Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Ernst August Behrens

Une arithmétique non commutative des demi-groupes et des anneaux

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 25, n° 2 (1971-1972), exp. n° J2, p. J1-J5

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1971-1972__25_2_A2_0>

Séminaire DUBREIL (Algèbre)
25e année, 1971/72, n° J2, 5 p.
Journées d'Algèbre [1972. Paris]
Demi-groupes. Anneaux (P. DUBREIL)

28 juin 1972

UNE ARITHMÉTIQUE NON COMMUTATIVE DES DEMI-GROUPES ET DES ANNEAUX

par Ernst August BEHRENS

En 1951, Mme M.-L. DUBREIL-JACOTIN [6] a présenté une arithmétique pour certains monoïdes S abéliens et noethériens, demi-réticulés, satisfaisant la condition

(Φ) $a \subseteq b$, si, et seulement si, il existe un élément $c \in S$, $c \neq a$, tel que $a = bc$.

Dans ce cas, chaque élément $a \in S$ est un produit des éléments premiers, déterminé uniquement par a , et S est le sous-groupe entier d'un groupe abélien réticulé.

Les idéaux entiers d'un corps des nombres algébriques constituent un demi-groupe demi-réticulé satisfaisant la condition (Φ). Par conséquent, le résultat de M.-L. DUBREIL-JACOTIN prouve le théorème fondamental de l'arithmétique classique.

Le même résultat est valable pour les ordres maximaux dans certaines algèbres non commutatives (en 1935 par DEURING [5]). En 1968, ROBSON [7] a généralisé ce résultat d'une arithmétique commutative, en considérant le cas où chaque idéal est un module projectif à droite : les idéaux fractionnels constituent de nouveau un groupe abélien.

En 1962, (BEHRENS [1]) on a commencé d'examiner les anneaux D^*-arithmétiques R , c'est-à-dire que le demi-groupe réticulé $V(R)$ de ses idéaux satisfait la loi d'une distributivité infinie (D^*)

$$A + \bigcap_{\tau \in T} B = \bigcap_{\tau \in T} (A + B_\tau) ,$$

et que R est demi-parfait, ayant son anneau quotient par rapport au radical de Jacobson séparable.

Nous dirons qu'un idéal A est $\cup$-irréductible si

$$(A = B \cup C = B + C) \text{ implique } (A = B \text{ ou } A = C) .$$

Dans le cas ci-dessus, les idéaux irréductibles, ensemble avec (0) , constituent un demi-groupe S non commutatif (S n'a pas d'élément zéro, si l'anneau R est premier). Le demi-groupe réticulé $V(S)$ des idéaux de S est isomorphe au demi-groupe réticulé $V(R)$, parce que chaque idéal de R a une représentation normale, et uniquement déterminée comme l'union des idéaux $\cup$-irréductibles (BEHRENS [3]), c'est-à-dire que l'arithmétique de R est la même que l'arithmétique de S , une arithmétique non commutative en général.

On peut caractériser ces demi-groupes S sans zéro comme les demi-groupes quasi unisériels dans la théorie algébrique des demi-groupes, de manière axiomatique. Il y a six axiomes, par exemple :

(F2) $$(ab) = (a).(b) \text{ , ou } (a) = SaS \text{ .}$$

Mais il y a une autre caractérisation de S : Soit M un demi-groupe complètement simple et ordonné (partiellement).

Définition. - $a \in M$ est entier si $ax \subseteq x$, et $xa \subseteq x$ pour $x \in M$.

Les éléments entiers de M constituent le sous-demi-groupe entier de M :

$$S = \{a \in M \; ; \; a \text{ entier}\} \text{ .}$$

Deux idempotents entiers différents engendrent deux idéaux à droite différents, à savoir :

PROPOSITION 1. - $e = e^2$ et $f = f^2 \in S$; $(eM = fM) \rightarrow (e = f)$.

Démonstration. - $e = fe \subseteq f = ef \subseteq e$.

M est l'union disjointe des sous-groupes dont les éléments unités engendrent les idéaux unilatéraux de M .

HYPOTHÈSE 1. - Il y a "assez d'idempotents entiers dans M " , c'est-à-dire chaque idéal unilatéral minimal de M est engendré par un idempotent de S .

Cette hypothèse et la proposition 1 impliquent que l'ensemble I des indices des idempotents entiers e_i de S est convenable aussi bien pour les idéaux à droite que pour les idéaux à gauche de M . Par conséquent, en représentant M par le demi-groupe matriciel de Rees, on a les équations :

(1) $$M = M(G \; ; \; I \; , \; S \; , \; P) = \bigcup_{i,j \in I} e_i \, Me_j \text{ .}$$

Les éléments entiers du sous-groupe $e_i \, Me_j$ sont donnés comme suit :

PROPOSITION 2. - $S \cap e_i \, Me_j = \{a = e_i \, ae_j \in M \; ; \; a \subseteq e_i \, e_j\}$.

Cette proposition, avec le fait que les éléments du sous-groupe $e_i \, Me_i$ sont inversibles dans $e_i \, Me_i$, permet une caractérisation algébrique de M , à comparer avec la condition (Φ) de M.-L. DUBREIL-JACOTIN.

PROPOSITION 3. - $(a \subseteq b) \Longleftrightarrow (a \in (b) \text{ , où } (b) = SbS)$.

Maintenant, soient G le groupe de structure dans (1), et Z le groupe cyclique infini, naturellement ordonné,

(2) $$Z = \{\omega^z \; ; \; z \in \underset{\sim}{Z}\} \text{ et } (\omega^x \leqslant \omega^y) \Longleftrightarrow (x \geqslant y) \text{ .}$$

Ce cas donne la caractérisation des demi-groupes quasi unisériels S , mentionnée ci-dessus.

THÉORÈME 4. - S <u>est quasi unisériel sans zéro</u>, <u>si et seulement si</u> S <u>est le sous-demi-groupe entier d'un demi-groupe complètement simple et ordonné</u>, <u>satisfaisant l'hypothèse</u> 1, <u>et ayant le groupe cyclique</u> (2) <u>comme groupe ordonné de structure</u> (BEHRENS [4]).

On peut supposer la matrice sandwich

$$P : (i , j) \dashrightarrow \omega^{(ij)} \in Z \quad \text{pour} \quad (i , j) \in I \times I ,$$

normalisée par

$$0 : (ij) = 0 .$$

Alors l'hypothèse 1 est équivalente aux conditions

1° $(ij) + (jk) \geqslant (ik)$;

2° $(ij) + (ji) > 0$ si $i \neq j$.

Les éléments entiers de Z constituent le sous-monoïde $\mathcal{S} = \{\omega^z ; \ 0 \leqslant s \in \underset{\sim}{Z}\}$. On a

(3) $M = \{\omega^z e_i e_j ; \ z \in \underset{\sim}{Z}$ et $i , j \in I\}$ et $S = \{\omega^s e_i e_j ; \ 0 \leqslant \omega \in \underset{\sim}{Z}$ et $i , j \in I\}$.

Chaque idéal A de S est l'union de ses $\mathcal{S}$-composants $\mathcal{S}\omega^{\alpha_{ij}} e_i e_j$, et par conséquent, A est l'union des idéaux $\cup$-irréductibles $\omega^{\alpha_{ij}}(e_i e_j)$.

<u>L'application</u>

(4) $$\varphi : A = \bigcup_{i,j \in I} \omega^{\alpha_{ij}}(e_i e_j) \dashrightarrow (\omega^{\alpha_{ij}}) \in \mathcal{S}_{I \times I} ,$$

<u>est injective</u>.

La règle de la multiplication des éléments dans un demi-groupe matriciel de Rees, avec une application de (F2), à savoir $(e_i e_j)(e_k e_l) = (e_i e_j e_k e_l)$, permet de calculer le produit de deux idéaux A et B de S d'une manière matricielle.

THÉORÈME 5.

(5) $$\varphi(A.B) = (\varphi A) \circ (\varphi B) ,$$

<u>où</u>

(6) $$(\omega^{\rho_{ij}}) \circ (\omega^{\sigma_{ij}}) = (\omega^{\tau_{ij}}) , \quad \tau_{ij} = \min_r\{\rho_{ir} + \sigma_{rj}\} ,$$

<u>et</u>

(7) $$\varphi(V(S)) = \{A \in \mathcal{S}_{I \times I} ; \ P \circ A \circ P = A\} .$$

(BEHRENS [2]).

Cette multiplication des idéaux est l'utilisation du théorème fondamental de l'arithmétique classique, pour notre arithmétique non commutative, parce qu'il y a une représentation, duale de (4), à savoir

(8) $$A = \bigcap_{i,j} \omega^{\alpha_{ij}} T_{ij} \quad \text{pour} \quad A \in V(S) ,$$

où les T_{ij} sont des idéaux $\cap$-irréductibles avec les mêmes exposants α_{ij} comme dans la formule (4). Il n'est pas difficile de trouver les idéaux T_{ij} par un calcul de ses matrices $\varphi(T_{ij})$, en utilisant le théorème 5. Mais il y a une autre construction des T_{ij} , qui est plus intelligible, par une théorie de la localisation comme suit :

Définition. - Un S-idéal de M est un S-bi-sous-demi-module A de M , satisfaisant $\omega^n A \subseteq S$ pour un nombre convenable n .

Les S-idéaux de M constituent le demi-groupe réticulé $V_S(M)$ avec $\varphi A \in Z_{I\times I}$ pour $A \in V_S(M)$, sa multiplication étant comme dans le théorème 5.

THÉORÈME 6. - Le centre C de $V_S(M)$ est le groupe cyclique

(9) $$C = \{W^z \ ; \ z \in \underset{\sim}{Z} \ , \text{ où } W = \omega s\} .$$

Les idéaux premiers de S sont les ensembles complémentaires $S \setminus e_i$ par rapport aux idempotents e_i , $i \in I$. Ils sont liés à certains S-ordres maximaux de M , à savoir à

(10) $$\mathfrak{L}_i = \{x \in M \ ; \ e_i x \in S\} \text{ et } \mathfrak{R}_i = \{y \in M \ ; \ ye_i \in S\} \text{ pour } i \in I .$$

Alors on a le théorème suivant.

THÉORÈME 7. - Les idéaux $\cap$-irréductibles "basiques" T_{ij} de S sont les produits

(11) $$T_{ij} = \mathfrak{L}_i . \mathfrak{R}_j ,$$

et par conséquent

(12) $$A = \bigcap_{i,j} \mathfrak{L}_i W^{\alpha_{ij}} \mathfrak{R}_j \text{ pour } A \in V(S) .$$

Le demi-groupe $V_{\mathfrak{L}_i}(M)$ des $\mathfrak{L}_i$-idéaux de M est le groupe cyclique engendré par $W\mathfrak{L}_i$. Similairement,

(13) $$V_{\mathfrak{R}_i}(M) = \{W^z \mathfrak{R}_i \ ; \ z \in \underset{\sim}{Z}\} \text{ pour } i \in I .$$

Ces résultats conduisent immédiatement à une arithmétique pour les anneaux R ci-dessus à cause de l'isomorphisme mentionné $V(S) \cong V(R)$ comme demi-groupes réticulés. Inversement, il y a un tel anneau R pour chaque demi-groupe S quasi unisériel sans zéro.

Si R est semi-premier, on a une arithmétique semblable, où V(R) est isomorphe à une union O-directe des $(V(S))^0$ ci-dessus.

Si le groupe G de structure, dans la représentation matricielle de M , n'est pas nécessairement Z , ordonné naturellement, M satisfait cependant l'hypothèse 1. Dans ce cas, J. RÖMPKE donne une caractérisation axiomatique de S dans sa thèse. (McMaster University, 1973.)

BIBLIOGRAPHIE

[1] BEHRENS (E. A.). - Die Halbgruppe der Ideale in Algebren mit distributivem Idealverband, Arch. der Math., Basel, t. 13, 1962, p. 251-266.

[2] BEHRENS (E. A.). - The arithmetics of the quasiuniserial semi groups without zero, Canad. J. Math., t. 23, 1971, p. 507-516.

[3] BEHRENS (E. A.). - Ring theory. - New York, Academic Press, 1972 (Pure and applied Mathematics, Academic Press, 44).

[4] BEHRENS (E. A.). - Une caractérisation des demi-groupes quasi unisériels semi-premiers comme sous-demi-groupes entiers (à paraître).

[5] DEURING (M.). - Algebren. - Berlin, J. Springer, 1935 (Ergebnisse der Mathematik, 4-I).

[6] DUBREIL-JACOTIN (Marie-Louise). - Quelques propriétés arithmétiques dans un demi-groupe demi-réticulé entier, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 232, 1951, p. 1174-1176.

[7] ROBSON (J.). - Non-commutative Dedekind rings, J. of Algebra, t. 9, 1968, p. 249-265.

Ernst August BEHRENS
Department of Mathematics
McMaster University
HAMILTON, Ont. (Canada)