SAMUEL WOLFENSTEIN

Groupes réticulés singuliers

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 25, nº 1 (1971-1972), exp. nº 5, p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1971-1972__25_1_A5_0>

Séminaire DUBREIL
(Algèbre)
25e année, 1971/72, n° 5, 9 p.

17 janvier 1971

GROUPES RÉTICULÉS SINGULIERS

par Samuel WOLFENSTEIN

Soient G un groupe réticulé, et e son élément neutre. Un élément s de G est dit singulier, si $s > e$, et si ($s = tu$ avec $t, u \geqslant e$) implique ($t \wedge u = e$). Ainsi, si $G = \prod Z_i$, où chaque Z_i est une copie du groupe ordonné des entiers relatifs (on dit, dans ce cas, que G est un "produit direct d'entiers"), les éléments singuliers de G sont les éléments non nuls, dont chaque composante est égale soit à 0, soit à 1. Si chaque élément strictement positif de G majore un élément singulier, on dit que G est un groupe singulier. Ainsi, tout produit sous-direct d'entiers qui contient le produit direct restreint est un groupe singulier. Un de nos résultats principaux sera une caractérisation des groupes archimédiens singuliers au moyen d'une représentation canonique par des fonctions presque finies (X étant un espace topologique, $\overline{\underset{\sim}{R}}$ la droite achevée, on dit qu'une application de X dans $\overline{\underset{\sim}{R}}$ est presque finie si elle est finie dans une partie dense de X) dont les valeurs finies sont des entiers. Ce résultat s'apparente au théorème classique de BERNEAU [1] sur la représentation des groupes réticulés archimédiens par des fonctions presque finies définies sur un espace de Stone, mais la méthode employée est assez différente. Il ne semble d'ailleurs pas que la méthode de BERNEAU donne une caractérisation des groupes singuliers.

1. Introduction.

Les groupes singuliers furent rencontrés pour la première fois par IWASAWA dans son étude des groupes ordonnés complets [4]. Un tel groupe C est évidemment réticulé et archimédien, donc commutatif. Si D est son sous-groupe divisible maximum, IWASAWA montre que D est un facteur direct de C, dans le sens des groupes réticulés, c'est-à-dire qu'on a $C = D \times S$, avec $S = D^{\perp}$ (l'ensemble des éléments $x \in C$, tels que, pour tout $d \in D$, $|x| \wedge |d| = e$), et que S est un groupe singulier (évidemment complet). Malheureusement, IWASAWA a cru pouvoir démontrer que cet S est un produit sous-direct d'entiers, faute corrigée un quart de siècle plus tard par CONRAD et McALISTER [3]. Toutefois, le "théorème" d'Iwasawa est "presque" vrai, dans le sens précisé plus haut ; et la conclusion devient vraie sous des hypothèses plus fortes sur C, par exemple, que C soit, en plus de complet, hyper-archimédien (cas traité dans notre paragraphe 5) ou complètement distributif (cas traité par READ [5]).

Rappels. - Dans tout ce qui suit, G est un groupe réticulé. Un sous-groupe de G, qui en est en même temps un sous-treillis, est appelé un ℓ-sous-groupe de G. On note $\mathcal{C}(G)$ l'ensemble des ℓ-sous-groupes convexes de G. Si $C \in \mathcal{C}(G)$ est distingué, on dit que C est un ℓ-idéal de G. Pour $C \in \mathcal{C}(G)$, on note $[G/C]_g$

l'ensemble des classes à gauche de C , ordonné par la relation $x \leqslant y$, s'il existe $c \in C$, tel que $x \leqslant yc$. L'application $x \longmapsto xC$ définit un homomorphisme de treillis (ou de groupes réticulés, si C est un ℓ-idéal). Si $[G/C]_g$ est totalement ordonné, on dit que C est un sous-groupe premier de G . On montre que tout sous-groupe premier contient un sous-groupe premier minimal.

Soient $g \in G$, et $C \in \mathcal{C}(G)$, maximal entre les éléments de $\mathcal{C}(G)$ qui ne contiennent pas g , alors on dit que C est un sous-groupe régulier de G , et que c'est une valeur de g . On note $\operatorname{val} g$, l'ensemble des valeurs de g . Il résulte du théorème de Zorn que, pour $g \neq e$, $\operatorname{val} g \neq \emptyset$. On montre que tout sous-groupe régulier est premier.

Pour $C \in \mathcal{C}(G)$ régulier, on note C^* l'élément de $\mathcal{C}(G)$ qui couvre C . Si $C \lhd C^*$, on dit que C est une valeur normale. S'il en est ainsi, C^*/C est un groupe réel (c'est-à-dire, isomorphe à un sous-groupe du groupe ordonné $\underset{\sim}{R}$).

Les résultats suivants sont démontrés dans [6].

1.1. - Soit $C \in \mathcal{C}(G)$ régulier. S'il existe dans $[G/C]_g$ un élément qui couvre C , alors C est une valeur normale.

1.2. - Soient x , $y \in G$, strictement positifs. Si $xM < yM$ pour tout $M \in \operatorname{val} x$, alors $x < y$.

2. Éléments singuliers et groupes singuliers.

2.1. PROPOSITION. - *Soit* $s \in G_+ - \{e\}$, *alors les conditions suivantes sont équivalentes* :

(i) *Pour tout sous-groupe premier minimal* M *de* G , *tel que* $s \notin M$, sM *couvre* M *dans* $[G/M]_g$.

(ii) *Pour tout* $t \in G_+$, *tel que* $t \leqslant s$, $st^{-1} \wedge t = e$.

(iii) *Pour tout* $t \in G_+$, $s \wedge t^2 \leqslant t$.

Démonstration.

(i) implique (ii) : En effet, si $s = tu$, avec $t \wedge u > e$, il existe un sous-groupe premier minimal M de G , qui ne contient pas $t \wedge u$, et $sM > uM > M$.

(ii) implique (iii) : En effet, si la condition (ii) est vraie, on a, pour tout $t \in G_+$

$$\begin{aligned} e &= s(s \wedge t)^{-1} \wedge (s \wedge t) \\ &= s(s^{-1} \vee t^{-1}) \wedge (s \wedge t) \\ &= (e \vee st^{-1}) \wedge (s \wedge t) \\ &= (e \wedge s \wedge t) \vee (st^{-1} \wedge s \wedge t) \\ &= e \vee (st^{-1} \wedge t) . \end{aligned}$$

Ainsi, $st^{-1} \wedge t \leqslant e$, et $s \wedge t^2 \leqslant t$.

(iii) implique (i) : En effet, s'il existe un sous-groupe premier minimal M et un élément positif t , tels que $sM > tM > M$, alors $t^2 M > tM$, et

$$(s \wedge t^2)M = \inf(sM\ ,\ t^2 M) > tM\ ,$$

ce qui contredit la condition (iii).

2.2. Définition. - Un élément strictement positif $s \in G$, qui vérifie les trois conditions équivalentes de la proposition 2.1, est dit élément singulier de G .

Notation. - Dans tout ce qui suit, S désigne l'ensemble des éléments singuliers de G , $\mathfrak{M} = \{\text{val } s\ ;\ s \in S\}$.

2.3. Propriétés des éléments singuliers.

(i) Tout $M \in \mathfrak{M}$ est un sous-groupe premier minimal.

(ii) Tout $M \in \mathfrak{M}$ est une valeur normale, et $M^*/M \simeq Z$.

(iii) Pour $s , t \in S$, $\text{val } s \wedge t = \text{val } s \cap \text{val } t$,

$$\text{val } s \vee t = \text{val } st = \text{val } s \cup \text{val } t\ ,$$

$\text{val } s(s \wedge t)^{-1} = \text{val } s - \text{val } t$.

(iv) Pour tout $s \in S$, $t \in G$, $(e < t \leqslant s)$ implique $(t \in S)$.

(v) Si, pour tout $i \in I$, $s_i \in S$, et si $s = \bigvee s_i$, alors $s \in S$.

Démonstration.

(i) est immédiat d'après la condition (i) de la définition, et (ii) est une conséquence du 1.1. (iii) résulte du fait que les éléments de $\mathfrak{M}$ sont deux à deux non comparables. Enfin, (iv) et (v) résultent de la condition (iii) de la définition, compte tenu (pour (v)) des lois de distributivité infinie dans les groupes réticulés.

2.4. PROPOSITION. - Soit G un groupe réticulé, alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Pour tout $g \in G_+ - \{e\}$, il existe $s \in S$, tel que $g \geqslant s$.

(ii) $\bigcap \mathfrak{M} = \{e\}$.

Démonstration. - Posons $V = \bigcap \mathfrak{M}$. $V \in \mathcal{C}(G)$, donc, pour établir (ii), il suffit de montrer que V ne contient pas d'élément strictement positif. Or, si $g \geqslant s$, avec $s \in S$, et $M \in \text{val } s$, $M \in \mathfrak{M}$ et $g \notin M$, donc $g \notin V$. Ainsi, (i) implique (ii).

Réciproquement, si $V = \{e\}$ et $g > e$, il existe $M \in \mathfrak{M}$, tel que $gM > M$. On a $M \in \text{val } t$, avec $t \in S$. Si on pose $s = g \wedge t$, $g \geqslant s$, et $s \in S$.

2.5. Définition. - Un groupe réticulé, qui vérifie les deux conditions équivalentes de la proposition 2.4, est appelé un groupe singulier.

Rappelons qu'un ℓ-sous-groupe G d'un groupe réticulé H est dit dense, si chaque élément strictement positif de H majore un élément strictement positif de G . Il est bien connu que tout groupe réticulé archimédien peut être plongé, comme ℓ-sous-groupe dense, dans un groupe complet $\hat{G}$, dont chaque élément est la borne supérieure d'éléments de G . $\hat{G}$, qui est déterminé à un isomorphisme près, est appelé le complété de G . Il est montré, dans [3], que, si G est un ℓ-sous-groupe dense du groupe complet H , $\hat{G}$ peut être identifié avec le ℓ-idéal de H engendré par G . En particulier, tout ℓ-idéal de H est complet.

2.6. PROPOSITION. - *Soit* G *un* ℓ-*sous-groupe dense du groupe réticulé* H , *alors* :

(i) *Pour tout* $g \in G$, g *est singulier dans* G , *si, et seulement si,* g *est singulier dans* H .

(ii) *Pour que* G *soit singulier, il faut et il suffit que* H *soit singulier.*

Démonstration.

(i) L'implication dans un sens est évidente. Supposons donc g singulier dans G , $g = uv$, avec $u , v \in H_+$, et, par l'absurde, que $u \wedge v > e$. Alors, il existe $t \in G$, tel que $u \wedge v \geqslant t > e$. g majorant t^2 , t^2 serait un élément singulier de G . Mais $t^2 \wedge t^2 = t^2 > t$, ce qui est en contradiction avec la condition (iii) de la proposition 2.1.

(ii) La suffisance est évidente. Supposons donc que G soit singulier et soit $h \in H_+ - \{e\}$, alors, il existe $g \in G$, tel que $h > g > e$, et, par la singularité de G , un élément s , singulier dans G , tel que $g \geqslant s$. Mais, par ce qui précède, s est également singulier dans H .

Remarque. - Compte tenu des observations qui la précèdent, cette proposition ramène l'étude des groupes singuliers archimédiens à celle des ℓ-sous-groupes denses des groupes singuliers complets.

3. Définition d'une topologie sur $\mathfrak{M}$.

Dans tout ce qui suit, G est un groupe singulier.

3.1. PROPOSITION. - $\{\text{val } s \ ; \ s \in S\}$ *est une base de topologie sur* $\mathfrak{M}$.

C'est évident d'après les (iii) et (iv) du 2.3.

Dans tout ce qui suit on suppose $\mathfrak{M}$ muni de cette topologie.

3.2. PROPOSITION. - $\mathfrak{M}$ *est un espace séparé.*

Démonstration. - Soit $M_i \in \text{val } s_i$, $s_i \in S$, pour $i = 1 , 2$, et $M_1 \neq M_2$.

Soient $g_1 \in M_2^+ - M_1$, $g_2 \in M_1^+ - M_2$, et posons

$$t_i = g_i \wedge s_i \ , \quad u_i = t_i(t_1 \wedge t_2)^{-1} \ , \quad i = 1 \ , 2 \ .$$

Alors, $u_i \in S$, $M_i \in \operatorname{val} u_i$, pour $i = 1 , 2$, et

$$\operatorname{val} u_1 \cap \operatorname{val} u_2 = \operatorname{val} u_1 \wedge u_2 = \operatorname{val} e = \emptyset \ .$$

3.3. PROPOSITION. - Pour tout $s \in S$, $\operatorname{val} s$ est compact.

Démonstration. - Soit $s \in S$, et soit $T \subset S$ tels que

$$\operatorname{val} s \subset \bigcup \{\operatorname{val} t \ ; \ t \in T\} \ .$$

Soit C le ℓ-sous-groupe convexe de G engendré par T . Alors, $s \in C$. En effet, si $s \notin C$, il y aurait $M \in \operatorname{val} s$, avec $C \subset M$, et, par conséquent, $M \notin \operatorname{val} t$, pour tout $t \in T$. Il en résulte que $s \leqslant s_1 \ldots s_n$, avec $s_i \in T$, $i = 1 , \ldots , n$, et, par conséquent,

$$\operatorname{val} s \subset \bigcup_{i=1}^{n} \operatorname{val} s_i \ .$$

3.4. COROLLAIRE. - $\mathfrak{M}$ est localement compact.

3.5. PROPOSITION. - Pour que G soit archimédien, il faut et il suffit que, pour tout $g \in G$, $\{M \in \mathfrak{M} \ ; \ g \in M^*\}$ soit dense dans $\mathfrak{M}$.

Démonstration. - Supposons que, pour un $g \in G$, $\{M \in \mathfrak{M} \ ; \ g \in M^*\}$ ne soit pas dense. Cela veut dire qu'il existe $s \in S$, tel que $g \notin M^*$, pour tout $M \in \operatorname{val} s$. On a donc $|g| M > s^n M$ pour tout $M \in \operatorname{val} s$, et pour tout $n \in Z$. Il résulte de la proposition 1.2 que $|g| > s^n$, pour tout entier n , et que G n'est pas archimédien.

Réciproquement, si, pour $f , g > e$, $f^n < g$, pour tout n , soit $s \in S$, tel que $f > s$, et on a, pour tout $M \in \operatorname{val} s$, et pour tout entier n , $gM > s^n M$. M^*/M étant archimédien, il en résulte que $g \notin M^*$.

Rappelons qu'un espace topologique X est dit extrêmement discontinu, si l'adhérence de toute partie ouverte de X est ouverte, ou, ce qui revient au même, si l'intersection des adhérences de deux parties ouvertes disjointes de X est vide.

3.6. PROPOSITION. - Si G est complet, $\mathfrak{M}$ est extrêmement discontinu.

Démonstration. - Soient O_1 et O_2 deux parties ouvertes disjointes de $\mathfrak{M}$. On a

$$O_i = \bigcup \{\operatorname{val} s \ ; \ s \in S_i\} \ , \text{ avec } S_1 \subset S \cap S_2^{\perp} \ , \ S_2 \subset S \cap S_1^{\perp} \ .$$

Supposons, par l'absurde, que $M \in \bar{O}_1 \cap \bar{O}_2$. Cela veut dire que, pour tout $t \in S - M$, il existe $s_i \in S_i$, $i = 1 , 2$, tel que $s_i \wedge t > e$, autrement dit que $S \cap (S_1^{\perp} \cup S_2^{\perp}) \subset M$. Soit donc $t \in S - M$, et posons $v = \bigvee \{s \wedge t \ ; \ s \in S_1\}$. Comme on vient de voir $v > e$; par la propriété (v) du 2.3, $v \in S$. Mais, pour tout $s' \in S_2$,

$$v \wedge s' = \{s \wedge t \wedge s' \; ; \; s \in S_1\} = e \; .$$

Ainsi, $v \in M$. Soit maintenant $s \in S_1$. Alors

$$\begin{aligned} e &\leqslant tv^{-1} \wedge s \wedge t \; , \\ &\leqslant tv^{-1} \wedge v \; , \\ &= e \; , \text{ parce que } v \text{ est singulier.} \end{aligned}$$

Il en résulte que $tv^{-1} \in S \cap S_1^{\perp} \subset M$, et, enfin, $t \in M$, ce qui est absurde.

4. Représentation des groupes singuliers archimédiens.

4.1. PROPOSITION. - Soit G un groupe singulier et complet. Alors, pour tout $g \in G - \{e\}$, il existe $s(g) \in S$, tel que $\mathrm{val}\; s(g) = \{M \in \mathfrak{M} \; ; \; g \notin M\}$.

Démonstration. - On va montrer que $s(g) = \bigvee \{s \in S \; ; \; s \leqslant |g|\}$ répond à la question. En effet, c'est un élément singulier (2.3, propriété (v)), et il est clair que, pour tout $M \in \mathfrak{M}$, si $g \in M$, $s(g) \in M$. Supposons donc que $g \notin M$, soit $t \in S - M$, et posons $u = |g| \wedge t$. Alors $u \notin M$. Mais $s(g) \geqslant u$, donc $s(g) \notin M$, et $M \in \mathrm{val}\; s(g)$.

Notation. - On notera $\varphi_M : M^*/M \to Z$, l'isomorphisme dont l'existence est énoncée dans la propriété (ii) du 2.3.

4. 2. LEMME. - Soit G un groupe singulier et complet, alors, pour tout $g \in G$ et pour tout $n \in Z$, $\{M \in \mathfrak{M} \; ; \; \varphi_M(g) = n\}$ est ouvert.

Démonstration. - Si $n = 0$, il s'agit du complémentaire de $\mathrm{val}\; s(g)$. Or, $\mathrm{val}\; s(g)$ .est compact (proposition 3.3), donc fermé. Considérons donc le cas $n > 0$, le cas $n < 0$ étant pareil. On peut aussi supposer $g > e$, puisque, pour $n > 0$, $\varphi_M(g) = n$ si, et seulement si, $\varphi_M(g_+) = n$.

Soit donc $g > e$, et on va définir une suite (finie ou infinie) d'éléments singuliers s_n, telle que $\mathrm{val}\; s_n = \{M \in \mathfrak{M} \; ; \; \varphi_M(g) = n\}$. On pose

$$g_0 = g \; , \quad g_{n+1} = g_n \, s(g_n)^{-1} \; , \quad s_n = s(g_{n-1}) \, s(g_n)^{-1} \; .$$

On voit facilement que, pour tout $M \in \mathrm{val}\; g$,

$$\varphi_M(g_n) = (\varphi_M(g) - n) \vee 0 \; ,$$

donc

$$\mathrm{val}\; s(g_n) = \{M \in \mathfrak{M} \; ; \; \varphi_M(g) > n\} \; ,$$

et

$$\mathrm{val}\; s_n = \{M \in \mathfrak{M} \; ; \; \varphi_M(g) = n\} \; .$$

Il est clair que tous les s_n sont singuliers ou nuls.

Dans tout ce qui suit, $\overline{Z}$ désigne le complété de Z . Si X est un espace topologique, une application de X dans $\overline{Z}$ est dite presque finie si elle prend des valeurs finies dans une partie dense de X . On note $C_{pf}(X , \overline{Z})$ l'ensemble des fonctions continues et presque finies de X dans $\overline{Z}$. Si X est extrêmement discontinu, on montre facilement que $C_{pf}(X , \overline{Z})$ est un groupe singulier et complet.

Soient maintenant X un espace extrêmement discontinu, O une partie ouverte dense de X , $f : O \to Z$ une application continue, alors f peut être prolongée de façon unique en une fonction de $C_{pf}(X , \overline{Z})$. Nous avons donc le théorème suivant.

4.3. THÉORÈME. - Soit G un groupe réticulé. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) G est singulier et complet.

(ii) Il existe un espace localement compact et extrêmement discontinu X , tel que G est isomorphe à un ℓ-idéal de $C_{pf}(X , \overline{Z})$.

(iii) Il existe un espace extrêmement discontinu X , tel que G est isomorphe à un ℓ-idéal de $C_{pf}(X , \overline{Z})$.

En effet, par ce qui précède, si G est singulier et complet, et si, pour tout $g \in G$, on note $O_g = \{ M \in \mathfrak{M} ; \ g \in M^* \}$, alors il existe une unique

$$u(g) \in C_{pf}(\mathfrak{M} , \overline{Z}) ,$$

telle que $(u(g))(M) = \varphi_M(g)$, pour tout $M \in O_g$. On vérifie immédiatement que $u : G \to C_{pf}(\mathfrak{M} , \overline{Z})$ est un homomorphisme injectif. $u(G)$, étant un ℓ-sous-groupe dense et complet d'un groupe complet, en est un ℓ-idéal. Ainsi, (i) implique (ii), (ii) implique trivialement (iii), et, puisque, pour X extrêmement discontinu, $C_{pf}(X , \overline{Z})$ est singulier et complet, il en est de même de chacun de ses ℓ-idéaux.

Compte tenu de la remarque suivant la proposition 2.6, nous avons, comme conséquence immédiate de ce théorème, la caractérisation suivante des groupes singuliers archimédiens.

4.4. THÉORÈME. - Soit G un groupe réticulé, alors, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) G est singulier et archimédien.

(ii) Il existe un espace (localement compact et) extrêmement discontinu X , tel que G est isomorphe à un ℓ-sous-groupe dense de $C_{pf}(X , \overline{Z})$.

5. Groupes singuliers hyper-archimédiens.

Suivant A. BIGARD, nous appelons hyper-archimédien un groupe réticulé G , qui vérifie les conditions équivalentes :

(i) Toute image homomorphe de G est archimédienne.

(ii) Tout sous-groupe premier propre de G est minimal (donc maximal).

(iii) Tout sous-groupe régulier de G est un sous-groupe premier minimal.

Pour la représentation des groupes hyper-archimédiens dans le cas général, on consultera [2]. Dans le cas d'un groupe singulier, nous avons le résultat suivant.

5.1. PROPOSITION. - *Tout groupe singulier hyper-archimédien est un produit sous-direct d'entiers.*

En effet, si G est hyper-archimédien, alors, pour tout $M \in \mathfrak{M}$, $M^* = G$, donc $M \lhd G$, et $G/M \simeq Z$. Si, en plus, G est singulier, $\bigcap \mathfrak{M} = \{e\}$, et l'homomorphisme canonique de G dans $\prod G/M$ est injectif.

CONRAD et McALISTER ont remarqué que le sous-groupe d'un groupe réticulé G , engendré par S , en est un ℓ-idéal commutatif. On peut en dire un peu plus :

5.2. PROPOSITION. - *Si un groupe réticulé* G *est engendré par ses éléments singuliers alors,*

(i) G *est hyper-archimédien.*

(ii) *Le complété* $\hat{G}$ *de* G *est engendré par ses éléments singuliers (et donc hyper-archimédien).*

Démonstration.

(i) Si G est engendré par ses éléments singuliers, et si $M \in \text{val}\ g$, avec $g \in G$, alors il existe $s \in S$, tel que $s \notin M$, et par conséquent, $M \in \text{val}\ s$. Ainsi, tout sous-groupe régulier de G appartient à $\mathfrak{M}$.

(ii) Soit $h \in \hat{G}_+$, alors $h \leqslant s_1 \ldots s_n$, où les s_i sont des éléments singuliers de $\hat{G}$, donc de G . Ainsi, $h = t_1 \ldots t_n$, avec $e \leqslant t_i \leqslant s_i$. Les t_i étant tous singuliers ou nuls, il en résulte que $\hat{G}_+$ est engendré par ses éléments singuliers. Mais on sait qu'un groupe réticulé est engendré par ses éléments positifs.

Si X est un espace topologique, on notera $C_b(X , Z)$ l'ensemble des applications continues et bornées de X dans Z . Pour X extrêmement discontinu, c'est un ℓ-idéal de $C_{pf}(X , \overline{Z})$, donc un groupe singulier et complet. On vérifie sans peine qu'en plus il est engendré par ses éléments singuliers.

5.3. THÉORÈME. - *Soit* G *un groupe réticulé, alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) G *est hyper-archimédien, singulier et complet.*

(ii) *Il existe un espace (localement compact et) extrêmement discontinu, tel que* G *est isomorphe à un* ℓ*-idéal de* $C_b(X , Z)$.

(iii) G est complet et engendré par ses éléments singuliers.

En effet, si la condition (i) est vérifiée, et si $u : G \to C_{pf}(X, \overline{Z})$ est l'application définie dans la démonstration du théorème 4.3, alors chaque élément de $u(G)$ est une fonction finie à support compact (4.1 et 3.3), donc bornée. Ainsi, (i) implique (ii), et les autres implications ont déjà été établies.

5.4. COROLLAIRE. - Soit G un groupe réticulé. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) G est singulier et son complété est hyper-archimédien.

(ii) Il existe un espace (localement compact et) extrêmement discontinu X, tel que G est isomorphe à un ℓ-sous-groupe dense de $C_b(X, Z)$.

Si l'on a pas, pour les groupes hyper-archimédiens, un analogue du théorème 4.4, c'est parce que le complété d'un groupe hyper-archimédien n'est pas nécessairement hyper-archimédien.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BERNEAU (S. J.). - Unique representation of archimedean lattice groups and normal archimedean lattice rings, Proc. Lond. math. Soc., t. 15, 1965, p. 599-631.

[2] BIGARD (A.). - Groupes archimédiens et hyper-archimédiens, Séminaire Dubreil-Pisot : algèbre et théorie des nombres, 21e année, 1967/68, n° 2, 13 p.

[3] CONRAD (P.) and McALISTER (D.). - The completion of a lattice ordered group, J. Austral. math. Soc., t. 9, 1969, p. 182-208.

[4] IWASAWA (K.). - On the structure of conditionally complete lattice groups, Japanese J. of Math., t. 18, 1943, p. 777-789.

[5] READ (J. A.). - Nonoverlapping lattice ordered groups, Thèse Sc. Math. Univ. of Wisconsin, 1971.

[6] WOLFENSTEIN (S.). - Valeurs normales dans un groupe réticulé, Rend. Acc. naz. dei Lincei, Roma, Série 8, t. 44, 1968, p. 337-342.

Samuel WOLFENSTEIN
59 rue de la Citadelle
94110 ARCUEIL