Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Antonio Almeida Costa

Les μ-demi-anneaux

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 25, n° 2 (1971-1972), exp. n° J1, p. J1-J9
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1971-1972__25_2_A1_0>

Séminaire DUBREIL (Algèbre)
25e année, 1971/72, n° J1, 9 p.

Journées d'Algèbre [1972. Paris]
Demi-groupes. Anneaux (P. DUBREIL)

28 juin 1972

LES μ-DEMI-ANNEAUX

par Antonio ALMEIDA COSTA

1. Introduction.

Les demi-anneaux ont été introduits par H. S. VANDIVER [31]. La somme n'est pas commutative, il n'existe pas généralement l'élément zéro et, même si cet élément existe, on ne parle pas d'élément symétrique d'un élément. Malgré tout, moyennant des définitions convenables d'idéal à droite, à gauche ou bilatère [3], [11], [20], [21], il y a beaucoup de résultats de la théorie des anneaux qu'on peut transposer pour les demi-anneaux, sans faire appel à des hypothèses supplémentaires. On parle, par exemple, d'idéaux nucléaires [3], [26], d'idéaux premiers et semi-premiers [3], [20], [21], [26], d'idéaux à droite ou à gauche minimaux [11], ainsi que des théories du radical classique et du radical de LEVITZKI [3], [8]. En ce qui concerne le radical de KÖTHE, on devra supposer la somme commutative [3], et, sous cette même hypothèse, S. BOURNE a réussi à faire une théorie semblable à celle de PERLIS-JACOBSON [9], d'ailleurs complétée plus tard [12]. On trouve des compléments de cette théorie dans les mémoires [19] et [23], tandis que dans le mémoire [24] les radicaux de BROWN-McCOY sont objet d'étude. La théorie des radicaux supérieurs et inférieurs de BAER est aussi facilement transposable pour les demi-anneaux [3].

Dans les questions faisant intervenir les morphismes, si l'on veut les placer dans le même plan de généralité, on est loin d'obtenir des résultats satisfaisants [7], [10]. Quelques auteurs ont alors admis des restrictions pour les idéaux choisis, sans en obtenir toutefois des résultats présentés d'une façon simple analogue à celle des anneaux [18], [19], [22]. Toutefois, on doit signaler que J. P. ALLEN, en introduisant certains morphismes et certains idéaux, a pu obtenir un théorème tout à fait semblable au théorème d'homomorphisme des anneaux [1]. A ce sujet, on trouve une étude d'ensemble chez Margarita RAMALHO [29].

En réalité, il faut qu'on ajoute de nouveaux axiomes aux axiomes des demi-anneaux, pour qu'il soit possible d'arriver à des conclusions constituant une théorie acceptable, en tant qu'analogue à une théorie d'anneaux d'un certain type.

Par exemple, sur des conditions fortement restrictives, on trouve chez BOURNE [16] une théorie de WEDDERBURN-ARTIN.

Melle NORONHA GALVAO a fait une théorie approfondie des demi-anneaux réticulés, en donnant une théorie de NOETHER-KRULL de représentation d'idéaux au moyen d'idéaux primaires et primaux [26]. On trouve d'ailleurs chez ALMEIDA COSTA [5] quelques compléments à la théorie développée par Melle NORONHA GALVAO.

On doit aussi à ce dernier auteur des résultats intéressants sur les demi-anneaux réguliers [25], et, sous l'hypothèse d'une somme commutative, ces demi-anneaux ont été objet d'une étude chez SUBNAMANIAN [30].

Au demi-anneau des nombres naturels est consacré un article de Melle NORONHA GALVAO et ALMEIDA COSTA [27] ; et, sur les demi-anneaux noethériens, sous l'hypothèse d'une somme commutative, on trouve quelques résultats chez ALLEN [2].

Un ordre d'idées différent est développé dans le travail de POYATOS SUAREZ [28], puisqu'il s'agit d'une théorie de semi-modules sur des demi-anneaux, qui s'inspire de la théorie des modules sur des anneaux ; et dans l'article [17], on voit transposés aux semi-anneaux beaucoup de résultats concernant les demi-groupes, ceux-ci pouvant d'ailleurs être considérés comme des demi-anneaux particuliers [17]. Il est d'ailleurs hors de doute que la théorie des demi-anneaux peut être fortement influencée par l'Ecole de P. DUBREIL sur la théorie des demi-groupes.

Enfin, on doit à S. BOURNE [13], [14], [15] le développement de plusieurs questions concernant les demi-anneaux topologiques.

Nous allons nous occuper pour le moment d'une façon détaillée des μ-demi-anneaux, en faisant usage des travaux [4], [26], et, d'une manière plus particulière, de l'article de ALMEIDA COSTA [6].

2. μ-systèmes. μ-condition.

Soit $\mathfrak{S}$ un demi-anneau. Un ensemble $\mathfrak{M} = \{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \ldots\}$ d'idéaux de $\mathfrak{S}$ est dit un μ-système, si, en prenant $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathfrak{M}$, il existe un idéal $\mathfrak{g}$ tel que $\mathfrak{a}\mathfrak{g}\mathfrak{b} \in \mathfrak{M}$. Et un ensemble $\mathfrak{P} = \{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots\}$ d'idéaux de $\mathfrak{S}$ est dit un π-système, si, prenant $\mathfrak{a} \in \mathfrak{P}$, il existe un idéal $\mathfrak{f}$ tel que $\mathfrak{a}\mathfrak{f}\mathfrak{a} \in \mathfrak{P}$

Tout μ-système est un π-système. D'une façon réciproque, si $\mathfrak{P}$ est un π-système, soit $\mathfrak{a} \in \mathfrak{P}$. Il existe $\mathfrak{f}$ tel que $\mathfrak{a}\mathfrak{f}\mathfrak{a} \in \mathfrak{P}$. Ensuite, il existe $\mathfrak{g}$ tel que $\mathfrak{b}\mathfrak{g}\mathfrak{b} = \mathfrak{c} \in \mathfrak{P}$, etc. L'ensemble $\{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots\}$ est un μ-système. Par conséquent, tout π-système est un ensemble réunion de μ-systèmes.

L'ensemble vide d'idéaux et l'ensemble de tous les idéaux de $\mathfrak{S}$ constituent des exemples de μ-systèmes.

Parmi les μ-systèmes, on distingue les μ-systèmes particuliers $\mathfrak{M}_0$, dont voici la caractérisation : l'ensemble réunion $\mathfrak{U}_0$ des idéaux n'appartenant pas à $\mathfrak{M}_0$ ne contient aucun idéal appartenant à $\mathfrak{M}_0$. La définition d'un π-système particulier $\mathfrak{P}_0$ est analogue.

Soit $\mathfrak{B}$ un ensemble d'éléments de $\mathfrak{S}$. Le symbole $C(\mathfrak{B})$ signifiera l'ensemble des idéaux de $\mathfrak{S}$ qui ne sont pas contenus dans $\mathfrak{B}$. Par conséquent, $\mathfrak{M}_0 = C(\mathfrak{U}_0)$, ou $\mathfrak{P}_0 = C(\mathfrak{U}_0)$.

Exemples. - L'ensemble vide d'idéaux est un μ-système particulier. La totalité des idéaux de $\mathfrak{S}$, avec exclusion de l'idéal vide, est aussi un μ-système particulier. Si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier, $C(\mathfrak{p})$ est un μ-système particulier, et, si $\mathfrak{r}$

est un idéal semi-premier, $C(\mathfrak{r})$ est un π-système particulier.

Nous étudions encore un cas intéressant de π-système particulier. Prenons une famille $C(\mathfrak{u}_\alpha)$, $(\alpha \in A)$, de μ-systèmes particuliers. L'ensemble réunion $\bigcup C(\mathfrak{u}_\alpha)$, qui est sans doute un π-système, est un π-système particulier, comme nous allons le voir. Si $\mathfrak{b}_\beta$ est un idéal qui n'appartient pas à la réunion, alors $\mathfrak{b}_\beta \subseteq \mathfrak{u}_\alpha$, quel que soit $\alpha \in A$, et on a $\bigcup \mathfrak{b}_\beta \subseteq \mathfrak{u}_\alpha$. Alors, si $\mathfrak{b} \subseteq \bigcup \mathfrak{b}_\beta$ est un idéal, puisque $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{u}_\alpha$, $\forall\ \alpha \in A$, on en conclut

$$\mathfrak{b} \notin \bigcup C(\mathfrak{u}_\alpha) \quad \text{et} \quad \bigcup C(\mathfrak{u}_\alpha) = C(\bigcup \mathfrak{b}_\beta) \ .$$

D'ailleurs, il est simple de reconnaître qu'on a aussi $\bigcup C(\mathfrak{u}_\alpha) = C(\bigcap \mathfrak{u}_\alpha)$.

Cela posé, nous introduisons ce qu'on appelle la μ-condition de la manière suivante : En prenant un μ-système d'idéaux et une deuxième famille $\{\mathfrak{a}_\lambda\}$, $(\lambda \in L)$, d'idéaux, l'hypothèse que les $\mathfrak{a}_\lambda$ sont ordonnés par inclusion et qu'aucun d'eux n'a un sous-idéal appartenant au μ-système entraîne, pour l'idéal $\bigcup \mathfrak{a}_\lambda$, cette même propriété.

3. μ-demi-anneaux.

Un demi-anneau $\mathfrak{S}$ vérifiant la μ-condition prend le nom de μ-demi-anneau. On en trouve des exemples dans les demi-anneaux vérifiant la condition de chaîne ascendante pour leurs idéaux, tels que le demi-anneau des nombres naturels ou les anneaux semi-simples d'ARTIN-NOETHER.

Nous donnons à suivre un exemple de μ-demi-anneau qui ne vérifie pas la condition de chaîne ascendante. Soit $\mathfrak{S}_2$ le demi-anneau des nombres réels $\geqslant 2$. Ce demi-anneau a les propriétés que voici :

1° Soit $\mathfrak{b}$ un idéal de $\mathfrak{S}_2$. $\mathfrak{b}$ admet une borne inférieure b_0 , qui peut ou non appartenir à $\mathfrak{b}$. Tout nombre $2b_0 + \eta > 2b_0$ appartient à $\mathfrak{b}$, puisque, si $b_0' \in \mathfrak{b}$ vérifie la condition $b_0' < b_0 + (\eta/2)$, on a

$$2b_0 + \eta = 2(b_0 + (\eta/2)) = b_0'.2\,\frac{b_0 + (\eta/2)}{b_0'} = b_0'(2 + \lambda) \in \mathfrak{b} \ .$$

2° La condition de chaîne ascendante n'est pas vérifiée dans $\mathfrak{S}_2$, comme on le voit en prenant la suite d'idéaux $\{\mathfrak{b}_n\}$, $(n = 1 , 2 , 3 , \ldots)$, avec

$$\mathfrak{b}_n = \{x \in \mathfrak{S}_2 \mid x \geqslant 3 - \frac{n-1}{n}\} \ .$$

3° En prenant deux idéaux $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ dont les bornes inférieures sont a_0 et b_0 , respectivement, la borne inférieure de l'idéal $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$, compte tenu que les éléments du produit sont des sommes finies $\sum a_i\, b_i$, $(a_i \in \mathfrak{a} ,\ b_i \in \mathfrak{b})$, est le nombre $a_0\, b_0$.

4° Si l'on prend un μ-système d'idéaux $\mathfrak{M} = \{\mathfrak{a} , \mathfrak{b} , \mathfrak{c} , \ldots\}$, dont l'ensemble des bornes inférieures est $M = \{a_0 , b_0 , c_0 , \ldots\}$, il est simple de reconnaître que M est un m-système d'éléments de $\mathfrak{S}$.

5° M contient des nombres aussi grands que l'on veut. En effet : si $a_0 \in M$

est la borne inférieure de $\mathfrak{a} \in \mathfrak{M}$, il existe un idéal $\mathfrak{g}$ tel que $\mathfrak{a}\mathfrak{g}\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \in \mathfrak{M}$; alors, la borne inférieure de $\mathfrak{b}$ est $b_0 > a^2$. Ensuite, il existe un idéal $\mathfrak{f}$ tel que $\mathfrak{b}\mathfrak{f}\mathfrak{b} = \mathfrak{c} \in \mathfrak{M}$, et la borne inférieure de $\mathfrak{c}$ est $c_0 > b_0^2 > a^4$, etc.

6° Soit $\mathfrak{b}$ un idéal quelconque. En prenant un μ-système $\mathfrak{M}$, il existe toujours des idéaux appartenant à $\mathfrak{M}$ contenus dans $\mathfrak{b}$. En effet : Si b_0 est la borne inférieure de $\mathfrak{b}$, nous savons que tous les nombres $> 2b_0$ appartiennent à $\mathfrak{b}$; alors, il suffit de prendre un idéal $\mathfrak{m} \in \mathfrak{M}$ dont la borne inférieure soit $m_0 > 2b_0$ pour que $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{b}$.

7° Puisqu'il n'existe pas une chaîne $\{\mathfrak{a}_\lambda\}$, $(\lambda \in L)$, d'idéaux dont chaque $\mathfrak{a}_\lambda$ ne contienne pas un idéal d'un μ-système donné, et puisque si l'on prend le μ-système vide d'idéaux la μ-condition est automatiquement satisfaite, $\mathfrak{S}_2$ est en effet un μ-demi-anneau qui ne vérifie pas la condition de chaîne ascendante.

<u>Remarque</u> 1. – Au lieu de $\mathfrak{S}_2$, on peut prendre le demi-anneau des nombres réels $\geqslant r_0 > 1$. Le raisonnement précédent subsiste.

<u>Remarque</u> 2. – On ne peut pas prendre le demi-anneau $\mathfrak{S}_1$ des nombres réels > 1 , car nous aurions $\mathfrak{S}_1^2 = \mathfrak{S}_1$, et le seul idéal $\mathfrak{S}_1$ constituerait un μ-système, donc le m-système M correspondant serait composé du seul nombre 1 . D'ailleurs, il serait simple de trouver une chaîne d'idéaux $\{\mathfrak{a}_\lambda\}$, $(\lambda \in L)$, chacun d'eux $\neq \mathfrak{S}_1$, mais tels que $\bigcup \mathfrak{a}_\lambda = \mathfrak{S}_1$.

4. Démonstration de deux lemmes.

Nous démontrerons deux lemmes très utiles pour arriver à la proposition générale qui constitue une caractérisation des μ-demi-anneaux. Ces lemmes, bien qu'ils portent sur les π-systèmes particuliers, font intervenir des demi-anneaux arbitraires.

LEMME 1. – <u>Dans un demi-anneau quelconque, soient $\mathfrak{P}_0 = C(\mathfrak{U}_0)$ un π-système particulier, et $\mathfrak{a}$ un idéal ne contenant pas un sous-idéal appartenant à $\mathfrak{P}_0$. Alors, il existe des idéaux maximaux $\mathfrak{y}$ contenant $\mathfrak{a}$ et n'admettant pas un sous-idéal appartenant à $\mathfrak{P}_0$. Ces idéaux maximaux sont semi-premiers.</u>

Partons de $\mathfrak{P}_0$ et de $\mathfrak{a}$. L'ensemble partiellement ordonné des idéaux qui contiennent $\mathfrak{a}$ et ne contiennent aucun sous-idéal appartenant à $\mathfrak{P}_0$ est inductif, car, si $\{\mathfrak{y}_\lambda\}$, $(\lambda \in L)$, est une chaîne de tels idéaux, l'idéal $\mathfrak{y}_0 = \bigcup \mathfrak{y}_\lambda$, compte tenu de $\mathfrak{y}_\lambda \subseteq \mathfrak{U}_0$, $\forall\ \lambda \in L$, est contenu dans $\mathfrak{U}_0$, donc tous les sous-idéaux de $\mathfrak{y}_0$ sont contenus dans $\mathfrak{U}_0$ et n'appartiennent pas à $\mathfrak{P}_0$. Soit $\mathfrak{y}$ un idéal maximal au sens de l'énoncé. En prenant $\mathfrak{b}^2 \subseteq \mathfrak{y}$, on a aussi $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{y}$, car, au contraire, il existerait $\mathfrak{m} \subseteq (\mathfrak{y}\ ,\ \mathfrak{b})$ appartenant à $\mathfrak{P}_0$, et, moyennant un choix convenable de l'idéal $\mathfrak{g}$, on aurait $\mathfrak{m}\mathfrak{g}\mathfrak{m} \in \mathfrak{P}_0$, ainsi que

$$\mathfrak{m}\mathfrak{g}\mathfrak{m} \subseteq (\mathfrak{y}\ ,\ \mathfrak{b})(\mathfrak{y}\ ,\ \mathfrak{b}) \subseteq \mathfrak{y}\ ,$$

ce qui est une contradiction.

LEMME 2. - Dans un demi-anneau quelconque, pour que l'ensemble réunion $\mathfrak{r}$ de certains idéaux soit l'idéal semi-premier minimal appartenant à l'idéal $\mathfrak{a}$, il faut et il suffit que $C(\mathfrak{r})$ soit un π-système maximal, parmi les π-systèmes particuliers $\mathfrak{P}_0 = C(\mathfrak{U}_0)$ qui ne contiennent aucun sous-idéal de $\mathfrak{a}$.

La condition est nécessaire : Si $\mathfrak{r}$ est l'idéal semi-premier minimal appartenant à $\mathfrak{a}$, l'inclusion $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{r}$ montre que $C(\mathfrak{r})$ est un π-système qui ne contient aucun sous-idéal de $\mathfrak{a}$. Supposons maintenant

$$\mathfrak{P}_0 = C(\mathfrak{U}_0) \supset C(\mathfrak{r})$$

un deuxième π-système particulier ayant la même propriété. En désignant par $\mathfrak{y}$, d'après le lemme précédent, un idéal maximal, parmi les idéaux qui contiennent $\mathfrak{a}$ et n'admettent pas de sous-idéal qui soit un élément de $\mathfrak{P}_0$, nous savons que $\mathfrak{y}$ est semi-premier. Les inclusions $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{y}$ et $\mathfrak{y} \subseteq \mathfrak{r}$, cette dernière conséquence du fait que $\mathfrak{y}$ *a fortiori* ne contient pas un sous-idéal appartenant à $C(\mathfrak{r})$, montrent qu'on a $\mathfrak{y} = \mathfrak{r}$, donc $C(\mathfrak{y}) = C(\mathfrak{r})$. D'autre part, $\mathfrak{P}_0 \subseteq C(\mathfrak{y})$, donc une contradiction.

La condition est suffisante : Prenons $\mathfrak{r}$ et $C(\mathfrak{r})$ conformément à l'énoncé. Nous avons $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{r}$. Parmi les idéaux qui contiennent $\mathfrak{a}$ et n'admettent pas de sous-idéal appartenant à $C(\mathfrak{r})$, choisissons un idéal maximal $\mathfrak{y}$. Nous voyons que $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{y} \subseteq \mathfrak{r}$. Puisque $\mathfrak{y}$ est un idéal semi-premier, $C(\mathfrak{y}) \supseteq C(\mathfrak{r})$ est un π-système particulier. La maximalité de $C(\mathfrak{r})$ mène à $C(\mathfrak{y}) = C(\mathfrak{r})$, donc à $\mathfrak{y} = \mathfrak{r}$, et $\mathfrak{r}$ est un idéal semi-premier. Et il n'existe pas un idéal semi-premier $\mathfrak{r}_1$ tel que $\mathfrak{r} \supset \mathfrak{r}_1 \supseteq \mathfrak{a}$, car ceci contredirait à nouveau la maximalité de $C(\mathfrak{r})$.

Au numéro suivant, nous revenons aux μ-demi-anneaux.

5. Propriétés des μ-demi-anneaux.

A côté de la μ-condition, on peut introduire une π-condition, dont l'énoncé est le même que pour la μ-condition, sauf qu'on doit remplacer le μ-système d'idéaux par un π-système. Un demi-anneau vérifiant la π-condition est un π-demi-anneau.

THÉORÈME 1. - Tout π-demi-anneau est un μ-demi-anneau et réciproquement.

Sans doute, un π-demi-anneau est un μ-demi-anneau, compte tenu que tout μ-système est un π-système. Réciproquement, si $\mathfrak{S}$ est un μ-demi-anneau, en prenant un π-système $\mathfrak{P}$, supposons $\{\mathfrak{a}_\lambda\}$, $(\lambda \in L)$, une famille ordonnée par inclusion et telle qu'aucun des $\mathfrak{a}_\lambda$ ne contient un sous-idéal appartenant à $\mathfrak{P}$; alors, il en est de même par rapport à chaque μ-système $\mathfrak{M}_\alpha$ de la réunion $\mathfrak{P} = \bigcup \mathfrak{M}_\alpha$, donc $\bigcup \mathfrak{a}_\lambda$ ne contient aucun sous-idéal appartenant à l'un quelconque des $\mathfrak{M}_\alpha$ donc appartenant à $\mathfrak{P}$.

Soit, dans un μ-demi-anneau, une chaîne $\{\mathfrak{r}_\sigma\}$, $(\sigma \in S)$, d'idéaux semi-premiers. La famille des idéaux contenus dans un $\mathfrak{r}_\sigma$ au moins, vérifie les propriétés suivantes :

1° Si $\mathfrak{g}_\alpha$ et $\mathfrak{g}_\beta$ sont des idéaux de la famille, $(\mathfrak{g}_\alpha , \mathfrak{g}_\beta)$ est un idéal de la famille ;

2° Si $\mathfrak{g}_\alpha$ appartient à la famille, il en est de même de tout idéal $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{g}_\alpha$;

3° L'ensemble complémentaire des idéaux de la famille est un π-système.

Cette dernière propriété tient au fait qu'un idéal de l'ensemble complémentaire n'est contenu dans aucun $\mathfrak{r}_\sigma$, donc appartient à tous les $C(\mathfrak{r}_\sigma)$ et à $\bigcap C(\mathfrak{r}_\sigma)$; réciproquement, tout idéal de cette intersection, appartenant à tous les $C(\mathfrak{r}_\sigma)$, n'est contenu dans aucun $\mathfrak{r}_\sigma$. Or $\bigcap C(\mathfrak{r}_\sigma)$ est un π-système, puisque, si un idéal appartient à cette intersection, il en est de même d'une puissance arbitraire de $\mathfrak{a}$.

LEMME 3. - <u>Dans un</u> μ-<u>demi-anneau, si</u> $\mathcal{G} = \{\mathfrak{g}_\alpha\}$, $(\alpha \in A)$, <u>est une famille d'idéaux satisfaisant aux conditions</u> 1° <u>à</u> 3°, <u>l'ensemble réunion</u> $\bigcup \mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{f}$ <u>est un idéal de la famille, et</u> $C(\mathfrak{f}) = \mathfrak{P}_0$ <u>est un</u> π-<u>système particulier, exactement le</u> π-<u>système de la condition</u> 3°.

D'abord, $\mathfrak{f}$ est évidemment un idéal. Puis, $\mathcal{G}$ est un ensemble inductif, car, si $\{\mathfrak{g}_\lambda\}$, $(\lambda \in L)$, est une chaîne d'idéaux appartenant à $\mathcal{G}$, le fait que chaque $\mathfrak{g}_\lambda$ n'admet pas un sous-idéal appartenant au π-système entraîne pour l'idéal $\bigcup \mathfrak{g}_\lambda$ la même propriété, comme on le voit en tenant compte du théorème 1. Si $\mathfrak{f}$ est un idéal maximal dans $\mathcal{G}$, on aura $\mathfrak{f} = \bigcup \mathfrak{g}_\alpha$ parce que l'hypothèse $\mathfrak{g}_\beta \not\subseteq \mathfrak{f}$, pour un certain $\beta \in A$, entraînerait $(\mathfrak{g}_\beta , \mathfrak{f}) \in \mathcal{G}$, en contradiction avec la maximalité de $\mathfrak{f}$. Nous voyons d'ailleurs que $C(\mathfrak{f}) = \mathfrak{P}_0$ est un π-système particulier, exactement complémentaire de la famille $\mathcal{G}$.

Les raisonnements qui précèdent le lemme et le lemme lui-même permettent de donner l'énoncé suivant.

THÉORÈME 2. - <u>Dans un</u> μ-<u>demi-anneau, si</u> $\{\mathfrak{r}_\sigma\}$, $(\sigma \in S)$, <u>est une chaîne d'idéaux semi-premiers, on a</u> $\bigcup \mathfrak{r}_\sigma = \mathfrak{r}_\tau$, <u>pour un certain</u> $\tau \in S$, <u>et on a aussi</u>

$$C(\bigcup \mathfrak{r}_\sigma) = \bigcap C(\mathfrak{r}_\sigma) .$$

<u>En particulier, toute chaîne ascendante d'idéaux semi-premiers est finie</u>.

En ce qui concerne proprement l'égalité $C(\bigcup \mathfrak{r}_\sigma) = \bigcap C(\mathfrak{r}_\sigma)$, nous remarquons le fait suivant : si $\mathfrak{a} \in \bigcap C(\mathfrak{r}_\sigma)$, alors $\mathfrak{a} \in C(\mathfrak{r}_\sigma)$, $\forall \sigma \in S$, donc $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{r}_\sigma$, $\forall \sigma \in S$. En conséquence, $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{r}_\tau = \bigcup \mathfrak{r}_\sigma$, c'est-à-dire $\mathfrak{a} \in C(\bigcup \mathfrak{r}_\sigma)$.

Ce théorème 2 et le théorème qui va suivre contiennent les propriétés caractéristiques des μ-demi-anneaux, comme le montrera le théorème 4, qui constitue notre résultat fondamental.

THEOREME 3. - <u>Dans un</u> μ-<u>demi-anneau, tout</u> μ-<u>système</u> (π-<u>système</u>) <u>maximal</u> $\mathfrak{M}$ (<u>maximal</u> $\mathfrak{P}$), <u>parmi les</u> μ-<u>systèmes</u> (π-<u>systèmes</u>) <u>qui ne contiennent aucun sous-idéal d'un idéal</u> $\mathfrak{a}$, <u>est un</u> μ-<u>système</u> (π-<u>système</u>) <u>particulier, donc de la forme</u>

$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0 = C(\mathfrak{U}_0)$ [de la forme $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_0 = C(\mathfrak{U}_0)$].

Partons de $\mathfrak{a}$ et de $\mathfrak{M}$. Si l'on tient compte de la μ-condition, on reconnaît qu'il existe des idéaux maximaux $\mathfrak{p}$ contenant $\mathfrak{a}$ et ne contenant aucun sous-idéal appartenant à $\mathfrak{M}$. Un tel idéal $\mathfrak{p}$ est premier, car, au contraire, on pourrait trouver des idéaux $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{c}$ tels que $\mathfrak{b}\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{p}$, avec $\mathfrak{b} \not\subseteq \mathfrak{p}$, $\mathfrak{c} \not\subseteq \mathfrak{p}$. Les idéaux $(\mathfrak{p}, \mathfrak{b})$ et $(\mathfrak{p}, \mathfrak{c})$ admettraient, respectivement, des sous-idéaux $\mathfrak{m}_1$ et $\mathfrak{m}_2$ appartenant à $\mathfrak{M}$, et il existerait un idéal $\mathfrak{g}$ tel que $\mathfrak{m}_1 \mathfrak{g} \mathfrak{m}_2 \in \mathfrak{M}$. D'autre part, on aurait $\mathfrak{m}_1 \mathfrak{g} \mathfrak{m}_2 \subseteq (\mathfrak{p}, \mathfrak{b})(\mathfrak{p}, \mathfrak{c}) \subseteq \mathfrak{p}$, ce qui donne une contradiction. Par conséquent, $C(\mathfrak{p}) = \mathfrak{M}_0$ est un μ-système particulier qui contient tout idéal appartenant à $\mathfrak{M}$. La maximalité de ce dernier implique $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0$.

6. Théorème fondamental.

La proposition ci-dessous contient, comme nous l'avons déjà dit, notre résultat fondamental.

THÉORÈME 4. - $\mathfrak{S}$ est un μ-demi-anneau, si et seulement si $\mathfrak{S}$ vérifie les deux conditions suivantes :

1° Tout π-système maximal qui ne contient aucun sous-idéal d'un idéal $\mathfrak{a}$ est un π-système particulier ;

2° Toute chaîne ascendante d'idéaux semi-premiers est finie.

Les théorèmes 2 et 3 assurent la partie "nécessaire" de ce théorème 4. Quant à la "suffisance", soit $\{\mathfrak{g}_\lambda\}$, $(\lambda \in L)$, une chaîne d'idéaux, et soit $\mathfrak{P}$ un π-système qui ne contient aucun sous-idéal des $\mathfrak{g}_\lambda$. On doit montrer que $\mathfrak{P}$ ne contient aucun sous-idéal de $\bigcup \mathfrak{g}_\lambda$. Faisons correspondre à chaque $\mathfrak{g}_\lambda$ le π-système maximal $\mathfrak{P}_\lambda$ qui contient $\mathfrak{P}$ et ne contient aucun sous-idéal de $\mathfrak{g}_\lambda$. L'hypothèse 1° entraîne $\mathfrak{P}_\lambda = C(\mathfrak{U}_\lambda)$, et $\mathfrak{U}_\lambda$ est un ensemble réunion d'idéaux tel que $C(\mathfrak{U}_\lambda)$ est maximal parmi les π-systèmes particuliers qui ne contiennent aucun idéal qui soit sous-idéal de $\mathfrak{g}_\lambda$. Alors $\mathfrak{U}_\lambda$ est l'idéal semi-premier minimal appartenant à $\mathfrak{g}_\lambda$. Si $\mathfrak{g}_\lambda \subseteq \mathfrak{g}_\mu$, $\mathfrak{U}_\mu \supseteq \mathfrak{g}_\mu \supseteq \mathfrak{g}_\lambda$ montre que $\mathfrak{U}_\mu \supseteq \mathfrak{U}_\lambda$, donc $\{\mathfrak{U}_\lambda\}_{\lambda \in L}$ est une chaîne d'idéaux semi-premiers, et on a $\mathfrak{U}_\tau = \bigcup \mathfrak{U}_\lambda$, pour un certain $\tau \in L$. Or

$$\bigcup \mathfrak{g}_\lambda \subseteq \bigcup \mathfrak{U}_\lambda = \mathfrak{U}_\tau ,$$

et par conséquent, $\bigcup \mathfrak{g}_\lambda$ ne contient aucun idéal appartenant à $C(\mathfrak{U}_\tau)$, donc à $\mathfrak{P}$. Le théorème est démontré.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ALLEN (J. P.). - A fundamental theorem of homomorphism for semirings, Proc. Amer. math. Soc., t. 21, 1969, p. 412-419.

[2] ALLEN (J. P.). - Cohen's theorem for a class of noetherian semirings, Publ. math., Debrecen, t. 17, 1970, p. 169-171.

[3] ALMEIDA COSTA (A.). - Sur la théorie générale des demi-anneaux, I, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et théorie des nombres, 14e année, 1960/61, exposé 24, 17 p.

[4] ALMEIDA COSTA (A.). - Sur la théorie générale des demi-anneaux, II, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et théorie des nombres, 14e année, 1960/61, exposé 25, 12 p.

[5] ALMEIDA COSTA (A.). - Sur la théorie générale des demi-anneaux, Publ. math., Debrecen, t. 10, 1963, p. 14-29.

[6] ALMEIDA COSTA (A.). - Sur les μ-demi-anneaux, Math. Z., t. 108, 1968, p. 10-14.

[7] ALMEIDA COSTA (A.). - Sur les idéaux nucléaires d'un demi-anneau, Rev. Fac. C. Lisboa, 2e Série, A, t. 11, 1968, p. 277-293.

[8] BARBUT (E.). - On nil semirings with ascending chain condition, Fund. Math., Warszawa, t. 68, 1970, p. 261-264.

[9] BOURNE (S.). - The Jacobson radical of a semiring, Proc. Nat. Acad. Sc. USA, t. 37, 1951, p. 163-170.

[10] BOURNE (S.). - On the homomorphism theorem for semirings, Proc. Nat. Acad. Sc. USA, t. 38, 1952, p. 118-119.

[11] BOURNE (S.). - On multiplicative idempotents of a potent semiring, Proc. Nat. Acad. Sc. USA, t. 37, 1956, p. 632-638.

[12] BOURNE (S.). - On the semiradical of a semiring, Proc. Nat. Acad. Sc. USA, t. 44, 1958, p. 907-914.

[13] BOURNE (S.). - On compact semirings, Proc. Japan Acad, t. 35, 1959, p. 332-334.

[14] BOURNE (S.). - On locally compact positive halffields, Math. Annalen, t. 146, 1962, p. 423-426.

[15] BOURNE (S.). - On positive Banach halfalgebras without identity, Studia math., Warszawa, t. 22, 1963, p. 247-249.

[16] BOURNE (S.) and ZASSENHAUS (H.). - On a Wedderburn-Artin structure theory of a potent semiring, Proc. Nat. Acad. Sc. USA, t. 43, 1957, p. 613-615.

[17] GRILLET (Mireille P.). - Green's relations in a semiring, Portugal. Math., t. 29, 1970, p. 181-195.

[18] HENRIKSEN (M.). - Ideals in semirings with commutative addition, Amer. math. Soc., Notices, t. 6, 1958, p. 321.

[19] IIZUKA (K.). - On the Jacobson radical of a semiring, Tôhoku Math. J., t. 11, 1959, p. 409-421.

[20] ISÉKI (K.). - Ideal theory of semiring, Proc. Japan Acad., t. 32, 1956, p. 554-559.

[21] ISÉKI (K.). - Ideals in semirings, Proc. Japan Acad, t. 34, 1958, p. 29-31.

[22] LaTORRE (D. R.). - On h-ideals and k-ideals in hemirings, Publ. Math., Debrecen, t. 12, 1965, p. 219-226.

[23] LaTORRE (D. R.). - A note on the Jacobson radical of a hemiring, Publ. Math., Debrecen, t. 14, 1967, p. 9-13.

[24] LaTORRE (D. R.). - The Brown-McCoy radicals of a hemiring, Publ. Math., Debrecen, t. 14, 1967, p. 15-28.

[25] NORONHA GALVAO ($M^{\underline{a}}$ L.). - Sur les idéaux réguliers d'un demi-anneau, Rev. Fac. C. Lisboa, 2e Série, A, t. 8, 1960, p. 169-173.

[26] NORONHA GALVAO ($M^{\underline{a}}$ L.). - Sobre a theoria de Noether-Krull em semi-anéis, Rev. Fac. C. Lisboa, 2e Série, A, t. 8, 1961, p. 175-256.

[27] NORONHA GALVAO ($M^{\underline{a}}$ L.) et ALMEIDA COSTA (A.). - Sur le demi-anneau des nombres naturels, Ann. Fac. C. Porto, t. 48, 1965, p. 35-39.

[28] POYATOS SUAREZ (F.). - Introducción a la teoria de semimódulos. - Madrid, Public. Fac. C., 1967 (Doctoral Thesis).

[29] RAMALHO (Margarita). - Semi-anéis : morfismos e ideais. - Lisboa, 1971.

[30] SUBRAMANIAN (H.).-Von Neumann regularity in semirings, Math. Nachr., Berlin, t. 45, 1970, p. 73-79.

[31] VANDIVER (H. S.). - Note on a simple type of algebra in which the cancellation law of addition does not hold, Bull. Amer. math. Soc., t. 40, 1934, p. 914-920.

Antonio ALMEIDA COSTA
Rua de Francisco Metrass nº 2, 1º E
LISBOA 3 (Portugal)