Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Marcel P. Schützenberger

Sur une construction de Gilbert de B. Robinson

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 25, nº 1 (1971-1972), exp. nº 8, p. 1-4

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1971-1972__25_1_A8_0>

Séminaire DUBREIL
(Algèbre)
25e année, 1971/72, n° 8, 4 p.

28 février 1972

SUR UNE CONSTRUCTION DE Gilbert de B. ROBINSON [1]

par Marcel P. SCHÜTZENBERGER

1. Introduction.

La théorie de la représentation linéaire des groupes classiques utilise toute une série de constructions portant sur les tableaux standards de Young. La plus notable est peut-être celle de Gilbert de B. ROBINSON qui livre une bijection entre les permutations et les paires de tableaux standards de même forme, puisqu'elle donne une manière commode d'exprimer les "rising and lowering operators" de Young. Je me propose ici d'indiquer les grandes lignes de la preuve d'un résultat assez simple dont on peut déduire la plupart des autres propriétés sans devoir recourir de nouveau à des raisonnements combinatoires.

Dans ce qui suit, la forme d'un tableau (gauche) de Young est un intervalle fini A du plan entier $\underset{\sim}{Z} \times \underset{\sim}{Z}$ ordonné de façon naturelle $((x , y) \leq (x' , y')$ si et seulement si $x \leq x'$ et $y \leq y')$, et un tableau est un morphisme bijectif φ (d'ensemble ordonné) d'un tel intervalle sur un intervalle de $\underset{\sim}{Z}$, ou plus exactement une classe d'équivalence de semblables morphismes par rapport aux translations de leur domaine. Un tableau est dit rectangulaire, si et seulement si sa forme est le produit direct $[p] \times [q]$ de deux chaînes $[p]$ $(= \{1 < 2 < \ldots < p\})$ et $[q]$. Il est principal si et seulement si l'intervalle de $\underset{\sim}{Z} \times \underset{\sim}{Z}$, qui est sa forme, a un élément minimum unique.

Par exemple,

$$\begin{array}{cccc} 8 & 11 & 13 & 14 \\ 6 & 9 & 10 & 12 \\ 3 & 4 & 5 & 7 \end{array}$$

est un tableau rectangulaire,

$$\begin{array}{cccc} 8 & 11 & & \\ 6 & 9 & 10 & \\ 3 & 4 & 5 & 7 \end{array}$$

est un tableau principal,

$$\begin{array}{cccc} 8 & 11 & & \\ 6 & 9 & 10 & \\ & & 5 & 7 \end{array}$$

est un tableau.

Dans tous les cas, la condition que φ soit un morphisme bijectif exprime simplement que les valeurs inscrites dans le tableau croissent (strictement) le long des lignes et des colonnes.

2. Rappel de quelques propriétés des tableaux.

Si $I = \{z , z + 1 , \dots , z + r - 1\}$ est un intervalle de $\underset{\sim}{Z}$, nous noterons $I + 1$, l'intervalle $\{z + 1 , \dots , z + r\}$ obtenu en translatant l'image I d'une unité.

L'énoncé connu suivant sert à définir une bijection $\varphi \longmapsto \varphi\partial$ (appelée promotion) sur l'ensemble des tableaux ayant pour forme un intervalle donné A de $\underset{\sim}{Z} \times \underset{\sim}{Z}$.

2.1. Soit $\varphi : A \to I$ un tableau. Il existe un, et un seul tableau,

$$\varphi' = \varphi\partial : A \to I + 1$$

tel que l'on ait $z\varphi'^{-1} \leqslant z\varphi^{-1}$ pour chaque $z \in I \cap (I + 1)$.

De façon algorithmique, $\varphi\partial$ est obtenu à partir de φ en retirant la plus petite valeur, $\min (I)$, du tableau φ ; en "déplaçant" chacune des autres valeurs en bas ou à gauche comme dans le jeu du taquin, et en ajoutant enfin la valeur $1 + \max (I)$ à la dernière place restée libre. Ceci est illustré par l'exemple ci-dessous où sont utilisées plusieurs applications de l'opérateur de promotion ∂ .

$$\varphi = \begin{matrix} 8 & 11 & 13 & 14 \\ 6 & 9 & 10 & 12 \\ 3 & 4 & 5 & 7 \end{matrix} \to \varphi\partial = \begin{matrix} 8 & 11 & 13 & 15 \\ 6 & 9 & 10 & 14 \\ 4 & 5 & 7 & 12 \end{matrix}$$

$$\to \varphi\partial^2 = \begin{matrix} 8 & 11 & 15 & 16 \\ 6 & 9 & 13 & 14 \\ 5 & 7 & 10 & 12 \end{matrix} \to \varphi\partial^4 = \begin{matrix} 11 & 15 & 16 & 17 \\ 8 & 9 & 13 & 14 \\ 6 & 7 & 10 & 12 \end{matrix} \to \text{etc.}$$

On voit facilement que l'opération inverse ∂^{-1} est simplement la conjuguée de ∂ par rapport à l'involution $\varphi \to \overline{\varphi}$ consistant à remplacer à la fois l'ordre sur $\underset{\sim}{Z} \times \underset{\sim}{Z}$ et l'ordre sur $\underset{\sim}{Z}$ par leurs ordres opposés

$$(\overline{\varphi} = \begin{matrix} -7 & -5 & -4 & -3 \\ -12 & -10 & -9 & -6 \\ -14 & -13 & -11 & -8 \end{matrix} \text{, par exemple pour } \varphi \text{ comme ci-dessus}).$$

L'opération de promotion ∂ permet de définir une involution remarquable $\varphi \longmapsto \varphi\#$ appelée contraire. Pour abréger, nous nous bornons à décrire l'algorithme qui en fournit la construction et pour cela, nous considérons un tableau $\varphi : A \to I$ et la suite $\{\varphi\partial^p ; p \geqslant 0\}$ des tableaux qui s'en déduisent par itération de ∂ . Soit $n = \mathrm{Card}\,(I)$. Pour chaque $p = 0 , \dots , n - 1$, il existe exactement une case du tableau, disons a_p , telle que $a_p\,\varphi\partial^p \in I$ et $a_p\,\varphi\partial^{p+1} \notin I$. Nous définissons $\varphi\#$ par la condition que $-(a_p\,\varphi\#)$ soit égal à la p-ième plus petite valeur de l'intervalle initial I . Par conséquent, $\varphi\#$ a pour domaine A et pour image $-I$.

Par exemple, si φ est le tableau principal

$$\begin{array}{llll} 6 & & & \\ 3 & 5 & & \\ 1 & 2 & 4 & 7 \end{array} ,$$

la suite $(\varphi\partial^p \ , \ 0 \leqslant p \leqslant 7)$ est constituée par φ ; $\varphi\partial = \begin{array}{llll} 6 & & & \\ 3 & 5 & & \\ 2 & 4 & 7 & 8 \end{array}$;
$\varphi\partial^2 = \begin{array}{llll} 6 & & & \\ 5 & 9 & & \\ 3 & 4 & 7 & 8 \end{array}$; $\varphi\partial^3 = \begin{array}{llll} 6 & & & \\ 5 & 9 & & \\ 4 & 7 & 8 & 10 \end{array}$; $\varphi\partial^4 = \begin{array}{llll} 11 & & & \\ 6 & 9 & & \\ 5 & 7 & 8 & 10 \end{array}$; $\varphi\partial^5 = \begin{array}{llll} 11 & & & \\ 9 & 12 & & \\ 6 & 7 & 8 & 10 \end{array}$;
$\varphi\partial^6 = \begin{array}{llll} 11 & & & \\ 9 & 12 & & \\ 7 & 8 & 10 & 13 \end{array}$; $\varphi\partial^7 = \begin{array}{llll} 11 & & & \\ 9 & 12 & & \\ 8 & 10 & 13 & 14 \end{array}$,

et l'on en déduit que le contraire $\varphi\#$ est le tableau

$$\begin{array}{llll} -4 & & & \\ -5 & -2 & & \\ -7 & -6 & -3 & -1 \end{array} .$$

On démontre que $\varphi\#\# = \varphi$ et que pour chaque entier r (positif ou négatif), on a identiquement $\varphi\partial^r \# = \varphi\# \, \partial^{-r}$. Ces relations n'utilisent pas l'hypothèse que φ est un tableau, et elles resteraient vraies si φ était un morphisme bijectif d'un ensemble partiellement ordonné <u>fini</u> quelconque sur un intervalle de $\underset{\sim}{Z}$.

Le phénomène remarquable est que, quand φ est un tableau rectangulaire, le contraire $\varphi\#$ de φ est précisément égal à l'<u>opposé</u> $\overline{\varphi}$ de φ défini plus haut.

Ceci ne serait plus vrai pour les morphismes bijectifs dans $\underset{\sim}{Z}$ d'un produit direct de <u>trois</u> chaînes ou plus, et la preuve de ce résultat nécessite que nous introduisions quelques notions propres au <u>plan</u> $\underset{\sim}{Z} \times \underset{\sim}{Z}$.

3. Ordre croisé.

Nous définissons dans $\underset{\sim}{Z} \times \underset{\sim}{Z}$ un nouvel ordre, dit <u>croisé</u>, distinct de l'ordre naturel $\leqslant$, en posant $a \searrow a'$ si, et seulement si, les deux points

$$a = (x \ , \ y) \ , \quad a' = (x' \ , \ y')$$

satisfont l'une des deux relations

$$(a = a') \quad \text{ou} \quad (x < x' \quad \text{et} \quad y \geqslant y') \ .$$

De façon duale, (par rapport à l'échange des deux coordonnées), nous poserons $a \nwarrow a'$ si, et seulement si,

$$(a = a') \quad \text{ou} \quad (x \leqslant x' \quad \text{et} \quad y > y') \ .$$

Il résulte de ces définitions que toute paire de points de $\underset{\sim}{Z} \times \underset{\sim}{Z}$ est comparable pour au moins une des relations $\leqslant$, $\searrow$ ou $\nwarrow$, et que l'on a

$$(a \searrow a' \quad \text{et} \quad a' \nwarrow a) \quad \text{si, et seulement si,} \quad a = a' \ .$$

Considérons en particulier un tableau $\varphi : \ A \to I$ et deux éléments consécutifs

i et $i' = i + 1$ de son image I. En raison du fait que les valeurs $a\varphi$ $(a \in A)$ sont croissantes selon les lignes et selon les colonnes, on s'aperçoit que les points $a = i\varphi^{-1}$ et $a' = i'\varphi^{-1}$ sont nécessairement dans l'une des relations $a \searrow a'$ ou $a' \nwarrow a$. Sinon ils seraient dans la relation $a < a'$, et l'on aurait

$$a = (x\ ,\ y)\ ,\quad a' = (x'\ ,\ y')\quad \text{avec}\quad (x < x' \ \text{ et } \ y < y')\ ,$$

ce qui entrainerait que les points $b = (x+1\ ,\ y)$ et $b' = (x\ ,\ y+1)$ satisfassent

$$i = a\varphi < b\varphi\ ,\qquad b'\varphi < a'\varphi = i + 1\ ,$$

ce qui est impossible puisque i et $i+1$ sont consécutifs dans l'image $I = A\varphi$ de φ. L'essentiel de la démonstration de l'identité $\varphi\# = \overline{\varphi}$ repose sur la remarque (facile à vérifier) que si i appartient encore à l'image de $\varphi\partial$ (c'est-à-dire si $i \neq \min(I)$) les deux points $b = i(\varphi\partial)^{-1}$ et $b' = i'(\varphi\partial)^{-1}$ sont dans la même relation $\searrow$ ou $\nwarrow$ que les points $a = i\varphi^{-1}$ et $a' = i'\varphi^{-1}$. Autrement dit, <u>les relations d'ordre croisé entre valeurs consécutives de l'image sont invariantes par promotion</u>.

Un raisonnement un peu plus long permet d'établir que, dans les mêmes conditions, chaque relation $i\varphi^{-1} \searrow i'\varphi^{-1}$ équivaut à $-i(\varphi\#)^{-1} \searrow -i'(\varphi\#)^{-1}$ quand φ est un tableau rectangulaire.

4. Un résultat combinatoire.

Nous considérons maintenant <u>trois</u> valeurs consécutives i, $i' = i+1$ et $i'' = i+2$ de l'image d'un tableau φ, et la transposition $\theta_i = (i'\ ,\ i'') : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$. Cette transposition sera dite <u>admissible</u> pour φ si, et seulement si, les points $a = i\varphi^{-1}$, $a' = i'\varphi^{-1}$, $a'' = i''\varphi^{-1}$ satisfont

$$(a' \nwarrow a \ \text{ et } \ a \searrow a'') \ \text{ ou } \ (a'' \nwarrow a \ \text{ et } \ a \searrow a')\ ,$$

(ce qui implique en particulier que a' et a'' ne soient pas comparables pour l'ordre naturel $\leq$). Il est clair que si θ_i est admissible pour le tableau $\varphi : A \to I$, la bijection $\varphi\theta_i : A \to I$ est encore un tableau et, dans ce cas, on peut vérifier sans difficulté que $\varphi\partial\theta_i = \varphi\theta_i\partial$ quand $i \neq \min(I)$. La situation est un peu plus compliquée quand $i = \min(I)$, et le résultat combinatoire que nous avions en vue peut s'énoncer de la façon suivante :

<u>Propriété</u>. - Soient $\varphi : A \to I$ un tableau rectangulaire, $i = \min(I)$ et θ_i admissible pour φ. On a $\varphi\theta_i\partial^3 = \varphi\partial^3$ et $\varphi\theta_i\# = \varphi\#\overline{\theta}_i$, où $\overline{\theta}_i$ désigne la transposition de $\mathbb{Z}$ échangeant $-i'$ et $-i''$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ROBINSON (G. de B.). - On the representations of the symmetric group, Amer. J. of Math., t. 60, 1938, p. 745-760.

Marcel P. SCHÜTZENBERGER
97 rue du Ranelagh
75016 PARIS