ALAIN GERENTE

Compléments sur la structure des demi-groupes duaux

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 25, n° 2 (1971-1972), exp. n° J11, p. J1-J15

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1971-1972__25_2_A11_0>

Séminaire DUBREIL (Algèbre)
25e année, 1971/72, n° J11, 15 p.
Journées d'Algèbre [1972. Paris]
Demi-groupes. Demi-groupes ordonnés
(M.-L. DUBREIL-JACOTIN)

30 juin 1972

COMPLÉMENTS SUR LA STRUCTURE DES DEMI-GROUPES DUAUX

par Alain GERENTE

Les notations utilisées ici sont celles de [3], et nous renvoyons le lecteur à cet article, ainsi qu'à [5], pour un rappel sur la définition et les propriétés des demi-groupes duaux utilisés ici sans démonstration.

Si S est un demi-groupe dual, S contient au moins un idéal maximal ; nous étudions, dans le paragraphe 1, la structure des demi-groupes duaux contenant un seul idéal maximal ; si S est un tel demi-groupe, et si on note $E^{\times}$ l'ensemble des idempotents non nuls de S, les sous-demi-groupes $e\,S\,e$, où e parcourt $E^{\times}$, sont des demi-groupes duaux isomorphes entre eux (corollaire 1.5) ; de plus, la structure de S est entièrement déterminée par la donnée de $E^{\times}$ et de $e\,S\,e$; en fait, S est isomorphe à $\mathfrak{M}^0(e\,S\,e\ ;\ E^{\times}\ ,\ E^{\times}\ ;\ \Delta)$ (théorème 1.2) ; réciproquement, si S est isomorphe à $\mathfrak{M}^0(T\ ;\ I\ ,\ I\ ;\ \Delta)$, où I est un ensemble non vide et où T est un demi-groupe dual avec élément neutre, alors S est dual avec un seul idéal maximal (corollaire 1.7). Nous voyons ainsi que les demi-groupes duaux avec élément neutre jouent le même rôle, pour les demi-groupes duaux ayant un seul idéal maximal, que les groupes pour les demi-groupes de Brandt.

Si S est un demi-groupe, l'ensemble $\overline{R}$ (resp. $\overline{L}$) des $\mathcal{R}$-classes (resp. $\mathcal{L}$-classes) de S est muni de la relation d'ordre classique O_R (resp. O_L) à savoir, si a et b sont des éléments de S, $R_a \leqslant R_b$ (resp. $L_a \leqslant L_b$) si et seulement si $a \cup aS \subseteq b \cup bS$ (resp. $a \cup Sa \subseteq b \cup Sb$). Le paragraphe 2 est consacré à l'étude des relations O_R et O_L lorsque S est dual. Ces notions nous permettent de donner un certain nombre de conditions nécessaires pour qu'un demi-groupe soit l'idéal maximal d'un demi-groupe dual avec élément neutre. Ce problème est important, car la construction de demi-groupes duaux avec élément neutre (donc des demi-groupes duaux avec idéal maximal unique) sera presque entièrement résolue lorsque nous connaîtrons des conditions nécessaires et suffisantes simples pour qu'un demi-groupe soit l'idéal maximal d'un demi-groupe dual avec élément neutre.

1. Structure des demi-groupes duaux contenant un seul idéal maximal.

Un demi-groupe S est un demi-groupe de Brandt si, et seulement si, S est isomorphe à un demi-groupe de matrice de Rees $\mathfrak{M}^0(G\ ;\ I\ ,\ I\ ;\ \Delta)$, où G est un groupe avec zéro, I est un ensemble non vide, et $\Delta = (a_{ij})_{i\in I, j\in I}$ est la $I \times I$ matrice ainsi définie :

$$\text{si } i \neq j\ ,\quad a_{ij} = 0$$

$$\text{si } i = j\ ,\quad a_{ij} = e \text{ élément neutre de } G\ .$$

Une généralisation de ce type de demi-groupe consiste à remplacer G par un demi-groupe T avec zéro et élément neutre e, Δ étant définie comme ci-dessus ; nous noterons $\mathcal{M}^0(T\ ;\ I, I\ ;\ \Delta)$, ce demi-groupe de matrice de Rees ; d'autre part, considérons la loi de composition suivante sur $T \times I \times I$:

$$(1) \qquad (a\ ;\ i, \lambda)(b\ ;\ j, \mu) = \begin{cases}(0\ ;\ i, \mu) & \text{si } \lambda \neq j .\\ (ab\ ;\ i, \mu) & \text{si } \lambda = j .\end{cases}$$

Il est clair que $T \times I \times I$ est un demi-groupe, et que l'ensemble $\{0\} \times I \times I$ est un idéal de $T \times I \times I$; on vérifie, sans trop de difficultés, que

$$(T \times I \times I)/(\{0\} \times I \times I)$$

est isomorphe à $\mathcal{M}^0(T\ ;\ I, I\ ;\ \Delta)$, d'où le lemme suivant.

LEMME 1.1. - <u>Soient</u> T <u>un demi-groupe avec</u> 0 <u>et élément neutre</u> e, I <u>un ensemble non vide</u>, $\Delta = (a_{ij})_{i\in I, j\in I}$ <u>la</u> $I \times I$ <u>matrice telle que</u> $a_{ij} = 0$ <u>si</u> $i \neq j$, <u>et</u> $a_{ij} = e$ <u>si</u> $i = j$; <u>on munit</u> $T \times I \times I$ <u>de la loi de composition définie ci-dessus en</u> (1). <u>Alors les propriétés suivantes sont équivalentes</u> :

(A) S <u>est un demi-groupe isomorphe à</u> $\mathcal{M}^0(T\ ;\ I, I\ ;\ \Delta)$;

(B) S <u>est un demi-groupe isomorphe à</u> $(T \times I \times I)/(\{0\} \times I \times I)$;

<u>un tel demi-groupe</u> S <u>est appelé demi-groupe de Brandt généralisé</u>.

THÉORÈME 1.2. - <u>Un demi-groupe dual</u> S <u>ayant un seul idéal maximal est un demi-groupe de Brandt généralisé</u>.

Soient e un idempotent non nul de S, $E^\times$ l'ensemble des idempotents non nuls de S ; nous allons construire un isomorphisme Φ de

$$(e\,S\,e \times E^\times \times E^\times)/(\{0\} \times E^\times \times E^\times)$$

sur S, $e\,S\,e \times E^\times \times E^\times$ étant muni de la loi de composition suivante :

$$(a\ ;\ i, f)(b\ ;\ g, h) = \begin{cases}(0\ ;\ i, h) & \text{si } f \neq g .\\ (ab\ ;\ i, h) & \text{si } f = g .\end{cases}$$

Pour éviter toute confusion avec le zéro de S, nous noterons $\overline{0}$ le zéro de $(e\,S\,e \times E^\times \times E^\times)/(\{0\} \times E^\times \times E^\times)$.

<u>Construction de</u> Φ. - Il suit de l'hypothèse que $E^\times$ est contenu dans une seule $\mathcal{D}$-classe de S, donc, pour tout idempotent f non nul et distinct de e, $L_e \cap R_f$ est non vide ; nous pouvons choisir un élément quelconque, noté q_f, dans $L_e \cap R_f$; q_f admet un inverse p_f dans $R_e \cap L_f$, d'où

$$p_f\, q_f = e \quad \text{et} \quad q_f\, p_f = f \quad ([1] \text{ lemme 2.12 et théorème 2.20}) ;$$

enfin, posons $q_e = p_e = e$. Soit Φ l'application de $(e\,S\,e \times E^\times \times E^\times)/(\{0\} \times E^\times \times E^\times)$ dans S, ainsi définie

$$\begin{cases} \Phi(\overline{0}) = 0 \ ; \\ \text{Si} \quad a \in e\,S\,e \setminus \{0\} \quad \text{et} \quad (f\,,\,g) \in E^\times \times E^\times\,, \quad \Phi(a\,;\ f\,,\,g) = q_f\, a p_g \,. \end{cases}$$

Φ est injective : Remarquons d'abord que si a est un élément non nul de $e\,S\,e$, et si $(f\,,\,g)$ appartient à $E^\times \times E^\times$, $\Phi(a\,;\ f\,,\,g) \neq 0$; en effet, $q_f\, ap_g$ appartient à $L_e\, aR_e$, c'est-à-dire D_a ([3] théorème 4d).

Considérons maintenant deux éléments non nuls de $e\,S\,e$, a et b, quatre éléments f, f', g, g' de $E^\times$ tels que $q_f\ {}_g = q_{f'}\, bp_{g'}$; alors $q_f\, ap_g \neq 0$; compte tenu de la localisation de q_f, $q_{f'}$, p_g, $p_{g'}$, nous avons

$$fq_f = q_f\,,\quad f'\,q_{f'} = q_{f'}\,,\quad p_g\, g = p_g\,,\quad p_{g'}\, g' = p_{g'}\ ;$$

donc $q_f\, ap_g$ appartient à $f\,S\,g \setminus \{0\}$, $q_{f'}\, bp_{g'}$ appartient à $f'\,S\,g' \setminus \{0\}$, et $f\,S\,g \cap f'\,S\,g'$ n'est pas réduit à $\{0\}$; d'où $f = f'$ et $g = g'$ ([5] lemme 5.1) ;

$$(q_f\, ap_g = q_f\, bp_g) \quad \text{entraîne} \quad (p_f\, q_f\, ap_g\, q_g = p_f\, q_f\, bp_g\, q_g)\,,$$

soit $eae = ebe$, c'est-à-dire $a = b$ et $(a\,;\ f\,,\,g) = (b\,;\ f'\,,\,g')$.

Φ est surjective : Comme $\Phi(a\,;\ f\,,\,g)$ appartient à $f\,S\,g$ (a dans $eSe\setminus\{0\}$ et $(f\,,\,g)$ dans $E^\times \times E^\times$), il suffit de montrer que $\Phi(eSe\setminus\{0\}\ ;\ f,g)=fSg\setminus\{0\}$. Si D est une $\mathcal{D}$-classe non nulle de S, $D \cap e\,S\,e$ est non vide ([3] théorème 4), et $E^\times$ contenu dans une seule $\mathcal{D}$-classe ; soit x dans $D \cap e\,S\,e$, $D \cap e\,S\,e = H_e \times H_e$ ([3] théorème 4e), donc $\Phi(D \cap e\,S\,e\ ;\ f\,,\,g) = q_f\, H_e{\times}H_e\, p_g$; mais

$$q_f\, H_e = H_{q_f} = L_e \cap R_f \quad \text{et} \quad H_e\, p_g = H_{p_g} = R_e \cap L_g \quad ([1]\ \text{théorème } 2.17),$$

d'où

$$\Phi(D \cap e\,S\,e\ ;\ f\,,\,g) = L_e \cap R_f) \times (L_g \cap R_e) = D \cap f\,S\,g$$

puisque $exe = x$ ([3] théorème 4e) ; $\Phi(e\,S\,e \setminus \{0\})\ ;\ f\,,\,g) = f\,S\,g \setminus \{0\}$ suit facilement.

Φ est un homomorphisme : Soient a et b deux éléments non nuls de $e\,S\,e$, f, g, h, i des idempotents non nuls de S, nous allons voir que

$$\Phi(a\,;\ f\,,\,g)\ \Phi(b\,;\ h\,,\,i) = \Phi[(a\,;\ f\,,\,g)(b\,;\ h\,,\,i)]\,.$$

Supposons $g \neq h$; $(a\,;\ f\,,\,g)(b\,;\ h\,,\,i) = \overline{0}$, d'où

$$\Phi[(a\,;\ f\,,\,g)(b\,;\ h\,,\,i)] = 0\ ;$$

or $\Phi(a\,;\ f\,,\,g)\ \Phi(b\,;\ h\,,\,i) = q_f\, ap_g\, q_h\, bp_i = 0$, car $p_g\, q_h$ appartient à $SghS = \{0\}$. Supposons $g = h$;

$$\Phi(a;f,g)\ \Phi(b;g,i)=q_f\, ap_g\, q_g\, bp_i=q_f\, aebp_i=q_f\, abp_i=\Phi(ab;f,i)=\Phi[(a;f,g)(b;g,i)]\,.$$

Nous allons étudier maintenant sous quelles conditions sur T, $\mathcal{M}^0(T\,;\ I,I\,;\ \Delta)$ est dual. Si S est dual et possède un idéal maximal unique, $\mathcal{M}^0(eSe\,;\ E^\times\,;\ E^\times\,;\Delta)$ est dual, mais $e\,S\,e$ n'est pas quelconque.

THÉORÈME 1.3. - Soient S un demi-groupe dual ayant un seul idéal maximal, e un idempotent non nul de S ; alors $e\,S\,e$ est un demi-groupe dual.

Si A est une partie non vide de S, nous définissons l'annulateur à gauche de A dans $e\,S\,e$, $\ell^*(A)$, et l'annulateur à droite de A dans $e\,S\,e$, $r^*(A)$, par les propriétés suivantes :

$$\ell^*(A) = \{x \in e\,S\,e\ ;\ xA = 0\}\ , \qquad r^*(A) = \{y \in e\,S\,e\ ;\ Ay = 0\}\ .$$

D'où

$$\ell^*(A) = \ell(A) \cap e\,S\,e \quad \text{et} \quad r^*(A) = r(A) \cap e\,S\,e\ .$$

Soit L un idéal à gauche de $e\,S\,e$, nous allons démontrer successivement que L vérifie les propriétés suivantes :

1° $SL \cap e\,S\,e = L$;

2° $r(L) = r(SL)$;

3° $\ell^*[r(L)] = L$;

4° $\ell^*[r^*(L)] = \ell^*[r(L)]$.

Preuve du 1°. - Si x appartient à $SL \cap e\,S\,e$, il existe s dans S et ℓ dans L tels que $x = s\ell$; comme $ex = x$, $x = es\ell = ese\ell$ et x appartient à $e\,S\,e\,L$, donc à L ; alors $SL \cap e\,S\,e \subseteq L$, et l'inclusion inverse est immédiate.

Preuve du 2°. - $(L \subseteq SL)$ entraîne $(r(L) \supseteq r(SL))$; soit x un élément de $r(L)$, $Lx = 0$, donc $SLx = 0$, et x appartient à $r(SL)$, d'où $r(L) = r(SL)$.
3° découle de 1° et 2°, car

$$\ell^*[r(L)] = \ell^*[r(SL)] = \ell[r(SL)] \cap e\,S\,e = SL \cap e\,S\,e = L\ .$$

Preuve du 4°. - $(r^*(L) \subseteq r(L))$ entraîne $(\ell^*[r^*(L)] \supseteq \ell^*[r(L)])$, donc il suffit d'établir que $\ell^*[e\,S\,e \cap r(L)] = \ell^*[r^*(L)] \subseteq \ell^*[r(L)]$, c'est-à-dire que, si x est un élément de $e\,S\,e$ tel que $x[e\,S\,e \cap r(L)] = 0$, alors $xr(L) = 0$; mais $S = \bigcup(fS\ ;\ f \in E^{\times})$ ([5] théorème 3.10), et $x(fS) = 0$ pour tout idempotent f distinct de e (car $xe = x$) ; il suffit donc de montrer que $x[r(L) \cap eS] = 0$. Soient y un élément non nul de $r(L) \cap eS$, g l'idempotent tel que

$yg = y$; $\{h \in E^{\times}\ ;\ Sh \cap D_y \text{ non vide}\}$ est égal à $E \cap D_g$ ([3] théorème 4a) ; compte tenu de l'hypothèse faite sur S, e appartient à $E \cap D_g$, donc $D_y \cap Se$, et en particulier $R_y \cap Se = R_y \cap e\,S\,e$ sont non vides ; soit a un élément de $R_y \cap e\,S\,e$, il existe α dans S tel que $y = a\alpha$; $R(L)$, étant un idéal à droite, contient R_y, donc a appartient à $R(L) \cap e\,S\,e$; alors $xa = 0$, d'où

$$xy = xa\alpha = 0 \quad \text{et} \quad x[r(L) \cap eS] = 0\ .$$

Finalement si L est un idéal à gauche de $e\,S\,e$, il suit des 3° et 4° que $\ell^*[r^*(L)] = L$; on montrerait de même que, pour tout idéal à droite R de $e\,S\,e$, $r^*[\ell^*(R)] = R$; $e\,S\,e$ n'étant pas réduit à 0 (car $e \neq 0$) est un demi-groupe dual.

LEMME 1.4. - Soient S un demi-groupe, e et f deux idempotents de S appartenant à la même $\mathcal{D}$-classe ; alors les demi-groupes $e\,S\,e$ et $f\,S\,f$ sont isomorphes.

Comme $e\,\mathcal{D}\,f$, $R_e \cap L_f$ est non vide ; choisissons un élément a dans $R_e \cap L_f$; il existe un inverse a' de a dans $L_e \cap R_f$, d'où $aa' = e$ et $a'\,a = f$ ([1] lemme 2.12 et théorème 2.20) ; soit Φ l'application définie sur $e\,S\,e$ telle que $\Phi(x) = a'\,xa$; comme $af = a$ et $fa' = a'$, $\Phi(e\,S\,e) \subseteq f\,S\,f$.

Φ est injective : Soient x et y deux éléments de $e\,S\,e$ tels que $a'xa=a'ya$, alors,

$$aa'\,xaa' = aa'\,yaa' ,$$

d'où $exe = eye$, c'est-à-dire $x = y$.

Φ est surjective : Si z appartient à $f\,S\,f$, $z = fzf = a'\,aza'\,a = \Phi(aza')$; or aza' appartient à $e\,S\,e$ puisque $ea = a$ et $a'\,e = a$.

Φ est un homomorphisme : Soient x et y , deux éléments de $e\,S\,e$;

$$\Phi(x)\,\Phi(y) = a'\,xaa'\,ya = a'\,xeya = a'\,xya = \Phi(xy) .$$

Donc Φ est un isomorphisme de $e\,S\,e$ sur $f\,S\,f$.

De ce lemme et du théorème précédent, on déduit immédiatement le résultat suivant.

COROLLAIRE 1.5. - Soient S un demi-groupe dual ayant un seul idéal maximal, e et f deux idempotents non nuls de S ; alors $e\,S\,e$ et $f\,S\,f$ sont des demi-groupes duaux isomorphes.

THÉORÈME 1.6. - Soient T un demi-groupe avec zéro et élément neutre e , I un ensemble non vide, $\Delta = (a_{ij})_{i\in I, j\in I}$ la $I \times I$ matrice suivante : $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$, $a_{ij} = e$ si $i = j$; alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

(A) T est un demi-groupe dual,

(B) $\mathcal{M}^0(T\,;\;I\,,I\,;\;\Delta)$ est un demi-groupe dual,

(C) $\mathcal{M}^0(T\,;\;I\,,I\,;\;\Delta)$ est un demi-groupe dual ayant un idéal maximal unique.

Enfin, si (A) est vérifiée, l'ensemble des idempotents non nuls de $\mathcal{M}^0(T;I,I;\Delta)$ est équipotent à I , et si $\overline{f}$ est un idempotent non nul de $\mathcal{M}^0(T\,;\;I\,,I\,;\;\Delta)$, $\overline{f}[\mathcal{M}^0(T\,;\;I\,,I\,;\;\Delta)]\,\overline{f}$ est isomorphe à T .

Compte tenu du lemme 1.1, nous pouvons, dans la démonstration, remplacer $\mathcal{M}^0(T\,;\;I\,,I\,;\;\Delta)$ par $\overline{T} = (T \times I \times I)/(\{0\} \times I \times I)$; nous noterons $\overline{0}$ le zéro de $\overline{T}$, $\overline{\mathcal{L}}$, $\overline{\mathcal{R}}$, $\overline{\mathcal{D}}$ les $\mathcal{L}$-équivalence de Green, $\mathcal{R}$-équivalence de Green et $\mathcal{D}$-équivalence de Green sur $\overline{T}$.

Pour simplifier nous écrirons $(a\,;\;i\,,j)$ les éléments de $\overline{T}(a \in T\,;$ $(i\,,j) \in I \times I)$ en convenant que les éléments $(0\,;\;i\,,j)$ $[(i\,,j) \in I \times I]$

sont égaux, et représentent le zéro de $\overline{T}$, $\overline{0}$. Si C et D sont deux parties de I , et B une partie de T contenant le zéro de T , nous noterons (B ; C , D) l'ensemble

$$\{\overline{0}\} \cup \{(x \; ; \; c \, , \, d) \; ; \; x \in B \setminus \{0\} \, , \; c \in C \, , \; d \in D\} \, .$$

(B) $\Longrightarrow$ (C) : On voit facilement que $\{(e \; ; \; i \, , \, i) \; ; \; i \in I\}$ est l'ensemble des idempotents non nuls de $\overline{T}$; soient $(e \; ; \; i \, , \, i)$ et $(e \; ; \; j \, , \, j)$ deux d'entre eux $(i \in I \, , \; j \in I)$; alors :

$$(e \; ; \; i \, , \, i) \, \overline{\mathcal{R}} \, (e \; ; \; i \, , \, j) \, , \text{ car } \begin{cases} (e \; ; \; i \, , \, i)(e \; ; \; i \, , \, j) = (e \; ; \; i \, , \, j) \\ (e \; ; \; i \, , \, j)(e \; ; \; i \, , \, i) = (e \; ; \; i \, , \, i) \end{cases}$$

$$(e \; ; \; j \, , \, j) \, \overline{\mathcal{L}} \, (e \; ; \; i \, , \, j) \, , \text{ car } \begin{cases} (e \; ; \; i \, , \, j)(e \; ; \; j \, , \, j) = (e \; ; \; i \, , \, j) \\ (e \; ; \; j \, , \, i)(e \; ; \; i \, , \, j) = (e \; ; \; j \, , \, j) \end{cases}$$

donc $(e \; ; \; i \, , \, i) \, \overline{\mathcal{D}} \, (e \; ; \; j \, , \, j)$, c'est-à-dire que deux idempotents non nuls quelconques de $\overline{T}$ sont $\overline{\mathcal{D}}$-équivalents ; il est clair que si $\overline{T}$ est dual, $\overline{T}$ possède un idéal maximal unique.

(C) $\Longrightarrow$ (A) : soit $(e \; ; \; i \, , \, i)$ un idempotent de $\overline{T}$ $(i \in I)$; alors

$$(e \; ; \; i \, , \, i) \, \overline{T} \, (e \; ; \; i \, , \, i) = (e \, T \, e \; ; \; i \, , \, i) = (T \; ; \; i \, , \, i) \; ;$$

l'application de $(T \; ; \; i \, , \, i)$ sur T qui à $(x \, , \, i \, , \, i)$ associe x est clairement un isomorphisme de $(T \; ; \; i \, , \, i)$ sur T ; $(T \; ; \; i \, , \, i)$ étant dual d'après le théorème 1.3, il en est de même de T .

(A) $\Longrightarrow$ (B) : soit A [resp. A] une partie de T [resp. $\overline{T}$] , nous noterons $\ell(A)$ et $r(A)$ [resp. $\overline{\ell}(\overline{A})$ et $\overline{r}(\overline{A})$] l'annulateur à gauche et l'annulateur à droite de A dans T [resp. de $\overline{A}$ dans $\overline{T}$] ; si $(a \; ; \; i \, , \, j)$ est un élément non nul de $\overline{T}$, on voit facilement que l'idéal à gauche engendré par $(a \; ; \; i \, , \, j)$ dans $\overline{T}$ n'est autre que $(Ta \; ; \; I \, , \, j)$.

Dans la suite de la démonstration, $\overline{L}$ désignera un idéal à gauche de $\overline{T}$, et pour tout élément i de I , nous poserons $\overline{L}_i = \overline{L} \cap (T \; ; \; I \, , \, i)$; $(T \; ; \; I \, , \, i)$ est clairement un idéal à gauche de $\overline{T}$, donc $\overline{L}_i$ est un idéal à gauche de $\overline{T}$. Compte tenu de la forme des idéaux principaux à gauche de $\overline{T}$, $\overline{L}_i$ peut se mettre sous la forme $(L_i \; ; \; I \, , \, i)$, où L_i est un idéal à gauche de T . Nous allons montrer que $\overline{\ell}[\overline{r}(\overline{L}_i)] = \overline{L}_i$.

$\overline{r}(\overline{L}_i) \setminus \{\overline{0}\} = \{(a \; ; \; j,k) \; ; \; a \in T \setminus \{0\} \; ; \; (j,k) \in I \times I \; ; \; (L_i \; ; \; I,i)(a \; ; \; j,k) = \overline{0}\}$;

- si $i \neq j$, $(L_i \; ; \; I \, , \, i)(a \; ; \; j \, , \, k) = \overline{0}$, donc $(T \; ; \; I \setminus \{i\} \, , \, I) \subseteq \overline{r}(\overline{L}_i)$;
- si $i = j$, $(L_i \; ; \; I \, , \, i)(a \; ; \; i \, , \, k) = \overline{0}$ si, et seulement si, $L_i \, a = 0$, c'est-à-dire si a appartient à $r(L_i)$, d'où :

$$\overline{r}(\overline{L}_i) = (T \; ; \; I \setminus \{i\} \, , \, I) \cup (r(L_i) \; ; \; i \, , \, I) \, .$$

Soit maintenant $(b \; ; \; m \, , \, n)$ un élément non nul de $\overline{\ell}[\overline{r}(\overline{L}_i)]$ $(b \in T \setminus \{0\}$; $(m \, , \, n) \in I \times I)$. Alors

(α) $$(b\ ;\ m\ ,\ n)(T\ ;\ I \setminus \{i\}\ ,\ I) = \overline{0}$$

et

(β) $$(b\ ;\ m\ ,\ n)(r(L_i)\ ;\ i\ ,\ I) = \overline{0}\ .$$

Si $n \neq i$, n appartient à $I \setminus \{i\}$ et (α) entraîne $(b\ ;\ m\ ,\ n)(T\ ;\ n\ ,\ I)=\overline{0}$, c'est-à-dire $(bT\ ;\ m\ ,\ I) = \overline{0}$, donc $bT = 0$; T étant dual, b serait nul contrairement à l'hypothèse faite sur b .

Donc $n = i$ et (β) entraîne $(b\ ;\ m\ ,\ i)(r(L_i)\ ;\ i\ ,\ I) = \overline{0}$, c'est-à-dire $(br(L_i)\ ;\ m\ ,\ I) = \overline{0}$, donc $br(L_i) = 0$; b appartient à $\ell[r(L_i)]$ c'est-à-dire L_i , et $\overline{\ell}[\overline{r}(\overline{L}_i)] \subseteq (L_i\ ;\ I\ ,\ i) = \overline{L}_i$; comme l'inclusion $\overline{L}_i \subseteq \overline{\ell}[\overline{r}(\overline{L}_i)]$ est vraie dans un demi-groupe quelconque, $\overline{\ell}[\overline{r}(\overline{L}_i)] = \overline{L}_i$.

Nous allons établir maintenant que $\overline{\ell}[\overline{r}(\overline{L})] = \overline{L}$; il suffit clairement de montrer que $\overline{\ell}[\overline{r}(\overline{L})] \subseteq \overline{L}$. Si $\overline{L}$ est réduit à $\{\overline{0}\}$, $\overline{r}(\overline{L}) = \overline{T}$ et $\overline{\ell}[\overline{r}(\overline{L})] = \overline{\ell}(\overline{T}) = \{\overline{0}\}$, car si $(a\ ;\ i\ ,\ j)$ est un élément de $\overline{T}$ tel que $(a\ ;\ i\ ,\ j)(T\ ;\ I\ ,\ I) = \overline{0}$, nous avons $aT = 0$, donc $a = 0$, T étant dual. Supposons $\overline{L}$ non réduit à $\{\overline{0}\}$, alors $J = \{i \in I\ ;\ \overline{L}_i \neq \{\overline{0}\}\}$ est non vide ; $\overline{L} = \bigcup_{j\in J} \overline{L}_j$, d'où

$$\overline{r}(\overline{L}) = \overline{r}(\bigcup_{j\in J} \overline{L}_j = \bigcap_{j\in J} \overline{r}(\overline{L}_j) \quad ([5]\ \text{page } 461)\ ;$$

nous avons vu ci-dessus que :

$$\overline{r}(\overline{L}_j) = (T\ ;\ I \setminus \{j\}\ ,\ I) \cup (r(L_j)\ ;\ j\ ,\ I)\ ,$$

donc $\bigcap_{j\in J} r(\overline{L}_j)$ est égal à

$$[\bigcup_{i\in I\setminus J}(T\ ;\ i\ ,\ I)] \cup [\bigcup_{j\in J}(r(L_j)\ ;\ j\ ,\ I)]\ .$$

Soit $(a\ ;\ k\ ,\ \ell)(a \in T \setminus \{0\}\ ;\ (k\ ,\ \ell) \in I \times I)$ un élément non nul de $\overline{\ell}[\overline{r}(\overline{L})]$; alors

(γ) $$(a\ ;\ k\ ,\ \ell)(T\ ;\ i\ ,\ I) = \overline{0} \quad \text{pour tout } i \text{ de } I \setminus J$$

et

(δ) $$(a\ ;\ k\ ,\ \ell)(r(L_j)\ ;\ j\ ,\ I) = \overline{0} \quad \text{pour tout } j \text{ de } J\ .$$

Si ℓ appartenait à $I \setminus J$, (γ) entraînerait $(a\ ;\ k\ ,\ \ell)(T\ ;\ \ell\ ,\ I) = \overline{0}$, c'est-à-dire $aT = 0$, en contradiction avec a non nul et T dual.

Donc ℓ appartient à J , et il découle de (δ) que :

$$(a\ ;\ k\ ,\ \ell)(r(L_\ell)\ ;\ \ell\ ,\ I) = \overline{0}\ ,$$

c'est-à-dire $ar(L_\ell) = 0$, donc appartient à $\ell[r(L_\ell)] = L_\ell$, et $(a\ ;\ k\ ,\ \ell)$ est un élément de $\overline{L}_\ell$, donc de $\overline{L}$, et nous avons démontré que, pour tout idéal à gauche $\overline{L}$ de $\overline{T}$, $\overline{\ell}[\overline{r}(\overline{L})] = L$; un raisonnement analogue montrerait que, pour tout idéal à droite $\overline{R}$ de $\overline{T}$, $\overline{r}[\overline{\ell}(\overline{R})] = \overline{R}$; $\overline{T}$ n'étant pas réduit à $\{\overline{0}\}$ est dual.

Le reste du théorème se démontre sans difficulté. Du lemme 1.1 et des théorèmes 1.2 et 1.6, nous déduisons immédiatement le corollaire suivant.

COROLLAIRE 1.7. - *Soit* S *un demi-groupe ; les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(A) S *est dual et contient un unique idéal maximal,*

(B) S *est isomorphe à un demi-groupe de matrices de Rees* $\mathcal{M}^0(T ; I , I ; \Delta)$, *où* T *est un demi-groupe dual avec élément neutre* e , I *est un ensemble non vide, et* $\Delta = (a_{ij})_{i\in I, j\in I}$ *est la* $I \times I$ *matrice suivante :* $a_{ij} = 0$ *si* $i \neq j$, $a_{ij} = e$ *si* $i = j$,

(C) S *est isomorphe à un demi-groupe* $(T \times I \times I)/(\{0\} \times I \times I)$, *où* T *est un demi-groupe dual avec élément neutre,* I *est un ensemble non vide, et* $T \times I \times I$ *est muni de la loi de composition suivante :*

Si $(a , b) \in T \times T$ *et* $(i , \lambda , j , \mu) \in I \times I \times I \times I$, *alors* :

$$(a ; i , \lambda)(b ; j , \mu) = \begin{cases} (0 ; i , \mu) & \text{si } \lambda \neq j ; \\ (ab ; i , \mu) & \text{si } \lambda = j . \end{cases}$$

2. Étude des $\mathcal{D}$-classes et des $\mathcal{J}$-classes contenant deux $\mathcal{L}$-classes ou deux $\mathcal{R}$-classes comparables.

Les relations d'ordre partiel qui existent sur l'ensemble des $\mathcal{L}$-classes et sur l'ensemble des $\mathcal{R}$-classes d'un demi-groupe S ont été rappelées dans l'introduction. Nous allons introduire deux définitions :

DÉFINITION 2.1. - *Une* $\mathcal{J}$-*classe* I *d'un demi-groupe est dite stable à gauche (resp. stable à droite) si l'une des conditions suivantes, qui sont équivalentes, est vérifiée :*

(A) *il n'existe pas, dans* I , *deux* $\mathcal{L}$-*classes (resp.* $\mathcal{R}$-*classes) distinctes et comparables,*

(B) *l'ensemble des* $\mathcal{L}$-*classes (resp.* $\mathcal{R}$-*classes) contenues dans* I *admet un élément minimal.*

Une $\mathcal{J}$-*classe stable de chaque côté est dite stable.*

L'équivalence de (A) et (B) se démontre en utilisant la remarque qui suit le lemme 6.44 de [2]. Alors un demi-groupe est stable à gauche (resp. stable à droite, stable) si, et seulement si, chacune de ses $\mathcal{J}$-classes est stable à gauche (resp. à droite, stable) (voir [2], p. 31-32).

DÉFINITION 2.2. - *Une* $\mathcal{D}$-*classe* D *d'un demi-groupe est dite élémentaire à gauche (resp. à droite) si* D *ne contient pas deux* $\mathcal{L}$-*classes (resp.* $\mathcal{R}$-*classes) distinctes et comparables.*

Une $\mathcal{D}$-*classe élémentaire de chaque côté est dite élémentaire.*

Alors un demi-groupe est élémentaire à gauche (resp. élémentaire à droite, élémentaire) si chacune de ses $\mathcal{D}$-classes est élémentaire à gauche (resp. à droite, élémentaire) (voir [2], p. 32).

Dans un demi-groupe quelconque, si D est une $\mathcal{D}$-classe régulière et élémentaire d'un côté, D est élémentaire et est une $\mathcal{J}$-classe (donc une J-classe stable) (voir [4]) ; si J est une $\mathcal{J}$-classe stable, J est une $\mathcal{D}$-classe (se démontre comme le début du théorème 6.45 de [2]). Cependant si D est une $\mathcal{D}$-classe non régulière et non élémentaire à gauche, l'ensemble des $\mathcal{L}$-classes contenues dans D peut admettre des éléments minimaux et maximaux, et si J est une $\mathcal{J}$-classe non stable à gauche, l'ensemble des $\mathcal{L}$-classes contenues dans J peut admettre des éléments maximaux. Nous allons voir que ce n'est pas le cas dans un demi-groupe dual et que d'autre part, il existe des conditions simples portant sur un élément a, permettant de savoir si D est élémentaire d'un côté et si J_a est stable d'un côté.

Dans un demi-groupe dual S, on voit facilement que toutes les $\mathcal{D}$-classes régulières sont élémentaires, donc sont des $\mathcal{J}$-classes stables ; S contient également des $\mathcal{J}$-classes stables sans élément régulier ; on voit en effet sans difficulté que si N est un idéal 0-minimal de S, $N \setminus \{0\}$ est une $\mathcal{J}$-classe stable (pour prouver la stabilité, utiliser le lemme 6.4 de [5] et le fait que tout idéal contient un idéal 0-minimal à gauche et un idéal 0-minimal à droite). D'autre part, si une $\mathcal{J}$-classe J_a (a dans S) vérifie $(J_a)^2 \cap J_a \neq \emptyset$, le facteur principal associé $J(a)/I(a)$ est 0-simple ; dans ce cas où J_a n'est stable d'aucun côté, ou J_a est une $\mathcal{D}$-classe régulière, donc est une $\mathcal{J}$-classe stable (voir [3] corollaire 2.1).

Compte tenu de ce qui précède si une $\mathcal{D}$-classe D_a est non élémentaire à gauche, a appartient à $S^\times \setminus N$, N étant la réunion des idéaux 0-minimaux de S.

THÉORÈME 2.3. - Soient S un demi-groupe dual, $S^\times$ l'intersection des idéaux maximaux de S, a un élément non nul de S, e et f les idempotents tels que $a = fa = ae$, D la $\mathcal{D}$-classe de a. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

(A) D est élémentaire à gauche [resp. à droite],

(B) a n'appartient pas à $S^\times a(S \setminus S^\times)$ [resp. à $(S \setminus S^\times)aS^\times$],

(C) a n'appartient pas à $(S \setminus H_f)aH_e$ [resp. $H_f\, a(S \setminus H_e)$].

(A) $\Rightarrow$ (B) : D étant élémentaire à gauche, supposons qu'il existe un élément x de $S^\times$ et un élément y de $S \setminus S^\times$ tels que $a = xay$; on voit facilement que y appartient à eS ([5] théorèmes 3.10 et 3.11), donc à $eS \cap (S \setminus S^\times) = R_e$; alors ay appartient à R_a ([3] théorème 4b) et $L_a \leq L_{ay}$; l'égalité $L_a = L_{ay}$ serait en contradiction avec x élément de $S^\times$ ([3] théorème 3c), donc D contient deux $\mathcal{L}$-classes distinctes et comparables contrairement à l'hypothèse.

(B) $\Rightarrow$ (C) : Supposons qu'il existe x dans S et y dans H_e tels que $a = xay$; x appartient à $S \setminus S^{\times}$ d'après (B) ; alors

($f(ay) = ay$ et $x(ay) \neq 0$) entraîne (x élément de L_f) ([3] théorème 4c) ;

si x appartenait à $L_f \setminus H_f$, $a = xay$ serait un élément de $D \setminus D \cap fSe$ ([3] théorème 4e), ce qui est absurde.

(C) $\Rightarrow$ (A) : Supposons D non élémentaire à gauche ; il existe un élément β de H_e tel que $L_a < L_{a\beta}$; donc il existe x dans S tel que $a = xa\beta$; a n'appartient pas à $L_{a\beta}$, x est un élément de $S^{\times}$ ([3] théorème 4c).

COROLLAIRE 2.4. - <u>Sous les mêmes hypothèses qu'au théorème précédent, les propriétés suivantes sont équivalentes</u> :

(A) D <u>est élémentaire</u>,

(B) $\{(x , y) ; x \in S , y \in S , a = xay\} \subseteq (S^{\times} \times S^{\times}) \cup (H_f \times H_e)$.

Ce corollaire se déduit du théorème précédent en remarquant que l'égalité $a = xay$ avec y dans $S \setminus S^{\times}$ et x dans S implique y dans H_e ; en effet, $xa(S \setminus [S^{\times} \cup R_e]) = 0$ ([3] théorème 4b) et, si, y appartenait à $R_e \setminus H_e$, xay serait un élément de $D \setminus D \cap Se$ ([3] théorème 4e), ce qui est absurde.

Dans un demi-groupe quelconque, l'ensemble des $\mathcal{L}$-classes, contenues dans une $\mathcal{D}$-classe non élémentaire à gauche, peut contenir des éléments minimaux ou maximaux. Ce n'est pas le cas dans un demi-groupe dual.

THÉORÈME 2.5. - <u>Soient</u> S <u>un demi-groupe dual</u>, <u>et</u> D <u>une</u> $\mathcal{D}$<u>-classe non élémentaire à gauche</u>. <u>Alors l'ensemble des</u> $\mathcal{L}$<u>-classes de</u> S <u>contenues dans</u> D <u>ne possède ni élément minimal</u>, <u>ni élément maximal</u> ; <u>plus précisément</u>, <u>soient</u> a <u>un élément quelconque de</u> D , <u>et</u> f <u>l'idempotent de</u> S <u>tel que</u> $af = a$; <u>il existe un élément</u> β <u>de</u> H_f <u>tel que</u> $L_a > L_{a\beta} > L_{a\beta^2} > \ldots > L_{a\beta^n} > \ldots$ <u>soit une chaîne infinie strictement décroissante de</u> $\mathcal{L}$<u>-classes de</u> D , <u>et tel que</u>

$$L_a < L_{a\beta^{-1}} < L_{a\beta^{-2}} < \ldots < L_{a\beta^{-n}} < \ldots$$

<u>soit une chaîne infinie strictement croissante de</u> $\mathcal{L}$<u>-classes de</u> D (β^{-1} <u>étant l'inverse de</u> β <u>dans le groupe</u> H_f).

Supposons D non élémentaire à gauche ; alors $0 \notin D$, et il existe deux éléments a et b dans D tels que $L_b < L_a$ et $a \mathcal{R} b$; soient f et g les idempotents de S tels que $af = a$, $bg = b$; supposons $g \neq f$; alors $Sb \subseteq Sg$, $Sa \subseteq Sf$ et $Sf \cap Sg = \{0\}$ entraînent $Sa \cap Sb = \{0\}$; a et b étant non nuls, L_a et L_b ne sont pas comparables contrairement à l'hypothèse. Donc $g = f$ et b appartient à $R_a \cap Sf$; alors il existe un élément β dans H_f tel que $b = a\beta$ ([3] théorème 4e).

Comme $L_b < L_a$, il existe un élément x de $S^{\times}$ tel que $b = xa$ ([3] théorème 4c) ; mais $b = a\beta = xa$ implique $b\beta = xa\beta = xb$; alors $b\beta$ appartient à Sb , donc $L_{b\beta} \leqslant L_b$; mais $L_{b\beta} = L_b$ impliquerait x dans $S \setminus S^{\times}$ ([3] théorème 3c), d'où $L_{b\beta} < L_b$, c'est-à-dire $L_{a\beta^2} < L_{a\beta} < L_a$; on montre de même que $L_{a\beta^n} < L_{a\beta^{n-1}}$ (n entier positif), donc $(L_{a\beta^n})_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ est une chaîne infinie strictement décroissante de $\mathcal{L}$-classes de D inférieures à L_a ($a\beta^n$ appartient à D, d'après le théorème 4b de [3]). Soit β^{-1} l'inverse de β dans le groupe H_f ; $a\beta = xa$ implique $a = xa\beta^{-1}$, d'où $L_a \leqslant L_{a\beta^{-1}}$; $L_a = L_{a\beta^{-1}}$ étant en contradiction avec n élément de $S^{\times}$ ([3] théorème 3c), $L_a < L_{a\beta^{-1}}$; un argument analogue à ce qui précède montrerait que $(L_{a\beta^{-n}})_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ est une chaîne infinie strictement croissante de $\mathcal{L}$-classes de D supérieures à L_a.

La construction de ces deux chaînes de $\mathcal{L}$-classes a été faite en supposant seulement qu'il existait une $\mathcal{L}$-classe de D strictement inférieure à L_a ; il suffit donc, pour achever la démonstration du théorème, de montrer que D ne contient pas de $\mathcal{L}$-classe minimale (parmi les $\mathcal{L}$-classes de S contenues dans D). Soit L_c une $\mathcal{L}$-classe de D différente de L_a ; nous pouvons prendre c dans R_a ; alors il existe un élément d de R_f tel que $c = ad$.($a\beta = xa$) entraîne ($a\beta d = xad = xc$) ; d'où $L_{a\beta d} \leqslant L_c$; $L_{a\beta d} < L_c$ suit, comme ci-dessus, de x élément de $S^{\times}$, donc D ne contient pas de $\mathcal{L}$-classe minimale.

COROLLAIRE 2.6. - <u>Soient</u> S <u>un demi-groupe dual,</u> e <u>un idempotent non nul de</u> S <u>tel que le groupe maximal contenant</u> e , H_e , <u>soit un groupe périodique</u> ; <u>on note</u> $E^{\times}$ <u>l'ensemble des idempotents de la</u> $\mathcal{D}$-<u>classe de</u> e ; <u>alors toutes les</u> $\mathcal{D}$-<u>classes, contenues dans</u> $SE^{\times}$ [<u>resp.</u> $E^{\times} S$, $E^{\times} SE^{\times}$] , <u>sont élémentaires à gauche</u> (<u>resp. élémentaires à droite, élémentaires</u>).

On sait que les sous-groupes maximaux d'un demi-groupe T, contenus dans une même $\mathcal{D}$-classe, sont des groupes isomorphes (voir par exemple les théorèmes 2.22 et 2.25 de [1]). Donc si f est un élément de $E^{\times}$, H_f est un groupe périodique. Il suit du corollaire 4.2 de [3] que $SE^{\times}$ est réunion de $\mathcal{D}$-classes ; soit D l'une d'entre elles, il existe un élément a de D tel que $a = ae$ ([3] théorème 4a) ; supposons D non élémentaire à gauche, H_e contient un élément β tel que $(L_{a\beta^n})_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ soit une chaîne infinie strictement croissante de $\mathcal{L}$-classes de D ; mais H_e étant périodique, il existe un entier positif m tel que $\beta^m = e$, d'où $a\beta^m = ae = a$, en contradiction avec $L_{a\beta^m} > L_a$.

COROLLAIRE 2.7. - <u>Soit</u> S <u>un demi-groupe dual dont tous les sous-groupes maximaux sont des groupes périodiques</u> ; <u>alors</u> S <u>est élémentaire</u>.

Nous allons faire une étude analogue pour les $\mathcal{J}$-classes d'un demi-groupe dual.

THÉORÈME 2.8. - <u>Soient</u> S <u>un demi-groupe dual,</u> $S^{\times}$ <u>l'intersection des idéaux maximaux de</u> S , a <u>un élément non nul de</u> S , e <u>et</u> f <u>les idempotents tels que</u> $a = ae = fa$, <u>et</u> J <u>la</u> $\mathcal{J}$-<u>classe de</u> a . <u>Alors les propriétés suivantes sont équivalentes</u> :

(A) J <u>est stable à gauche</u> [<u>resp.</u> <u>à droite</u>] ,

(B) a <u>n'appartient pas à</u> $S^\times aS$ [<u>resp.</u> $SaS^\times$] ,

(C) a <u>n'appartient pas à</u> $(S \setminus H_f)aS$ [<u>resp.</u> <u>à</u> $Sa(S \setminus H_e)$] .

(B) $\Rightarrow$ (C) : Il suit du théorème 4c de [3] que $(S \setminus [S^\times \cup L_f])a = 0$; comme les éléments x de $(L_f \setminus H_f)a$ vérifient $fa = 0$, a ne peut pas appartenir à $(L_f \setminus H_f)aS$, donc à $[S \setminus (S^\times \cup H_f)]aS$.

(B) $\Rightarrow$ (A) : Supposons J non stable à gauche, L_a ne peut être minimale dans l'ensemble des $\mathcal{L}$-classes contenues dans J (définition 2.1), donc il existe un élément b de J tel que $L_b < L_a$; b appartenant à $S_a \setminus L_a$, il existe z dans $S^\times$ tel que $b = za$ ([3] théorème 4c) ; comme $a\mathcal{J}b$, il y a deux éléments x et y dans S tels que $a = xby$, d'où $a = xzay$, et a appartient à $S^\times aS$.

(A) $\Rightarrow$ (B) : J étant stable à gauche, supposons qu'il existe x et y dans S tels que $a = xay$; on voit facilement que ay appartient à J et que $L_a \leq L_{ay}$; compte tenu de l'hypothèse faite sur J , $L_a = L_{ay}$, donc x appartient à $S \setminus S^\times$ ([3] théorème 3c).

COROLLAIRE 2.9. - <u>Sous les mêmes hypothèses qu'au théorème précédent, les propriétés suivantes sont équivalentes</u> :

(A) J <u>est stable</u>,

(B) $\{(x , y) ; x \in S , y \in S , a = xay\} \subseteq (S \setminus S^\times) \times (S \setminus S^\times)$,

(C) $\{(x , y) ; x \in S , y \in S , a = xay\} \subseteq H_f \times H_e$.

COROLLAIRE 2.10. - <u>Sous les mêmes hypothèses qu'au théorème précédent,</u> J <u>n'est stable d'aucun côté si, et seulement si,</u> a <u>appartient à</u> $S^\times aS^\times$.

Si J n'est stable d'aucun côté, il existe x et y dans $S^\times$, α et β dans S tels que $a = xa\alpha = \beta ay$ (théorème 2.8). D'où $a = x\beta ay\alpha$, et il est clair que $x\beta$ et $y\alpha$ appartiennent à $S^\times$. La réciproque suit immédiatement du théorème 2.8.

Un demi-groupe dual S non 0-simple contient toujours des éléments nilpotents autres que 0 , car tout élément d'un idéal 0-minimal de S contenu dans $S^\times$ est nilpotent (voir [3], démonstration du corollaire 1.1) ; d'autre part, on voit facilement que tout élément nilpotent est contenu dans $S^\times$.

COROLLAIRE 2.11. - <u>Soient</u> S <u>un demi-groupe dual, et</u> $S^\times$ <u>l'intersection des idéaux maximaux de</u> S . <u>Si</u> $S^\times$ <u>est l'ensemble des éléments nilpotents de</u> S , S <u>est stable</u>.

Soit a un élément non nul de S . Supposons par exemple qu'il existe x dans $S^\times$ et y dans S tels que $a = xay$, alors $a = x^n ay^n$ pour tout entier n . Soit m l'entier tel que $x^m = 0$, alors $a = x^m ay^m = 0$, donc a n'appartient pas à $S^\times aS$, et J_a est stable à gauche. On montrerait de même la stabilité à droite.

COROLLAIRE 2.12. - *Soient S un demi-groupe dual, J une $\mathcal{J}$-classe stable à droite et non stable à gauche. Alors chaque $\mathcal{D}$-classe contenue dans J est élémentaire à droite et non élémentaire à gauche.*

Soit a un élément de J, a appartient à $S^{\times} aS$, donc il existe x dans $S^{\times}$ et y dans S tels que $a = xay$; mais y appartient à $S \setminus S^{\times}$, sinon a serait un élément de $S^{\times} aS^{\times}$, et J ne serait pas stable à droite ; alors a appartient à $S^{\times} a(S \setminus S^{\times})$ et la $\mathcal{D}$-classe a ne peut être élémentaire à gauche.

D'où le corollaire suivant.

COROLLAIRE 2.13. - *Soient S un demi-groupe dual, D une $\mathcal{D}$-classe élémentaire de S, J la $\mathcal{J}$-classe contenant D. Alors, ou bien J est stable, ou bien J n'est stable d'aucun côté ; en particulier, un demi-groupe dual élémentaire est stable si, et seulement si, il est stable d'un côté.*

Remarque. - On peut démontrer, en s'appuyant sur le théorème 4 de [3], qu'un demi-groupe dual, dont les sous-groupes maximaux sont triviaux, est élémentaire.

Dans un demi-groupe quelconque, l'ensemble des $\mathcal{L}$-classes contenues dans une $\mathcal{J}$-classe non stable à gauche ne contient pas d'élément minimal (voir définition 2.1), mais peut posséder des éléments maximaux (demi-groupe bicycle par exemple). Ce n'est pas le cas dans un demi-groupe dual.

COROLLAIRE 2.14. - *Soient S un demi-groupe dual, J une $\mathcal{J}$-classe non stable à gauche. Alors J ne contient pas de $\mathcal{L}$-classe maximale parmi les $\mathcal{L}$-classes de S contenues dans J.*

Soit a un élément de J, a appartient à $S^{\times} aS$, donc il existe x dans $S^{\times}$ et y dans S tels que $a = xay$, d'où $L_a \leq L_{ay}$. x étant dans $S^{\times}$, $L_a < L_{ay}$ ([3] théorème 3c) ; il est clair que ay appartient à J, donc L_a n'est pas un élément maximal de l'ensemble des $\mathcal{L}$-classes de S contenues dans J.

Nous avons vu au paragraphe précédent que la structure des demi-groupes duaux ayant un seul idéal maximal était entièrement déterminée par la structure des demi-groupes duaux avec élément neutre. Soit S un demi-groupe dual avec élément neutre, $S^{\times}$ son idéal maximal ; $S/S^{\times}$ est isomorphe à $H_e \cup \{0\}$, donc S apparaît comme l'extension de $S^{\times}$ par un groupe avec zéro. La question se pose donc de savoir à quelles conditions un demi-groupe avec zéro et non réduit à $\{0\}$, T, est l'idéal maximal d'un demi-groupe dual avec élément neutre ; un tel demi-groupe ne possède pas d'idempotents non nuls ; de plus, l'ensemble des éléments a de T, tels que $aT = 0$, coïncide avec l'ensemble des éléments b de T tels que $Tb = 0$, et n'est pas réduit à $\{0\}$ (C'est l'unique idéal 0-minimal du demi-groupe dual avec élément neutre construit à partir de T). Le théorème ci-dessous précise la structure des classes de Green de T.

THÉORÈME 2.15. - Soient S un demi-groupe dual, $S^{\times}$ l'intersection des idéaux maximaux de S, a un élément non nul de $S^{\times}$; on note $D_a^{\times}$ et $J_a^{\times}$ la $\mathcal{D}$-classe de a et la $\mathcal{J}$-classe de a dans $S^{\times}$. Alors :

(a) $D_a^{\times} = \{a\}$,

(b) Si la $\mathcal{J}$-classe de a dans S est stable d'un côté, $J_a^{\times} = \{a\}$,

(c) Si la $\mathcal{J}$-classe de a dans S n'est stable d'aucun côté, $J_a^{\times} = J_a$, et $J_a^{\times}$ est une $\mathcal{J}$-classe de $S^{\times}$ non stable d'un côté, donc contenant une infinité d'éléments.

(a) Si la $\mathcal{L}$-classe de a dans $S^{\times}$ n'était pas réduite à $\{a\}$, il existerait trois éléments b, x, y de $S^{\times}$ tels que $a = xb$ et $b = ya$, d'où l'égalité $a = xya$ avec xy élément de $S^{\times}$, ce qui est en contradiction avec le théorème 3a de [3]. On voit de même que la $\mathcal{R}$-classe de a dans $S^{\times}$ est réduite à $\{a\}$, d'où $D_a^{\times} = \{a\}$.

(b) Supposons J_a stable d'un côté ; si $J_a^{\times}$ contient un élément b distinct de a, a appartient à $S^{\times} bS^{\times} \cup S^{\times} b \cup bS^{\times}$, donc l'une des égalités suivantes est vérifiée :

1° $a = xby$ (x et y dans $S^{\times}$) ;

2° $a = xb$ (x dans $S^{\times}$) ;

3° $a = by$ (y dans $S^{\times}$) ;

De même, b appartient à $S^{\times} aS^{\times} \cup S^{\times} a \cup aS^{\times}$, et nous avons soit

4° $b = zat$ (z et t dans $S^{\times}$), soit

5° $b = za$ (z dans $S^{\times}$), soit

6° $b = at$ (t dans $S^{\times}$).

2° et 5° [resp. 3° et 6°] ne peuvent avoir lieu simultanément, sinon a et b appartiendraient à la même $\mathcal{L}$-classe (resp. $\mathcal{R}$-classe) de $S^{\times}$; alors, en combinant les égalités vérifiées, on voit que a appartient à $S^{\times} aS^{\times}$, ce qui contredit l'hypothèse faite (corollaire 2.10).

(c) Si J n'est stable d'aucun côté, a appartient à $S^{\times} aS^{\times}$; $S^{\times} aS^{\times}$ étant un idéal de S contenant a, $S^{\times} aS^{\times} = SaS \supseteq J_a$; $J_a^{\times} = J_a$ suit immédiatement. J_a n'étant pas stable à gauche, il existe b dans J_a tel que $a = xb$ avec x dans $S^{\times}$; les $\mathcal{L}$-classes dans $S^{\times}$ étant triviales, la $\mathcal{L}$-classe de a dans $S^{\times}$ est strictement inférieure à la $\mathcal{L}$-classe de b dans $S^{\times}$, donc $J_a^{\times}$ n'est pas stable à gauche. On montre de même que $J_a^{\times}$ est non stable à droite.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CLIFFORD (A. H.) and PRESTON (G. B.). - The algebraic theory of semigroups, Vol. 1. - Providence, American mathematical Society, 1961 (Mathematical Surveys, 7).

[2] CLIFFORD (A. H.) and PRESTON (G. B.). - The algebraic theory of semigroups, Vol. 2. - Providence, American mathematical Society, 1967 (Mathematical Surveys, 7).

[3] GERENTE (A.). - Demi-groupes duaux, Séminaire Dubreil : Algèbre, 25e année, 1971/72, n° 12, 21 p.

[4] GERENTE (A.). - $\mathcal{D}$-classes régulières dans un demi-groupe, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 274, 1972, Série A, p. 1691-1694.

[5] SCHWARZ (S.). - On the structure of dual semigroups, Čzech. mat. J., t. 21, 1971, p. 461-483.

Alain GERENTE
Laboratoire de Mathématiques
Centre d'Enseignement supérieur
Boîte postale 847
97400 SAINT DENIS DE LA REUNION