Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Thérèse Merlier

Quelques propriétés des 0-demi-groupes périodiques

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 25, n° 2 (1971-1972), exp. n° J15, p. J1-J9
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1971-1972__25_2_A15_0>

Séminaire DUBREIL (Algèbre)
25e année, 1971/72, n° J15, 9 p.
Journées d'Algèbre [1972. Paris]
Demi-groupes. Demi-groupes ordonnés
(M.-L. DUBREIL-JACOTIN)

1er juillet 1972

QUELQUES PROPRIÉTÉS DES $\mathcal{O}$-DEMI-GROUPES PÉRIODIQUES

par Thérèse MERLIER

Un demi-groupe S est périodique si tout élément de S est d'ordre fini ; on a donc, si E désigne l'ensemble des idempotents de S, convention que nous respecterons dans la suite,

$$\forall x \in S\ , \quad \exists n \in \underset{\sim}{N}\ , \quad \exists e \in E\ ; \quad x^n = e\ .$$

On appelle $\mathcal{O}$-demi-groupe, un demi-groupe S sur lequel on peut définir une relation d'ordre total, $\leqslant$, isotone, c'est-à-dire vérifiant

$$\forall a \in S\ , \ \forall b \in S\ , \ \forall c \in S\ , \ \forall d \in S\ , \ (a \leqslant b\ , \ c \leqslant d) \Longrightarrow (ac \leqslant bd)\ .$$

On dit alors que S est totalement ordonné par $\leqslant$.

Le fait de pouvoir ordonner totalement un demi-groupe lui confère de nombreuses propriétés algébriques ; en particulier,

L'ensemble des idempotents d'un $\mathcal{O}$-demi-groupe, s'il n'est pas vide, est un sous-demi-groupe.

Dans un demi-groupe S périodique, on définit la relation d'équivalence $\mathfrak{F}$, dont les classes sont des fuseaux, par

$$(a \equiv b \quad (\mathfrak{F})) \Longleftrightarrow (\exists n \in \underset{\sim}{N}\ , \quad a^n = b^n = e\ , \quad \text{où} \quad e \in E)\ .$$

Tout fuseau contient un idempotent et le fuseau de x est noté F_x .

Si S est périodique et totalement ordonné, tout fuseau F_e , $e \in E$, est un sous-demi-groupe convexe de S , nildemi-groupe de zéro e . Les nildemi-groupes totalement ordonnés ont été étudiés dans [5].

Nous allons distinguer deux cas : les $\mathcal{O}$-demi-groupes périodiques unitaires, et les $\mathcal{O}$-demi-groupes périodiques n'ayant qu'un nombre fini d'idempotents. Nous appellerons toujours bande un demi-groupe idempotent.

LEMME 1. - *Si S est un $\mathcal{O}$-demi-groupe périodique, et si e est un zéro à gauche de la bande E de ses idempotents, e est zéro à gauche de S .*

Soit x un élément quelconque de S ; puisque S est périodique, x appartient au fuseau F_g , où $g \in E$. On a alors $xg = gx = g$. Comme e est zéro à gauche de E , $eg = e$. D'où $ex = egx = eg = e$, et e est bien zéro à gauche de S .

1. Demi-groupes périodiques unitaires totalement ordonnés.

Soit S un tel demi-groupe ; alors E est une bande unitaire totalement ordonnée. On a donc le résultat suivant.

LEMME 2 (M.-L. DUBREIL-JACOTIN [2]). - *Toute $\mathcal{D}_E$-classe a au plus deux éléments, et $ef = e$ ou f, pour tout e, f de E.*

(Nous notons, si X est un demi-groupe, $\mathcal{D}_X$ la $\mathcal{D}$-équivalence de Green dans X. Pour les définitions et propriétés des équivalences de Green et des demi-groupes en général, nous renvoyons à [1].)

THÉORÈME 1. - *Dans un $\mathcal{O}$-demi-groupe périodique unitaire, l'équivalence $(\mathfrak{F})$ est une congruence.*

Soient a et b tels que $a \equiv b \quad (\mathfrak{F})$; $a^n = b^n = e$, $e \in E$. Supposons S totalement ordonné par $\leqslant$, et soit c un élément quelconque de S.

Si $c \equiv a \quad (\mathfrak{F})$, comme chaque fuseau est un sous-demi-groupe, ac, bc, ca, cb appartiennent au même fuseau que a, et $ac \equiv bc \quad (\mathfrak{F})$, $ca \equiv cb \quad (\mathfrak{F})$.

Si $c \not\equiv a \quad (\mathfrak{F})$, distinguons deux cas :

1° $c \in F_f$, où f est un idempotent tel que $e \not\equiv f \quad (\mathcal{D}_E)$. Dans ce cas, $ef=fe$, car $ef \neq fe$ implique $e \equiv f \quad (\mathcal{D}_E)$ puisque $ef \equiv fe \quad (\mathcal{D}_E)$ et que $ef = e$ ou f dans une $\mathcal{O}$-bande. Donc $e = ef = fe$ par exemple ; si de plus $ac \leqslant ca$, on a :

$$a^n c^n \leqslant (ac)^n \leqslant (ca)^n \leqslant c^n a^n \quad \text{pour tout entier } n ,$$

et comme pour un certain entier p $a^p = e$, $c^p = f$, on a

$$e = ef \leqslant (ac)^p \leqslant (ca)^p \leqslant fe = e , \text{ et } ac \equiv ca \equiv e \quad (\mathfrak{F}) ;$$

de même,

$$bc \equiv cb \equiv e \quad (\mathfrak{F}) ;$$

on démontre de même, si $ef = fe = f$, que $ac \equiv ca \equiv f \quad (\mathfrak{F})$ et $bc \equiv cb \equiv f \quad (\mathfrak{F})$.

2° $c \in F_f$, où $f \in E$ et $e \equiv f \quad (\mathcal{D}_E)$. D'après un résultat de E. Ja. GABOVIČ [3], on sait que si les $\mathcal{D}_E$-classes ont au plus deux éléments, alors si $e \equiv f \quad (\mathcal{D}_E)$, $e \neq f$, $F_e \cup F_f$ est un sous-demi-groupe. Ainsi $ac \in F_e \cup F_f$, si $ac = c_1 \in F_f$, on a, d'une part $acf = (ac)f = c_1 f = f$, et d'autre part $acf = a(cf) = af$. D'où $af = f = \dots = a^n f = ef$, ce qui est absurde ; donc $F_e F_f \subseteq F_e$ et $F_f F_e \subseteq F_e$, et $ac \equiv bc \quad (\mathfrak{F})$, $ca \equiv cb \quad (\mathfrak{F})$. $(\mathfrak{F})$ est donc bien une relation de congruence.

COROLLAIRE 1. - *Si S est un $\mathcal{O}$-demi-groupe périodique unitaire, $S/\mathfrak{F}$ est une $\mathcal{O}$-bande unitaire.*

Cela implique que dans $\bar{S} = S/\mathfrak{F}$, toute $\mathcal{D}_{\bar{S}}$-classe a au plus deux éléments et $\bar{e}\bar{f} = \bar{e}$ ou $\bar{f}$.

PROPOSITION 1. - <u>Dans un Θ-demi-groupe périodique unitaire</u> S , <u>si</u> $a \in F_e$, $b \in F_f$, <u>et si</u> $a \equiv b \ (\mathcal{D}_S)$, <u>alors</u> $e \equiv f \ (\mathcal{D}_E)$.

Si $a \equiv b \ (\mathcal{D}_S)$, alors, dans toute image homomorphe de S , $\varphi(S)$,

$$\varphi(a) \equiv \varphi(b) \mod \mathcal{D}_{\varphi(S)} \ ;$$

ceci est vrai en particulier pour $S/\mathfrak{F}$. Donc on a $\bar{a} \equiv \bar{b} \ (\mathcal{D}_{\bar{S}})$; mais on a $\bar{a} = \bar{e}$, $\bar{b} = \bar{f}$, d'où $\bar{e} \equiv \bar{f} \ (\mathcal{D}_{\bar{S}})$; comme $\overline{ef} = \bar{e}$ et $\overline{fe} = \bar{f}$ par exemple, on a $ef \equiv e \ (\mathfrak{F})$, $fe \equiv f$, soit $ef = e$, $fe = f$ puisque les idempotents forment une bande de S et qu'un fuseau ne contient qu'un idempotent.

COROLLAIRE 2. - <u>Dans un Θ-demi-groupe périodique unitaire</u> S , <u>si</u> E <u>est la bande des idempotents de</u> S , <u>on a</u>

$$\forall\, e \in E \ , \ \forall\, f \in E \ , \ (e \equiv f \ (\mathcal{D}_E)) \Longleftrightarrow (e \equiv f \ (\mathcal{D}_S)) \ .$$

COROLLAIRE 3. - <u>Une</u> $\mathcal{D}_S$<u>-classe d'un Θ-demi-groupe périodique rencontre au plus deux fuseaux.</u>

Ceci résulte de ce que les $\mathcal{D}_E$-classes ont au plus deux idempotents, et de la proposition 1.

PROPOSITION 2. - <u>Dans un Θ-demi-groupe périodique unitaire</u> S , <u>si</u> $e \neq f$, $e , f \in E$, <u>et si</u> $e \equiv f \ (\mathcal{D})$, <u>alors</u> $F_e = \{e\}$ <u>et</u> $F_f = \{f\}$.

On a, par exemple, $ef = e$, $fe = f$ et nécessairement $e < u < f$, si u est l'unité de S .

Par suite, e est le plus petit élément du fuseau F_e , et f le plus grand de F_f : en effet, si $x \in F_e$ et $x < e < u$, alors $x^2 \leqslant x < e$ et $x^n < e$ pour tout n , ce qui est absurde. Puisque $ef = e$, $fe = f$, e et f sont zéros à gauche de l'ensemble des idempotents $\{e , f\}$ du demi-groupe $F_e \cup F_f$; ils sont, d'après le lemme 1, zéros à gauche de $F_e \cup F_f$. Soient alors $x \in F_e$, $y \in F_f$, on a

$$e \leqslant x < u < y < f \ .$$

Comme $\mathfrak{F}$ est une congruence, $xf \equiv ef \ (\mathfrak{F})$, et comme $ef = e$, $xf \in F_e$; d'où $e \leqslant xf$; mais xf est aussi zéro à gauche de $F_e \cup F_f$, donc $xf = e$; comme $u < f$, on a $x \leqslant xf$, d'où $x \leqslant e$ et $x = e$. De même, $y = f$.

THÉORÈME 2. - <u>Soit</u> D <u>une</u> $\mathcal{D}$<u>-classe d'un Θ-demi-groupe périodique unitaire</u> S :
<u>Si</u> D <u>est une</u> $\mathcal{D}$<u>-classe régulière</u>, <u>alors</u> $D = \{e\}$ <u>ou</u> $\{e , f\}$, <u>avec</u> $e , f \in E$,
<u>Si</u> D <u>n'est pas régulière</u>, D <u>est contenue dans un même fuseau</u> F_e .

Si D est régulière : D contient des idempotents, mais alors D contient au plus deux idempotents tels que $e \equiv f \ (\mathcal{D}_E)$.

Si $e \neq f$: $F_e = \{e\}$, $F_f = \{f\}$ d'après la proposition 2, et D rencontre au plus ces deux fuseaux F_e et F_f, donc $D = \{e , f\}$. Si D contient un seul idempotent, e, alors D est la $\mathcal{H}$-classe de e, donc D est un groupe, périodique, qui peut être totalement ordonné. C'est donc nécessairement l'idempotent e.

Si D n'est pas régulière : D ne peut rencontrer qu'un seul fuseau. En effet, si $a \equiv b \ (\mathcal{D})$, $(a \in F_e, b \in F_f, e \equiv f \ (\mathcal{D})$ et $e \neq f)$ implique $(F_e = \{e\}, F_f = \{f\})$, donc $a = e$, $f = b$.

2. Θ-demi-groupes périodiques n'ayant qu'un nombre fini d'idempotents.

LEMME 3. - *Si S est un Θ-demi-groupe périodique ayant un nombre fini d'idempotents, S admet au moins un zéro à gauche ou un zéro à droite.*

Soit E l'ensemble des idempotents de S ; E est une Θ-bande finie, donc admet, d'après [4], § 1, au moins un zéro à gauche ou un zéro à droite. Dans ce cas, d'après le lemme 1, tout zéro à gauche (à droite) de E est zéro à gauche (à droite) de S, et le lemme 3 est établi.

Remarque. - Un demi-groupe périodique, même fini, n'admet en général ni zéro à gauche, ni zéro à droite ; c'est le cas de certaines bandes. Il en est ainsi du demi-groupe Σ considéré dans [4], et dont la table de Cayley est :

Σ	a	b	c	d
a	a	a	c	c
b	b	b	d	d
c	a	a	c	c
d	b	b	d	d

D'ailleurs, même si l'ensemble E des idempotents d'un demi-groupe fini S est une bande avec zéros à gauche, à droite, ou bilatères, il n'en est pas de même de S.

Par exemple, considérons le demi-groupe suivant :

S	a	b	c	d	e
a	a	a	a	d	d
b	a	b	c	d	d
c	a	c	b	d	d
d	d	d	d	a	a
e	d	e	e	a	a

L'ensemble des idempotents de S est $\{a , b\}$ qui est une bande de zéro a, et cependant, S n'admet ni zéro à gauche, ni zéro à droite.

Si S est un demi-groupe périodique, si Z est l'ensemble supposé non vide des zéros à gauche (par exemple) de S, on définit :

$$(a \equiv b \quad (\mathcal{C})) \Longleftrightarrow (a = b) \quad \text{ou} \quad \exists\, n \in \underset{\sim}{N}\,, \quad \exists\, z_i \in Z\,, \quad a^n = b^n = z_i \in Z\,.$$

Il est clair que cette relation $(\mathcal{C})$ est une relation d'équivalence. Si nous supposons que, de plus, l'équivalence en fuseaux $(\mathfrak{F})$ est une congruence, alors $(\mathcal{C})$ est une congruence, moins fine que $(\mathfrak{F})$. En effet, si x est un élément quelconque, $(xa)^n$ appartient au fuseau de xa, F_{xa}, et $x^n a^n$ aussi. Donc si $a \equiv b \ (\mathcal{C})$, et si $a^n = b^n = z_i \in Z$, $x^n a^n = x^n b^n = x^n z_i$, qui est aussi un zéro à gauche, et $a^n x^n = b^n x^n = z_i$, donc $xa \equiv xb \ (\mathcal{C})$ et $ax \equiv bx \ (\mathcal{C})$.

Si $(\mathcal{C})$ est une congruence, alors $S/\mathcal{C}$ est un demi-groupe périodique ayant mêmes zéros que S, et si $\overline{Z}$ est l'ensemble des zéros de $S/\mathcal{C}$, on a

$$\overline{x}^n \in \overline{Z} \Rightarrow \overline{x} \in \overline{Z}\,.$$

De plus, si S est totalement ordonné, les classes mod $\mathcal{C}$ sont convexes, et par suite $S/\mathcal{C}$ est aussi totalement ordonné. Ceci peut donc justifier l'introduction des $\mathcal{O}$-demi-groupes périodiques dont Z, ensemble des zéros à gauche, par exemple, vérifie

$$(x^n \in Z) \Rightarrow (x \in Z)\,.$$

ce qui est équivalent à

$$(x^2 \in Z) \Rightarrow (x \in Z)\,.$$

PROPOSITION 3. - Soit S un $\mathcal{O}$-demi-groupe périodique, avec un nombre fini d'idempotents ; si $Z = \{\text{zéros à gauche de } S\}$ est non vide et vérifie

$$(x^2 \in Z) \Rightarrow (x \in Z)\,,$$

on définit la relation d'équivalence (Ψ) suivante

$$(a \equiv b \quad (\Psi)) \Longleftrightarrow (\forall\, z \in Z\,, \quad az = bz)\,.$$

Alors (Ψ) est une congruence dont les classes sont des sous-demi-groupes.

Supposons que S est totalement ordonné par $\leqslant$. Il est clair que (Ψ) est toujours une congruence ; il nous suffit donc de montrer que les classes sont des sous-demi-groupes, et même que $a \equiv a^2 \ (\Psi)$ pour tout a de S. Or si $a \in S$ (a peut être supposé distinct d'un zéro à gauche), on a par exemple

$$z_i < a < z_{i+1}\,, \text{ où } z_i \text{ et } z_{i+1} \text{ sont des zéros consécutifs}$$

ou

$$a < z\,, \quad \forall\, z \in Z\,,$$

ou

$$z < a\,, \quad \forall\, z \in Z\,.$$

Raisonnons dans le premier cas, $z_i < a < z_{i+1}$; on a $z_i \leqslant az_i \leqslant a^2 \leqslant z_{i+1}$. Mais $(a^2 = z_{i+1})$ implique $(a = z_{i+1})$, donc $a^2 < z_{i+1}$, et par suite $az_i = z_i$, de même $az_{i+1} = z_{i+1}$. Dans ce cas, si $z \in Z$ et si $z \leqslant z_i$, $z_i\, z = z_i \leqslant az \leqslant az_i = z_i$

et $az = z_i$; de même $a^2 z = z_i$. Au contraire, si $z \in Z$ et $z_{i+1} \leq z$, $az=z_{i+1}$ et de même $a^2 z = z_{i+1}$. Les classes mod la congruence (Ψ) sont donc bien des sous-demi-groupes.

PROPOSITION 4. - Soit S un Θ-demi-groupe périodique ayant un nombre fini d'idempotents, et soit Z l'ensemble des zéros à gauche de S tel que

$$(x^2 \in Z) \Longrightarrow (x \in Z) ,$$

et tel que $|Z| > 1$. ($|X|$ désigne le cardinal de l'ensemble X.)

Soit $A_i = \{x \in S - Z ; \exists z_i \in Z ; xZ = z_i\}$. Alors A_i est un sous-demi-groupe réflexif de S. (Un ensemble X est réflexif si $(ab \in X) \Longleftrightarrow (ba \in X)$.)

Si a et $b \in A_i$, il est clair que $abZ = z_i$; pour que A_i soit un sous-demi-groupe, il nous suffit de montrer que $ab \neq z_i$. Si $ab = z_i$, on a nécessairement, d'après la condition $(x^2 \in Z) \Longrightarrow (x \in Z)$ et le fait que le produit ab est compris entre a^2 et b^2,

$$a^2 < z_i < b^2 .$$

Comme les fuseaux sont convexes, $a < z_i < b$. Mais, on a vu, au cours de la démonstration de la proposition 3, que si un élément x est compris entre deux zéros, $|xZ| = 2$, donc $a < z$ pour tout z de Z et $z < b$ pour tout z de Z. Mais alors $a < z_1 < \ldots < z_n < b$, et $aZ = z_1$, $bZ = z_n$, $z_1 \neq z_n$, et ceci est impossible.

Enfin A_i est un sous-demi-groupe réflexif : si nous avions $abZ = z_i$ et $baZ = z_i'$, alors, pour tout z de Z, $ab < z$ et $z < ba$ nécessairement ; donc on a aussi $a < z$ et $z < b$, pour tout $z \in Z$, si $a < b$, et $aZ = z_i$, $bZ=z_i'$ aussi ; si $a^n = e$, $b^n = f$, où e, $f \in E$, on a $eZ = z_i$, $fZ = z_i'$, et $b^n a^n Z = feZ = z_i'$, $efZ = z_i$.

Mais on sait (cf. [4]) que dans une Θ-bande finie E, de zéros Z, l'ensemble $A = \{x \in E - Z ; \exists z \in Z , xZ = z\}$ est saturé mod $\mathfrak{D}$.

On a donc une contradiction, et A_i est un sous-demi-groupe réflexif.

THÉORÈME 3. - Soit S un demi-groupe périodique avec un nombre fini, n, d'idempotents, et admettant un ensemble Z de zéros à gauche, tel que $|Z| > 1$ et tel que $(x^2 \in Z) \Longrightarrow (x \in Z)$. Alors S est un Θ-demi-groupe, si, et seulement si,

1° Les classes mod Ψ sont des Θ-demi-groupes, sous-demi-groupes de S,

2° S/Ψ est une Θ-bande,

3° $\{x \in S - Z ; \exists z \in Z , xZ = z\}$ est un sous-demi-groupe de S, réflexif, s'il n'est pas vide.

Condition nécessaire. - D'après la proposition 3, les classes mod Ψ ont la propriété 1°, et S/Ψ est image Θ-homomorphe de S puisque les classes mod Ψ sont convexes. S/Ψ est donc une $\mathcal{O}$-bande. La proposition 4 nous donne la propriété 3°.

Condition suffisante. - Si $a \equiv z \quad (\Psi)$, où $z \in Z$, on a par définition de Ψ,

$$az' = zz' \;,\quad \forall\, z' \in Z \;, \text{ donc } \quad aZ = z \;.$$

D'autre part, si $z_1 \equiv z_2 \quad (\Psi)$, on a $z_1 = z_2$, donc S/Ψ a les mêmes zéros à gauche que S . Si $x \in S$, nous noterons $\overline{x}$ l'image de x dans $S/\Psi = \overline{S}$, $\overline{Z}$ l'image de Z , et $\overline{Z}$ est isomorphe à Z .

D'après [4] (théorème 1-2, condition 4 (α)), il y a au plus deux zéros à gauche $\overline{z}_1$ et $\overline{z}_n$ dans $\overline{S}$ tels que $\overline{a}\overline{Z} = \overline{z}_1$, $\overline{a}'\,\overline{Z} = \overline{z}_n$, avec $\overline{a}$, $\overline{a}' \in \overline{S} - \overline{Z}$, puisque $\overline{S}$ est une $\mathcal{O}$-bande finie. Il y a donc au plus, d'après la condition 3°, deux sous-demi-groupes A_0 et A_n de S tels que

$$A_0\, Z = z_1 \quad \text{et} \quad A_n\, Z = z_n \;,$$

et on aura de plus, dans $\overline{S}$, $\overline{z}_1 \leq z \leq \overline{z}_n$, $\forall\, \overline{z} \in \overline{S}$.

Dans $\overline{S}$, si $\overline{a}\overline{z} = \overline{b}\overline{z}$ pour tout $\overline{z}$ de $\overline{Z}$, alors $\overline{a} = \overline{b}$. En effet, si $az \equiv bz \quad (\Psi)$ pour tout z de Z , $az = bz$, donc $a \equiv b$ et $\overline{a} \equiv \overline{b}$. Il résulte alors de l'étude des bandes finies (voir par exemple la table de Cayley d'une $\mathcal{O}$-bande finie, avec zéros à gauche dans [4]), que, dans $\overline{S}$, si $\overline{z}_i < \overline{a} \leq \overline{b} < \overline{z}_{i+1}$, alors $\overline{a} = \overline{b}$.

S est alors nécessairement totalement ordonné de la façon suivante :

$$\overline{z}_1 < \overline{a}_1 < \overline{z}_2 < \ldots < \overline{z}_i < \overline{a}_i < \ldots < \overline{a}_{n-1} < \overline{z}_n \;, \text{ où } \quad \overline{a}_i \in \overline{S} - \overline{Z} \;,\quad \overline{z}_i \in \overline{Z} \;.$$

On ne peut en effet avoir $\overline{x} < \overline{z}_1$, si $\overline{z}_1$ est le plus petit zéro à gauche, car alors $\overline{x}\overline{z}_i = \overline{z}_1$ pour tout i , donc $xz_i \equiv z_1$, et $xz_i = z_1$ pour tout i , donc $x \equiv z_1 \quad (\Psi)$; de même, il ne peut exister d'élément $\overline{y}$ tel que $\overline{z}_n < \overline{y}$.

Toujours d'après [4], la table de $\overline{S}$ est alors la suivante

$\overline{S}$	$\overline{z}_1$	$\overline{a}_1$	$\overline{z}_2$	$\ldots$	$\ldots$	$\overline{a}_{n-1}$	$\overline{z}_n$
$\overline{z}_1$	$\overline{z}_1$	$\overline{z}_1$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\overline{z}_1$
$\overline{a}_1$	$\overline{z}_1$	$\overline{a}_1$	$\overline{z}_2$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\overline{z}_2$
$\overline{z}_2$	$\overline{z}_2$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\overline{z}_2$
$\vdots$	$\vdots$						
$\overline{a}_{n-1}$	$\overline{z}_{n-1}$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\overline{z}_{n-1}$	$\overline{a}_{n-1}$	$\overline{z}_n$
$\overline{z}_n$	$\overline{z}_n$	$\overline{z}_n$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\overline{z}_n$

On déduit alors que, dans S , la classe de $\overline{z}_1$ est

$$A_0 = A'_0 \cup \{z_1\} \;, \text{ où } \quad A'_0 = \{x \in S - Z \;;\quad xZ = z_1\} \;,$$

la classe de $\overline{z}_n$ est

$$A_n = A'_n \cup \{z_n\} \;, \text{ où } \quad A'_n = \{x \in S - Z \;;\quad xZ = z_n\} \;,$$

la classe de z_i , $i \neq 1$, $i \neq n$, est réduite à z_i . Nous notons A_i , la classe de a_i , $i \in \{1 , 2 , \ldots , n\}$.

D'après les conditions 1° et 3°, chaque A_i est un Θ-demi-groupe, de même A'_0 , A'_n sont des Θ-demi-groupes, puisque $A_0[A_n]$ = classe de $z_1[z_n]$ est un Θ-demi-groupe admettant $A'_0[A'_n]$ comme sous-demi-groupe.

On peut de plus préciser quel est le produit d'un élément de A_i par un élément de A_j .

<u>Si</u> $i < j$, $A_i A_j = z_{i+1}$, $A_j A_i = z_j$, <u>si</u> i <u>et</u> j <u>sont distincts de</u> 0 <u>et de</u> n .

D'après la table de $\overline{S}$, on a, si $i < j$, $\overline{a}_i \overline{a}_j = \overline{z}_{i+1}$, donc $a_i a_j \equiv z_{i+1}$, et comme $i < i+1 \leqslant j < n$, $a_i a_j = z_{i+1}$. De même, on démontre que $a_j a_i = z_j$.

$$A_0 A_i = z_1 \ , \quad A_i A_0 = z_i \ , \ \underline{\text{si}} \ \ i \neq 0 \ \ \underline{\text{et}} \ \ i \neq n \ .$$

Soient en effet $a \in A_0$ et $a_i \in A_i$. On a donc $\overline{aa_i} = \overline{z}_1 \overline{a}_i = \overline{z}_1$ et $aa_i = z_1$. D'autre part, $\overline{a}_i \overline{a} = \overline{a}_i \overline{z}_1 = \overline{z}_i$; comme $i \neq 0$, $i \neq n$, $a_i a = z_i$, et $(aa_i)^2$ est aussi un zéro à gauche ; par suite, aa_i est un zéro à gauche, donc $aa_i = z$.

Montrons enfin que

$$A_0 A_n = z_1 \ , \quad A_n A_0 = z_n$$

si $a \in A_0$ et $b \in A_n$, on a $\overline{ab} = \overline{z}_1 \overline{z}_n = \overline{z}_1$ et $\overline{ba} = \overline{z}_n$. Si ab est un zéro à gauche, il en est de même de ba , et réciproquement. En effet,

$$(ab \in Z) \Longrightarrow ((ba)^2 \in Z) \Longrightarrow (ba \in Z) \ .$$

Si ab n'appartient pas à Z , alors $ab \in A'_0$, et par suite $ba \in A'_n$. Mais comme A'_0 et A'_n sont des demi-groupes réflexifs d'après la condition 3°, il y a une absurdité, et nécessairement $ab \in Z$, donc $ab = z_1$ et $ba = z_n$.

Comme $A_0 = A'_0 \cup \{z_1\}$, où A'_0 est un sous-demi-groupe, et A_0 un Θ-demi-groupe de zéro z_1 , on peut ordonner totalement A'_0 et de même pour A'_n . On peut alors définir sur S une relation d'ordre total prolongeant les ordres sur A'_0 , A_1 , ... , A_{n-1} , A'_n par

$$A'_0 < z_1 < A_1 < z_2 < \ldots < z_n < A'_n \ .$$

Grâce aux propriétés de multiplication des A_i , on en déduit que S est alors totalement ordonné.

On trouvera, dans [4], une condition nécessaire et suffisante pour que $\overline{S}$, bande finie, soit une Θ-bande.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CLIFFORD (A. H.) and PRESTON (G. B.). - The algebraic theory of semigroups. Vol. 1. - Providence, American mathematical Society, 1961 (Mathematical Surveys, 7).

[2] DUBREIL-JACOTIN (Marie-Louise). - Sur les 0-bandes, Semigroup Forum, t. 3, 1971, p. 156-159.

[3] GABOVIČ (E. Ja.). - Trois théorèmes sur les demi-groupes périodiques totalement ordonnés [en russe], Mat. Zametki, t. 6, 1969, p. 187-196.

[4] MERLIER (Thérèse). - Sur les 0-bandes finies et les demi-groupes totalement ordonnés 0-simples, Semigroup Forum, t. 4, 1972, p. 124-149.

[5] MERLIER (Thérèse). - Nildemi-groupes totalement ordonnés, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 274, 1972, Série A, p. 1779-1782.

[6] SAITO (Toru). - The orderability of idempotent semigroups, Séminaire Dubreil : Algèbre, 25e année, 1971/72, Journées d'algèbre [1972. Paris], n° J8, 7 p.

Thérèse MERLIER
Résidence Gascogne
105 rue Boucicaut
92260 FONTENAY AUX ROSES