Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres

GÉRARD VIENNOT

Bascules associatives

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 25, n° 1 (1971-1972), exp. n° 9, p. 1-7

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1971-1972__25_1_A9_0>

Séminaire DUBREIL
(Algèbre)
25e année, 1971/72, n° 9, 7 p.

6 mars 1972

BASCULES ASSOCIATIVES

par Gérard VIENNOT

Introduction.

Le but de ce travail est d'introduire la notion de bascule associative, qui intervient dans certaines situations rencontrées en théorie algébrique des demi-groupes, ou dans certains problèmes de factorisations des monoïdes libres [2].

Sous-jacente à la notion de bascule associative est celle de bascule (Voir définitions au § 1). Les bascules fournissent un support commode dans certains problèmes d'algèbres de Lie libres, en relation avec les monoïdes libres (voir [5]). On peut également mettre en évidence quelques propriétés non triviales de nature combinatoire de ces objets (Voir [6]).

Le principal théorème de cet exposé (théorème I) donne la forme générale des bascules associatives vérifiant certaines conditions de minimalité. Cette forme est le type (S) (voir définition 2.1). Lorsque la bascule associative ne "bascule pas", on a en fait une représentation d'un demi-groupe par des translations. Le type (S) apparaît alors comme une certaine généralisation de ce cas particulier.

Enfin, au § 4, nous énonçons le lien entre le théorème I et un problème posé par M. P. SCHÜTZENBERGER (voir [6]).

Les démonstrations complètes des propositions ci-dessous seront exposées dans un travail ultérieur.

1. Bascule associative : Définitions générales.

Définition 1.1. - Une bascule est un triplet $T = (A , B , \varphi)$ dans lequel A et B sont deux ensembles disjoints et φ une application de $B \times A$ dans $A \cup B$.

Pour $a \in A$, $b \in B$, nous noterons aussi $\varphi(b , a) = \langle b , a\rangle$.

Définition 1.2. - Soient $T = (A , B , \varphi)$ et $T' = (A' , B' , \varphi')$ deux bascules. Un morphisme $f : T \to T'$ est une application de $A \cup B$ dans $A' \cup B'$ telle que $f(A) \subseteq A'$, $f(B) \subseteq B'$ et

$$\forall a \in A , \forall b \in B , f(\langle b , a\rangle) = \langle f(b) , f(a)\rangle .$$

Nous noterons f_A et f_B les restrictions de f à A et B respectivement.

Définition 1.3. - Une bascule associative (ou b. a.) est une bascule $T = (A,B,\varphi)$ dans laquelle A et B sont des demi-groupes dont les lois sont "compatibles" avec la loi de bascule φ , c'est-à-dire :

$$\forall\, a\,,\, a' \in A \left[\text{si}\quad \langle b\,,\, a\rangle \in A \begin{cases} \langle b\,,\, a\rangle a' = \langle b\,,\, aa'\rangle \\ \langle b'\,,\, \langle b\,,\, a\rangle\rangle = \langle\, b'\, b\,,\, a\rangle \end{cases}\right.$$

$$\forall\, b\,,\, b' \in B \left[\text{si}\quad \langle b\,,\, a\rangle \in B \begin{cases} \langle\langle b\,,\, a\rangle\,,\, a'\rangle = \langle b\,,\, aa'\rangle \\ b'\langle b\,,\, a\rangle = \langle b'\, b\,,\, a\rangle \end{cases}\right.$$

Définition 1.4. - Soient $T = (A\,,\, B\,,\, \varphi)$ et $T' = (A'\,,\, B'\,,\, \varphi')$ deux b. a. Un morphisme de bascule associative est un morphisme de bascule $f : T \to T'$, tel que $f_A : A \to A'$ et $f_B : B \to B'$ soient des morphismes de demi-groupe.

Nous pouvons alors parler de la catégorie des bascules (resp. b. a.). On définirait aisément les notions de sous-bascules, bascule image, image réciproque, congruence de bascule, bascule quotient, et les notions similaires pour les bascules associatives.

Exemple 1 : "Produit de translation" de deux demi-groupes. - Soient A et B deux demi-groupes, et μ une représentation de B dans le monoïde des translations à gauche de A. Soit T la bascule $T = (A\,,\, B\,,\, \varphi)$ avec φ définie par

$$\varphi(b\,,\, a) = \mu(b)(a)\ .$$

Alors T est une b. a. Réciproquement, toute b. a., telle que $\langle B\,,\, A\rangle \subseteq A$, correspond à une représentation d'un demi-groupe dans le monoïde des translations d'un autre.

Soit D l'ensemble $A \times B$ muni de la loi de composition

$$\forall\, a\,,\, a' \in A\,,\quad \forall\, b\,,\, b' \in B\,,\quad (a\,,\, b).(a'\,,\, b') = (a\mu(b)(a')\,,\, b')\ .$$

D est le produit de translation (gauche) de A par B, et est en fait un demi-groupe (voir [3] et [4]). On pourrait aussi définir le produit de translation de deux monoïdes.

Exemple 2 : b. a. libre engendrée par une bascule. - Pour X ensemble, nous notons X^+ le demi-groupe libre engendré par X. Soit T une bascule, $T=(A,B,\varphi)$. Nous définissons la bascule $T^+ = (A^+\,,\, B^+\,,\, \varphi^+)$ avec φ^+ défini par récurrence sur la longueur des mots :

pour $a \in A$, $b \in B$, $\quad \varphi^+(b\,,\, a) = \varphi(b\,,\, a)$;

pour $\alpha \in A^+$, $\beta \in B^+$, en écrivant $\alpha = a\alpha'$, $\beta = \beta'\, b$, $a \in A$, $b \in B$,

$$\varphi^+(\beta\,,\, \alpha) = \begin{cases} \varphi^+(\beta'\langle b\,,\, a\rangle\,,\, \alpha') & \text{si}\ \langle b\,,\, a\rangle \in B\ \text{et}\ \alpha' \neq e\,, \\ \beta'\langle b\,,\, a\rangle & \text{si}\ \langle b\,,\, a\rangle \in B\ \text{et}\ \alpha' = e\,, \\ \varphi^+(\beta'\,,\, \langle b\,,\, a\rangle\alpha') & \text{si}\ \langle b\,,\, a\rangle \in A\ \text{et}\ \beta' \neq e\,, \\ \langle b\,,\, a\rangle\alpha' & \text{si}\ \langle b\,,\, a\rangle \in A\ \text{et}\ \beta' = e\,. \end{cases}$$

T^+ est en fait une b. a. et, en notant i l'injection canonique $i : T \to T^+$,

$(i\ ,\ T)$ est solution du problème universel d'applications :

Pour tout morphisme f (de bascule) $f : T \dashrightarrow S$, S étant une b. a., il existe un, et un seul, morphisme f^+ de b. a. rendant le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & S \\ T^+ \arrow[ur, "f^+"'] & \end{tikzcd}$$

Exemple 3 : Soient D un demi-groupe, et U et V des sous-demi-groupes disjoints tels que $VU \subseteq U \cup V$. Soit $T = (U\ ,\ V\ ,\ \varphi)$ la bascule définie par la restriction du produit de D à $V \times U$. Alors T est une b. a.

A toute bascule associative, on peut associer un demi-groupe $D(T)$ par :

$D(T)$ est l'ensemble $A \times B$, pour $T = (A\ ,\ B\ ,\ \varphi)$, muni de la loi :

$$\forall\ a\ ,\ a' \in A\ ,\ \forall\ b\ ,\ b' \in B\ ,\ \begin{cases} (a\ ,\ b).(a'\ ,\ b') = (a\langle b\ ,\ a'\rangle\ ,\ b') & \text{si } \langle b\ ,\ a'\rangle \in A\ , \\ (a\ ,\ b).(a'\ ,\ b') = (a\ ,\ \langle b\ ,\ a'\rangle b') & \text{si } \langle b\ ,\ a'\rangle \in B\ . \end{cases}$$

On vérifie que $D(T)$ est un demi-groupe.

2. Bascule de type (S) .

Définition 2.1. - Une bascule (resp. b. a.) $T = (A\ ,\ B\ ,\ \varphi)$ est dite de type (S) si, et seulement si, il existe deux suites finies de parties (resp. d'idéaux bilatères) $A_1\ ,\ A_2\ ,\dots,\ A_{n+1}$ et $B_0\ ,\ B_1\ ,\dots,\ B_n$ de A et B respectivement, telles que

$$(S)\ \begin{cases} A_1 \subseteq A_2 \dots \subseteq A_{n+1} = A\ ;\ \emptyset = B_0 \subseteq B_1 \subseteq B_2 \dots \subseteq B_n = B \\ \forall\ i\ ,\ 1 \leqslant i \leqslant n\ ,\ \langle B\ ,\ A_i\rangle \subseteq A_i \cup B_{i-1} ; \langle B_i\ ,\ A\rangle \subseteq A_i \cup B_i\ . \end{cases}$$

Ces conditions sont en fait symétriques. Si on supposait les suites strictement croissantes, il y aurait évidemment quatre cas possibles.

PROPOSITION 2.1. - *Une b. a. est de type* (S) *si, et seulement si, elle est de type* (S) *en tant que bascule*.

La preuve repose sur les lemmes suivants :

Soient $T = (A\ ,\ B\ ,\ \varphi)$ une b. a. et $A_1\ ,\dots,\ A_{n+1}\ ,\ B_0\ ,\ B_1\ ,\dots,\ B_n$ deux suites de parties de A et B respectivement, vérifiant les conditions (S) . Définissons par récurrence les suites suivantes ;

$$B'_0 = \emptyset \qquad\qquad A'_1 = \{a \in A\ ,\ \langle B\ ,\ a\rangle \subseteq A\}$$

$$B'_p = \{b \in B\ ,\ \langle b\ ,\ A\rangle \cap A \subseteq A'_p\} \qquad\qquad A'_{p+1} = \{a \in A\ ,\ \langle B\ ,\ a\rangle \cap B \subseteq B'_p\}$$

LEMME 1. - $\forall\ p \geqslant 1\ ,\ B_p \subseteq B'_p\ ,\ A_p \subseteq A'_p$.

LEMME 2. - A'_1 *est un idéal de* A *tel que* $\langle B , A'_1 \rangle \subseteq A'_1$.

Soit $p > 1$, et supposons que $\forall\, q$, $1 \leqslant q \leqslant p$, on ait : B'_q idéal bilatère de B , A'_q idéal bilatère de A , avec

$$\langle B'_{q-1} , A \rangle \subseteq A'_{q-1} \cup B''_{q-1} \quad \text{et} \quad \langle B , A'_q \rangle \subseteq A'_q \cup B'_{q-1} .$$

On a alors les lemmes suivants :

LEMME 3. - B'_p *est un idéal de* B .

LEMME 4. - $\langle B'_p , A \rangle \subseteq A'_p \cup B'_p$.

LEMME 5. - A'_{p+1} *est un idéal de* A .

LEMME 6. - $\langle B , A'_{p+1} \rangle \subseteq A'_{p+1} \cup B'_p$.

LEMME 7. - $\forall\, i$, $1 \leqslant i$, $B'_{i-1} \subseteq B$ *et* $A'_i \subseteq A'_{i+1}$.

La proposition suivante est une conséquence de la proposition 2.1 :

PROPOSITION 2.2. - *Soit* T *une bascule.* T *est de type* (S) *si, et seulement si, la b. a.* T^+ *est de type* (S) .

Enfin la proposition suivante est évidente :

PROPOSITION 2.3. - *Pour une bascule (resp. b. a.), la propriété "être de type (S) " est stable par morphisme direct et réciproque.*

3. *Un théorème de structure.*

THÉORÈME I. - *Soit* $T = (A , B , \varphi)$ *une b. a. telle que :*

B *vérifie la condition de chaîne ascendante pour les idéaux,*

B *vérifie la condition de chaîne descendante pour les idéaux principaux à gauche.*

Alors la b. a. est de type (S) .

Donnons un résumé de la preuve :

Notations. - Soit D un demi-groupe. Nous notons par $x|y$ la relation de divisibilité à droite : $y \in D^1 x$. Cette relation est une relation de préordre, dont l'équivalence associée est la relation de Green à gauche $\mathcal{L}$ de demi-groupe D (voir [1]).

Soit $T = (A , B , \varphi)$ une b. a. Pour $b \in B$, nous définissons :

$$A(b) = \{a \in A , \ \langle b , a \rangle \in A\} .$$

Notons ρ la relation sur B associée

$$b'(\rho)\, b'' \Longleftrightarrow A(b') = A(b'') ,$$

ρ est une équivalence compatible à droite avec la loi de B .

LEMME 1. - La relation $\mathcal{L}$ est plus fine que ρ .

Définissons par récurrence :

$$B_0 = \emptyset \ , \quad B_{p+1} = \{b \in B \ , \ \forall\, u \in B \ , \text{ on a : } ub(\rho)\, b \text{ ou } ub \in B_p\} \ .$$

Nous avons alors les lemmes suivants (pour une bascule vérifiant les conditions du théorème I.

LEMME 2. - $\{B_p\}_{p\geq 1}$ est une suite croissante d'idéaux non vides de B .

LEMME 3. - $\exists\, n \in N$ tel que $B_n = B$.

Définissons maintenant $A_p = \langle B_p \ , A\rangle \cap A$.

LEMME 4. - $\forall\, p \geq 1 \ , \ (\langle B_p \ , A\rangle \subseteq A_p \cup B_p) \Rightarrow (\langle B_{p+1} \ , A\rangle \subseteq A_{p+1} \cup B_{p+1})$.

LEMME 5. - $(\langle B_p \ , A\rangle \subseteq A_p \cup B_p) \Rightarrow (\langle B \ , A_{p+1}\rangle \subseteq A_{p+1} \cup B_p)$.

La proposition 2.1 permet alors de conclure.

Remarquons que l'on aurait le théorème dual en prenant les conditions de minimalité sur A .

Une bascule (resp. b. a.) $T = (A \ , B \ , \varphi)$ est dite finie lorsque A et B le sont. On a alors le corollaire suivant.

COROLLAIRE 1. - Toute b. a. finie est de type (S) .

On verra au § 4 un exemple de bascule associative finie.

COROLLAIRE 2. - Soient D un demi-groupe, U et V des sous-demi-groupes simples et disjoints tels que $\langle VU\rangle \subseteq U \cup V$. Alors si V vérifie les conditions de chaînes du théorème I, on a

$$VU \subseteq U \quad \text{ou} \quad VU \subseteq V \ .$$

4. Applications à un problème de factorisation des monoïdes libres.

Un problème posé par M. P. SCHÜTZENBERGER sur les factorisations des monoïdes libres construites en [2] se ramène à trouver la forme générale des bascules de type (R) , c'est-à-dire les bascules T telles que la bascule T^+ admette une image finie (en tant que bascule). Ce problème est résolu en [6]. En fait, nous avons la proposition suivante.

PROPOSITION 4.1. - Une b. a. a une image finie en tant que b. a. si, et seulement si, elle a une image finie en tant que bascule.

Cette proposition, la proposition 2.3 et le corollaire 1 du théorème I permettent alors de donner la condition nécessaire de [6].

PROPOSITION 4.2. - Toute bascule de type (R) est de type (S) .

On peut en fait démontrer que toute bascule admet une image minimum, et que l'image minimum $\overline{T^+}$ de T^+ est en fait une b. a. (en prenant comme loi pour les demi-groupes le quotient des lois des demi-groupes A^+ et B^+ par les restrictions correspondantes de la congruence définissant $\overline{T^+}$). Lorsque T est finie de type (S) , $\overline{T^+}$ est alors une b. a. finie (voir [6]), et on peut effectivement calculer sa "table".

Exemple. - Soit T la bascule définie par la table :

T	a_1	a_2	a_3
b_1	a_1	b_1	a_1
b_2	a_1	a_3	a_2

$\overline{T^+} = (U\ ,\ V\ ,\ \psi)$ avec les tables respectives de la bascule T et des demi-groupes U et V , définies par :

$\overline{T^+}$	a_1	a_2	a_3
b_1	a_1	b_1	a_1
$b_1\ b_2$	a_1	a_1	b_1
b_2	a_1	a_3	a_2
$b_2\ b_2$	a_1	a_2	a_3

U	a_1	a_2	a_3
a_1	a_1	a_1	a_1
a_2	a_1	a_2	a_1
a_3	a_1	a_3	a_1

V	b_1	$b_1\ b_2$	b_2	$b_2\ b_2$
b_1	b_1	$b_1\ b_2$	$b_1\ b_2$	b_1
$b_1\ b_2$	b_1	$b_1\ b_2$	b_1	$b_1\ b_2$
b_2	b_1	$b_1\ b_2$	$b_2\ b_2$	b_2
$b_2\ b_2$	b_1	$b_1\ b_2$	b_2	$b_2\ b_2$

BIBLIOGRAPHIE

[1] CLIFFORD (A. H.) and PRESTON (G. B.). - The algebraic theory of semigroups. Vol. 2. - Providence, American mathematical Society, 1967 (Mathematical Surveys, 7).

[2] SCHÜTZENBERGER (M. P.). - On a factorisation of free monoïds, Proc. Amer. math. Soc., t. 16, 1965, p. 21-24.

[3] VIENNOT (G.). - Factorisations des monoïdes, Thèse 3e cycle, Math., Univ. Paris-7, 1971.

[4] VIENNOT (G.). - Factorisations de certains monoïdes, Journées sur la théorie algébrique des demi-groupes [1971. Lyon].

[5] VIENNOT (G.). - Factorisations des monoïdes libres, bascules et algèbres de Lie libres, Séminaire Dubreil : Algèbre, 25e année, 1971/72, Fasc. 2 : Journées sur les anneaux et les demi-groupes [1972. Paris], n° J5.

[6] VIENNOT (G.). - Automate et bascule, "Automata, languages and programming" [1972. Rocquencourt], p. 123-133. - Amsterdam, North-Holland publishing Company ; New York, American Elsevier publishing Company, 1973.

Gérard VIENNOT
10 allée Bernadotte
92330 SCEAUX