcal{D}(\circ)$ dans notre cas, et si $E_S = \bigcup_{\alpha \in Y} E_\alpha$ est la décomposition de la bande E_S en un demi-treillis Y de bandes rectangulaires, alors $a K b$ si, et seulement si, a et b appartiennent à la même composante E_α .

Plus tard, nous commencerons par prendre un ensemble R muni de deux opérations binaires, $(.)$ et $(\circ)$, qui satisfont aux axiomes suivants :

(I) $R(.)$ est un demi-groupe, simplifiable à droite, possédant un élément neutre 1 qui est le seul élément inversible $(ab = ba = 1) \Longrightarrow (a = b = 1)$.

(II) $R(\circ)$ est une bande unipotente à gauche (c'est-à-dire, pour laquelle $\mathcal{R}(\circ) = \mathcal{D}(\circ)$), et pour laquelle le même élément 1 est élément neutre.

Écrivons K pour $\mathcal{R}(\circ)$. Alors $a K b$ entraîne que $a \circ b = b$ et $b \circ a = a$. Puisque la relation $\mathcal{D}$ dans une bande est une congruence, K est une congruence dans $R(\circ)$.

(III) K est aussi une congruence dans $R(.)$, et le demi-groupe quotient R/K est simplifiable à droite.

(IV) $(a \circ b)c = ac \circ bc$ (pour tous $a , b , c \in R$).

(V) A chaque paire d'éléments a , b de R correspond un élément $y \in R$ tel que

$$a \circ c = yc ,$$

pour chaque $c \in R$ tel que $b K c$.

Si nous commençons par un demi-groupe S bisimple unipotent à gauche, avec élément neutre 1 , qui est le seul élément inversible, si R est la $\mathcal{R}$-classe de S contenant 1 , et si nous définissons $(\circ)$ dans R selon (2.1), alors les cinq propriétés (I)-(V) sont valables. D'ailleurs, nous avons déjà démontré (I)-(III).

Vérification de (IV). – Utilisant (2.2), la proposition 1, et $cc' = 1$, nous avons

$$
\begin{aligned}
(ac \circ bc)' (ac \circ bc) &= (ac)' (ac)(bc)' (bc) \\
&= c' a' acc' b' bc = c' a' ab' bc \\
&= c'(a \circ b)' (a \circ b)c \\
&= [(a \circ b)c]' [(a \circ b)c] .
\end{aligned}
$$

D'après la proposition 3, nous obtenons (IV).

Vérification de (V). – Utilisant la proposition 3, il existe x' dans L et y dans R tels x $ab' = x' y$. Si $b K c$, alors $b' = c'$, et (2.2) entraîne

$$(a \circ c)' (a \circ c) = a' ac' c = a' ab' c = (a' x')(yc) .$$

Par suite, $a \circ c = yc$, grâce à la proposition 3. En commençant par un système $R(. , \circ)$, remplissant les conditions (I)-(V), nous définissons la relation σ dans le produit cartésien $R \times R$ par

$$((a , b) \sigma (c , d)) \Longleftrightarrow (a K c \quad \text{et} \quad b = d) . \tag{2.4}$$

σ est visiblement relation d'équivalence. Notons par $(a , b)_\sigma$ la σ-classe contenant la paire (a , b) de $R \times R$, et posons $T = (R \times R)/\sigma$ de façon univoque.

L'élément y dans V est déterminé par a et b, puisque R est simplifiable à droite, selon I. Posons $y = a * b$. En fait, $*$ est une troisième opération binaire dans R définie par

$$a \circ b = (a * b)b \qquad (a , b \in R) . \tag{2.5}$$

D'après (V), nous avons

$$(b K c) \Longrightarrow (a * b = a * c) . \tag{2.6}$$

Définissons maintenant une opération binaire dans T par

$$(a , b)_\sigma (c , d)_\sigma = ((c * b)a , (b * c)d)_\sigma . \tag{2.7}$$

THÉORÈME A. – L'opération définie dans T par (2.7) est univoque et associative, et le demi-groupe T est bisimple et unipotent à gauche, et possède en outre un élément neutre $(1 , 1)_\sigma$ qui est le seul élément inversible. La $\mathcal{R}$-classe de T contenant $(1 , 1)_\sigma$ est isomorphe à $R(.)$, et la bande E_T des idempotents est isomorphe à $R(\circ)$.

Inversement, si S est un demi-groupe bisimple et unipotent à gauche, possédant un élément neutre 1 qui est le seul élément inversible de S, si R est la $\mathcal{R}$-classe contenant 1, et si nous définissons $(\circ)$ dans R par (2.2), alors le système $R(. , \circ)$ remplit les conditions (I)-(V), et le demi-groupe $T = (R\times R)/\sigma$, défini comme ci-dessus, est isomorphe à S.

Nous nous bornons à la démonstration de la proposition inverse. Nous avons déjà démontré la validité des conditions (I)-(V), et il reste à montrer que l'application $\theta : T \to S$, définie par

$$(a\ ,\ b)_\sigma\ \theta = a'\ b\ , \tag{2.8}$$

est un isomorphisme.

D'abord, θ est <u>univoque</u>, car si $(a\ ,\ b)_\sigma = (c\ ,\ d)_\sigma$, alors $a\ K\ c$ et $b = d$, ainsi $a' = c'$, et enfin $a'\ b = c'\ d$. θ est <u>surjective</u>, selon la proposition 3. Pour vérifier qu'elle est injective, supposons $a'\ b = c'\ d$. Alors, utilisant une fois de plus la proposition 3, $a' = c'$ et $b = d$, c'est-à-dire $a\ K\ c$ et $b=d$, d'où $(a\ ,\ b)_\sigma = (c\ ,\ d)_\sigma$.

Pour montrer que θ est un homomorphisme, soient $(a\ ,\ b)_\sigma$ et $(c\ ,\ d)_\sigma$ deux éléments quelconques de T. D'après (2.), $b \circ c = (b * c)c$. Comme dans une bande quelconque, $(b \circ c)\ \mathcal{D}\ (c \circ b)$, ceci entraîne $(b \circ c)\ K\ (c \circ b)$ dans notre cas, c'est-à-dire

$$(b \circ c)' = (c \circ b)' = [(c * b)b]' = b'(c * b)'\ .$$

Suivant (2.2),

$$\begin{aligned} bc' &= b(b'\ bc'\ c)c' = b(b \circ c)'\ (b \circ c)c' \\ &= bb'(c * b)'\ (b * c)cc' = (c * b)'\ (b * c)\ . \end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned} [(a\ ,\ b)_\sigma\ (c\ ,\ d)_\sigma]\theta &= [(c * b)a\ ,\ (b * c)d)]_\sigma\ \theta \\ &= a'(c * b)'\ (b * c)d \\ &= a'\ bc'\ d \\ &= (a\ ,\ b)_\sigma\ \theta.(c\ ,\ d)_\sigma\ \theta\ . \end{aligned}$$

3. Demi-groupes bisimples unipotents à gauche de type ω.

La construction de demi-groupes bisimples unipotents à gauche selon le théorème A n'est pas facile. Nous donnerons ici une méthode simple qui nous permettra de construire aisément beaucoup d'exemples.

On dit qu'une bande $E = \bigcup_{\alpha \in Y} E$ est de <u>type</u> ω si Y est une chaîne infinie décroissante (anti-isomorphe à la chaîne $0 < 1 < 2 < \dots$ des entiers non négatifs). Ainsi, on peut écrire $E = \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n$ avec $E_m\ E_n \subseteq E_k$, où $k = \max(m\ ,\ n)$. On dit qu'un demi-groupe S orthodoxe est de <u>type</u> ω si la bande E_S est de type ω.

Soit S un demi-groupe bisimple, unipotent à gauche, de type ω, avec élément neutre 1 qui est le seul élément inversible de S. Posons $E_S = \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n$ comme ci-dessus. Notons que $E_0 = \{1\}$. Chaque E_n est contenu dans une $\mathcal{R}$-classe R_n de S. Soit $L \cap R_1 = \{t\}$. On peut alors démontrer sans difficulté que

$$L \cap R_n = \{t^n\}\ .$$

Par conséquent, $L = \{1\ ,\ t\ ,\ t^2\ ,\ \dots\ ,\ t^n\ ,\ \dots\}$. Posons $t^0 = 1$.

Soit $a \in R$. Alors $a' \in L$, et il existe un entier non négatif unique tel que $a' = t^n$. Nous écrivons $n = a\delta$ (le "degré" de a). Si $b \in R$, $b' = t^m$, ainsi $m = b\delta$, alors $(ab)' = b'\,a' = t^{m+n}$, d'où nous avons

$$(3.1) \qquad (ab)\delta = m + n = a\delta + b\delta \ .$$

Nous appelons <u>fonction de degré</u> en R un homomorphisme $\delta : R \to N^0$ (où N^0 désigne le demi-groupe additif des entiers non négatifs) qui est surjective et pour laquelle $(a\delta = 0) \Rightarrow (a = 1)$. Nous voyons que la fonction δ définie ci-dessus est une fonction de degré en R .

Pour un élément a de $R \setminus 1$, nous définissons $a\mu = at$. Soit $n = a\delta$ (> 0 puisque $a \neq 1$). Alors $a' = t^n$, et $1 = aa' = at^n = (at)t^{n-1}$. Par conséquent, $a\mu = at \in R$, $(a\mu)' = t^{n-1}$, et

$$(3.2) \qquad (a\mu)\delta = (a\delta) - 1 \ .$$

De plus, $(ab)\mu = (ab)t = a(bt) = a(b\mu)$, si $b \in R \setminus 1$; ceci démontre que μ est une translation à droite de $R \setminus 1$ dans R .

Puisque $at^{a\delta} = 1$, nous avons

$$(3.3) \qquad (t^m\, a).(t^n\, b) = \begin{cases} t^{m+n-a\delta}\, b & \text{si } a\delta \leq n \ , \\ t^m (a\mu^n) b & \text{si } a\delta > n \ . \end{cases}$$

THÉORÈME B. - <u>Soit</u> R <u>un demi-groupe simplifiable à droite</u>, <u>avec élément neutre</u> 1 <u>et sans éléments inversibles</u> $\neq 1$. <u>Soit</u> $\delta : R \to N^0$ <u>une fonction de degré en</u> R . <u>Soit</u> $\mu : R \setminus 1 \to R$ <u>une translation à droite qui réduit le degré d'une unité</u> (<u>équation</u> (3.2)). <u>Soit</u> $T = N \times R$, <u>et définissons une opération binaire dans</u> T <u>par</u>

$$(3.4) \qquad (m\ ,\ a)(n\ ,\ b) = \begin{cases} (m + n - a\delta\ ,\ b) & \underline{\text{si}}\ a\delta \leq n \ , \\ (m\ ,\ (a\mu^n)b) & \underline{\text{si}}\ a\delta > n \ . \end{cases}$$

<u>Alors</u> T <u>est un demi-groupe bisimple</u>, <u>unipotent à gauche</u>, <u>de type</u> ω , <u>avec élément neutre</u> 1 <u>et sans éléments inversibles</u> $\neq 1$. <u>Inversement</u>, <u>tout demi-groupe avec ces propriétés est isomorphe à un demi-groupe</u> $T = N \times R$ <u>construit de cette façon</u>.

En fait, nous avons démontré la proposition inverse, en n'ajoutant qu'une comparaison de (3.3.) avec (3.4) montre que l'application $(m\ ,\ a) \mapsto t^m\, a$ est un isomorphisme de T sur S . Nous laisserons de côté la démonstration de la proposition directe, qui est cependant assez simple.

Prenons maintenant $R = \mathfrak{F}_X^1$, le demi-groupe libre engendré par un ensemble X , avec élément neutre 1 (le mot vide). Une application $\delta : X \to N$ quelconque telle que $x\delta = 1$ pour au moins un $x \in X$ peut être étendue uniquement à une fonction de degré en R , de la façon habituelle. Ayant choisi une telle δ , une application $\mu : X \to R$ quelconque qui réduit le degré d'une unité peut être étendue uniquement à une translation à droite de $R \setminus 1$ dans R par la prescription

$$(3.5) \qquad (x_1\ x_2\ \dots\ x_{n-1}\ x_n)\mu = (x_1\ x_2\ \dots\ x_{n-1})(x_n\ \mu)\ .$$

Prenons un cas spécial : soit $X = \{x_1\ ,\ x_2\ ,\ \dots\ ,\ x_n\ ,\ \dots\}$ un ensemble infini dénombrable. Définissons δ par $x_n\ \delta = n$ $(n = 1\ ,\ 2\ ,\ \dots)$. Alors il faut définir $x_1\ \mu = 1$ et $x_2\ \mu = x_1$. Mais, pour $n > 2$, il y a au moins deux choix distincts pour $x_n\ \mu$, par exemple

$$x_n\ \mu = x_{n-1} \quad \text{et} \quad x_n\ \mu = x_1^{n-1}\ .$$

Deux translations μ et μ' distinctes donnent deux demi-groupes T et T' non isomorphes, parce que (grâce à notre choix de δ) le seul automorphisme de R qui laisse invariant le degré est l'identité. Ceci démontre notre proposition finale.

PROPOSITION 4. - Il existe un ensemble non dénombrable de demi-groupes bisimples unipotents à gauche, avec élément neutre 1 , qui sont non isomorphes deux à deux, tel que tous ces demi-groupes ont la même R , la même L , et la même application d'inverse $a \longmapsto a'$ de R sur L .

BIBLIOGRAPHIE

[1] BAILES (Gordon L.). - Right inverse semigroups, Doctoral dissertation, Clemson University, 1972.

[2] CLIFFORD (A. H.). - A class of d-simple semigroups, Amer. J. Math., t. 75, 1953, p. 547-556.

[3] CLIFFORD (A. H.). - The structure of bisimple orthodox semigroups as ordered pairs, Semigroup Forum, t. 5, 1972, p. 127-136.

[4] CLIFFORD (A. H.). - The structure of bisimple left unipotent semigroups as ordered pairs, Semigroup Forum (to appear).

[5] CLIFFORD (A. H.) and PRESTON (G. B.). - The algebraic theory of semigroups, Vol 1 and 2. - Providence, American mathematical Society, 1961 and 1967 (Mathematical Surveys, 7).

[6] EWING (Edson W.). - Contributions to the study of regular semigroups, Doctoral Dissertation, University of Kentuky, 1971.

[7] HALL (T. E.). - On orthodox semigroups and uniform and antiuniform bands, J. of Algebra, t. 16, 1970, p. 204-217.

[8] MUNN (W. D.). - Uniform semilattices and bisimple inverse semigroups, Quarterly J. Math., Oxford Series, t. 17, 1966, p. 151-159.

[9] MUNN (W. D.). - Fundamental inverse semigroups, Quarterly J. Math., Oxford Series, t. 21, 1970, p. 157-170.

[10] MUNN (W. D.). - 0-Bisimple inverse semigroups, J. of Algebra, t. 15, 1970, p. 570-588.

[11] REILLY (N. R.). - Bisimple inverse semigroups, Trans. Amer. math. Soc., t. 132, 1968, p. 101-114.

[12] REILLY (N. R.) and SCHEIBLICH (H. E.). - Congruences on regular semigroups, Pacific J. Math., t. 23, 1967, p. 349-360.

[13] VENKATESAN (P. S.). - Right (left) inverse semigroups (to appear).

[14] VENKATESAN (P. S.). - Bisimple left inverse semigroups, Semigroup Forum, t. 4, 1972, p. 34-45.

[15] WARNE (R. J.). - $\mathcal{L}$-unipotent semigroups, Nigerian J. Sc. (to appear).

[16] WARNE (R. J.). - ωY-$\mathcal{L}$-unipotent semigroups (to appear).

[17] WARNE (R. J.). - On the structure of regular bisimple semigroups, Tamkang Math. J. (to appear).

[18] WARNE (R. J.). - Some structure theorems for regular semigroups, Semigroup Forum (to appear).

Alfred H. CLIFFORD
Department of Mathematics
Tulane University
NEW ORLEANS, La 70118 (Etats-Unis)