SÉMINAIRE DUBREIL.
ALGÈBRE ET THÉORIE
DES NOMBRES

KARL M. VAN METER

Les sous-groupes d'un groupe quasi-réticulé

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 25, n° 1 (1971-1972), exp. n° 4, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1971-1972__25_1_A4_0>

Séminaire DUBREIL
(Algèbre)
25e année, 1971/72, n° 4, 13 p.

10 janvier 1972

LES SOUS-GROUPES D'UN GROUPE QUASI-RÉTICULÉ

par Karl M. VAN METER

Première partie

Dans un groupe ordonné G, nous définissons une valeur M dans G comme un sous-groupe convexe filtrant (un sous-groupe c. f.) de G maximal parmi les sous-groupes c. f. de G qui ne contiennent pas un certain élément g de G ; dans ce cas, nous appellerons M une valeur de g dans G. Appelons $\underset{\sim}{M}(G)$ l'ensemble de toutes les valeurs dans G, $\underset{\sim}{M}(g)$ l'ensemble de toutes les valeurs de g dans G, et $\underset{\sim}{M}^*(g)$ l'intersection de toutes les valeurs de g dans G. D'autre part, appelons M^* l'intersection de tous les sous-groupes c. f. de G qui contiennent strictement la valeur M, et $G(g)$ l'intersection de tous les sous-groupes c. f. de G qui contiennent g. Nous dirons que deux éléments a et b de G sont quasi-disjoints s'ils sont positifs et si $a \in \underset{\sim}{M}^*(b)$ et $b \in \underset{\sim}{M}^*(a)$. De plus, pour un sous-groupe c. f. quelconque K de G, nous dirons que $K + g$ [et $g + K$] est positif s'il contient un élément positif de G. On vérifie facilement que ceci définit une relation d'ordre sur l'ensemble $\mathcal{R}(K)$ [et $\mathcal{L}(K)$] des classes à droite [à gauche] de K dans G.

Soit G un groupe ordonné. Nous dirons que G est un groupe quasi-réticulé si tout élément g de G admet une représentation de la forme $g = a - b$, avec a et b quasi-disjoints. De plus, nous dirons que G est un groupe $*$-quasi-réticulé si tout élément g de G admet au moins une représentation de la forme $g = a - b$ avec a et b quasi-disjoints, et $a + b = b + a$. Nous avons déjà donné un exemple d'un groupe quasi-réticulé qui n'est pas un groupe $*$-quasi-réticulé ([8], exemple 3.1), et un exemple d'un groupe $*$-quasi-réticulé non abélien qui n'est pas un groupe réticulé ([7], exemple 3.1).

Le concept d'un groupe quasi-réticulé abélien (en anglais : "abelian pseudo lattice ordered group") a été introduit pour la première fois, dans la littérature mathématique, par P. CONRAD [1]. Plus tard, J. R. TELLER [6] a obtenu d'autres résultats concernant cette nouvelle structure ; notamment, tout groupe quasi-réticulé abélien est un groupe de Riesz.

Nous utiliserons les résultats suivants, démontrés dans [7] : Soient G un groupe ordonné, K un sous-groupe c. f. de G, et $g = a - b$ avec a et b quasi-disjoints. Alors, on a les propriétés suivantes :

(1.1) Pour tout élément x de G qui n'appartient pas à K, il existe M de $\underset{\sim}{M}(x)$ tel que $M \supseteq K$;

(1.2) Pour tout élément non-zéro x de G , $\underset{\sim}{M}(x) \neq \emptyset$ et, d'autre part, K est égal à l'intersection de toutes les valeurs dans G qui le contiennent ;

(1.3) $\underset{\sim}{M}(a) \cap \underset{\sim}{M}(b) = \emptyset$ et $\underset{\sim}{M}(a) \cup \underset{\sim}{M}(b) = \underset{\sim}{M}(g)$;

(1.4) $G(a + b) = \{x \in G \ ; \ m(a + b) \leqslant x \leqslant n(a + b)$ où $m , n \in \underset{\sim}{Z}\}$ est le plus petit sous-groupe c. f. de G , contenant g , et est égal à l'intersection de toutes les valeurs dans G qui contiennent g ;

(1.5) $0 \leqslant g$ si, et seulement si, pour chaque M de $\underset{\sim}{M}(g)$, on a $M < M + g$.

Maintenant, nous supposons, de plus, que G est quasi-réticulé. Alors, nous avons les propriétés suivantes :

(1.6) Pour tout M de $\underset{\sim}{M}(G)$, l'ensemble $\mathcal{R}^*(M)$ [et $\mathcal{L}^*(M)$] de toutes les classes à droite [à gauche] de M dans M^* est totalement ordonné ;

(1.7) L'intersection d'une famille quelconque de sous-groupes c. f. de G est un sous-groupe c. f. de G .

Les deux théorèmes suivants sont aussi démontrés dans [7] :

THÉORÈME 1.1. - *Soit* G *un groupe quasi-réticulé. Alors, pour deux éléments positifs quelconques* a *et* b *de* G , *les conditions suivantes sont équivalentes* :

(i) a *et* b *quasi-disjoints* ;

(ii) *Si* $c \leqslant a$ *et* $c \leqslant b$, *alors* $nc \leqslant a$ *et* $nc \leqslant b$ *pour tout entier positif* n ;

(iii) *Pour tout sous-groupe c. f.* M *de* G , *on a* $M + a$ *et* $M + b$ *non comparables si, et seulement si,* $a , b \notin M$.

THÉORÈME 2.2..- *Soit* G *un groupe quasi-réticulé. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes* :

(a) G *est un groupe réticulé* ;

(b) $\mathcal{R}(M)$ *est totalement ordonné pour chaque* M *de* $\underset{\sim}{M}(G)$;

(c) $\mathcal{L}(M)$ *est totalement ordonné pour chaque* M *de* $\underset{\sim}{M}(G)$;

(d) *Pour chaque* g *de* G , *il existe une représentation* $g = a - b$, *où* $0 \leqslant a,b$ *et* $a \in M$ *ou* $b \in M$ *pour tout* M *de* $\underset{\sim}{M}(G)$;

(e) *Pour tout* g *de* G *et tout* M *de* $\underset{\sim}{M}(G)$, M *est comparable avec* $M + g$;

(f) $\underset{\sim}{M}(G)$ *est un système à racine* ;

(g) *Pour chaque* g *de* G , *il existe une représentation unique de la forme* $g = a - b$, *avec* a *et* b *quasi-disjoints.*

Nous utiliserons, de plus, les résultats suivants qui ont été démontrés dans [8] :

LEMME 1.1. - *Soit* G *un groupe ordonné, et soit* $g = a - b$, *avec* a *et* b

quasi-disjoints et $z \geq 0$, g . *Alors, toute valeur de* a *est contenue dans une valeur de* z . *Si, de plus,* $a \geq z$, *on a* z *et* $(-g+z)$ *quasi-disjoints.*

LEMME 1.2. - *Soit* G *un groupe ordonné, et soit* $g = a - b = x - y$, *avec* a *et* b , x *et* y *quasi-disjoints. Alors,* $\underset{\sim}{M}(a) = \underset{\sim}{M}(x)$, $\underset{\sim}{M}(b) = \underset{\sim}{M}(y)$ *et*

$$-x + a = -y + b \in \underset{\sim}{M}^{*}(g) .$$

THÉORÈME 1.1. - *Tout groupe* $*$*-quasi-réticulé est un groupe de Riesz.*

Dans la deuxième partie de ce travail, nous démontrerons les résultats généraux qu'il nous faut pour établir nos résultats importants de la troisième et la quatrième partie. Dans la troisième partie, nous définirons un sous-groupe premier, et le caractériserons dans un groupe quasi-réticulé. Dans la quatrième partie, nous prolongerons les résultats de la troisième partie pour montrer l'analogie étroite qui existe avec la théorie des groupes réticulés.

Deuxième partie

LEMME 2.1. - *Soient* G *un groupe quasi-réticulé,* v *un entier quelconque, et* g *un élément de* G . *Alors,* $\underset{\sim}{M}(g) = \underset{\sim}{M}(vg)$.

Démonstration. - Soit $g = a - b$ avec a et b quasi-disjoints ; d'après la propriété 1.3 de [7], $\underset{\sim}{M}(g) = \underset{\sim}{M}(a) \cup \underset{\sim}{M}(b)$. Puisque a et b quasi-disjoints, on a, pour tout M de $\underset{\sim}{M}(g)$,

$$M + g = M - b < M \quad \text{ou} \quad g + M = a + M > M ;$$

ce qui entraîne

$$M + ng < M + g < M \quad \text{ou} \quad ng + M > g + M > M$$

pour tout entier positif n . On en déduit que $ng \notin M$ et que $M \in \underset{\sim}{M}(ng)$. De même, pour les entiers négatifs ; d'où $M \in \underset{\sim}{M}(g)$ entraîne $M \in \underset{\sim}{M}(vg)$. Inversement, soit $M \in \underset{\sim}{M}(vg)$; alors, $vg \notin M$ et $g \notin M$. D'après la propriété 1.1 de [7], il existe un $N \in \underset{\sim}{M}(g)$ tel que $N \supseteq M$. Compte tenu de ce que nous venons de démontrer et du fait que deux valeurs d'un même élément ne sont jamais comparables, on en déduit que $N = M$ et $M \in \underset{\sim}{M}(g)$; d'où le lemme.

PROPOSITION 2.2. - *Soient* G *un groupe quasi-réticulé,* a *et* b *quasi-disjoints dans* G , c *un élément quelconque de* G , *et* m , n *deux entiers positifs quelconques. Alors,* $c \leq a$ *et* $c \leq b$ *si, et seulement si,* $mc \leq na$ *et* $mc \leq nb$.

Démonstration. - Soient $c \leq a$, $c \leq b$, et m , n deux entiers positifs fixes. D'après la condition (ii) du théorème 1.1 de [7], on a $mc \leq a$ et $mc \leq b$. Puisque a et b sont positifs, on en déduit, par isotonie, $mc \leq na$ et $mc \leq nb$. Inversement, supposons que $mc \leq na$ et $mc \leq nb$. Soit M une valeur de $a - c$.

Si $c \notin M$, il existe $N \in \underset{\sim}{M}(c)$ tel que $N \supseteq M$. Si $N \neq M$, on a $N+c = N+a > N$, car $M \in \underset{\sim}{M}(a-c)$. Il en résulte que $N \in \underset{\sim}{M}(a)$ et, puisque a et b sont quasi-disjoints, on a $b \in N$. Il s'en suit que $N = N + nb \geq N + mc > N + c > N$; ce qui est impossible. Si $N = M$, $M \in \underset{\sim}{M}(c)$, et tout sous-groupe c. f. K de G, qui contient M strictement, contient c et $a - c$; d'où $a \in K$. Si $a \in M$, on a $M = M + na \geq M + mc$, où $M \in \underset{\sim}{M}(c)$. D'après la propriété 1.6 de [7], $M + c$ est comparable avec M. Alors, $M \geq M + mc$ exige que $M + a = M > M + c$ et $M + (a - c) > M$. Si $a \notin M$, alors M est une valeur de a, et $b \in M$; ceci entraîne $M = M + nb \geq M + mc$. De nouveau, la propriété 1.6 de [7] entraîne $M > M+c$; d'où $M + a \geq M > M + c$ et $M + (a - c) > M$. D'autre part, $c \in M$ entraîne $(a - c) + M = a + M \geq M$. Il s'en suit que $M + (a - c) > M$ pour toute valeur M de $a - c$. La propriété 1.5 de [7] entraîne $a \geq c$. De même, on démontre que $b \geq c$; d'où la proposition.

Soient G un groupe ordonné, et D un sous-demi-groupe convexe de G^+ tel que $0 \in D$. Soit $[D]$ l'ensemble de toutes les sommes finies d'éléments de D et $-D$. Nous allons démontrer le théorème suivant qui généralise un résultat bien connu dans la théorie des groupes réticulés ([2], p. 20) :

THÉORÈME 2.3. - _Soit_ G _un groupe ordonné. Alors, l'application_ Φ, _définie par_ $D \longmapsto [D]$, _est un_ 0-_isomorphisme de l'ensemble des sous-demi-groupes convexes_ D _de_ G^+ _tels que_ $0 \in D$ _ordonnés par inclusion dans l'ensemble des sous-groupes c. f. de_ G. _De plus, l'application inverse_ Ψ _est définie par_ $N \longmapsto N^+ = N \cap G^+$.

Démonstration. - Soit D un sous-demi-groupe convexe de G^+, où $0 \in D$. Posons $N = [D]$. Il est évident que N est un sous-groupe filtrant de G. Démontrons qu'il est convexe. En effet, soit g un élément de G tel que $n_1 \leq g \leq n_2$ où $n_1, n_2 \in N$. Par définition, n_1 et n_2 sont des sommes finies d'éléments de D et $-D$. Soit n_1^- (et n_2^+) la somme de tous les éléments de $-D$ (de D) qui apparaissent dans la somme n_1 (n_2). On a $-(n_1^-)$, $n_2^+ \in D$ et, par isotonie, $n_1^- \leq g \leq n_2^+$. On en déduit que $0 \leq g - (n_1^-) \leq n_2^+ - (n_1^-)$ où $n_2^+ - (n_1^-) \in D$. Puisque D est convexe, $g - (n_1^-) \in D$. D'autre part, $n_1^- \in -D$; d'où

$$g = [g - (n_1^-)] + n_1^- \in [D] = N$$

et N est un sous-groupe c. f. de G. De plus, $G^+ \cap [D] = D$, car D est convexe et, pour tout g de $G^+ \cap [D]$, $0 \leq g \leq g^+ \in D$ où g^+ est la somme des éléments de D qui apparaissent dans la somme g. Donc $\Psi.\Phi$ est l'application identique. Inversement, si K est un sous-groupe c. f. de G, il est clair que $D = G^+ \cap K$ est un sous-demi-groupe convexe de G^+ et que $0 \in D$. Puisque K est filtrant, on a $[G^+ \cap K] = K$; d'où $\Phi.\Psi$ est l'application identique. Que Φ et Ψ préservent l'ordre par inclusion est évident ; d'où le théorème.

Soient G un groupe quasi-réticulé et a et b quasi-disjoints dans G. Appelons K l'ensemble de tous les éléments x de G tels que $0 \leq x \leq a, b$. De plus, appelons $H(a, b)$ l'intersection de toutes les valeurs dans G qui contiennent K . D'après les propriétés 1.2 et 1.8 de [7], $H(a , b)$ est le plus petit sous-groupe c. f. de G qui contient K . Le lemme suivant caractérise ces sous-groupes c. f. $H(a , b)$ de G :

LEMME 2.4. - Soient G un groupe quasi-réticulé, a et b quasi-disjoints dans G , $K = \{x \in G ; 0 \leqslant x \leqslant a , b\}$. Alors, $H(a , b) = [K]$.

Démonstration. - D'après le théorème 2.3, il suffit de démontrer que K est un sous-demi-groupe convexe de G^+ qui contient zéro. La proposition 2.2 implique que K est un demi-groupe. En effet, $(0 \leqslant x , y \leqslant a , b)$ entraîne $(0 \leqslant x+y \leqslant 2a,2b$ et $0 \leqslant x + y \leqslant a , b)$. De plus, il est évident que K est convexe et $0 \in K$; d'où le lemme.

Nous allons utiliser ce dernier lemme pour démontrer la proposition suivante qui généralise un résultat de CONRAD et TELLER ([3], p. 227, proposition 3.1) :

PROPOSITION 2.5. - Soient G un groupe quasi-réticulé et $g = a - b$ avec a et b quasi-disjoints. Alors, pour n de $\underset{\sim}{N}$ et $0 \leqslant x , y$ de G :

(a) $G(g) = G(a + b) = G(a) \vee G(b) = G(ng)$;

(b) $G(a) \cap G(b) = H(a , b) = H(na , nb)$;

(c) x et y quasi-disjoints si, et seulement si, x et y majorent tout élément de $G(x) \cap G(y)$.

Démonstration.

(a) Soit N une valeur dans G . D'après la propriété 1.3 de [7], g appartient à N si, et seulement si, a et b appartiennent à N . Par convexité, $a + b$ appartient à N si, et seulement si, a et b appartiennent à N . Puisque $G(g)$ est défini comme l'intersection de toutes les valeurs dans G qui contiennent g , on en déduit que

$$G(g) = G(a + b) = G(a) \vee G(b)$$

où $G(a) \vee G(b)$ est défini comme l'intersection de toutes les valeurs dans G qui contiennent $G(a)$ et $G(b)$ (d'où le sup dans le treillis des sous-groupes c. f. de G). D'autre part, le lemme 2.1 entraîne $\underset{\sim}{M}(g) = \underset{\sim}{M}(ng)$; d'où $G(g) = G(ng)$ et la condition (a).

(b) D'après la propriété 1.4 de [7], pour un élément positif a de G ,

$$G(a) = \{g \in G ; ma \leqslant g \leqslant na \text{ où } m , n \in \underset{\sim}{Z}\}$$

est le sous-groupe c. f. de G engendré par a . Appelons A (et B) l'ensemble des éléments x de G tels que $0 \leqslant x \leqslant na$ $(0 \leqslant x \leqslant nb)$ où $n \in \underset{\sim}{N}$. D'après le théorème 2.3, on a $[A] = G(a)$ et $[B] = G(b)$. Supposons, de plus, a et b quasi-disjoints alors, la proposition 2.2 entraîne $K = A \cap B$ et, d'après le lemme 2.4, $H(a , b) = [K] = [A \cap B]$. Puisque $G^+ \cap [A] \cap [B] = A \cap B$, on en déduit que

$$H(a\ ,\ b) = [A \cap B] = [[A] \cap [B]] = [G(a) \cap G(b)] = G(a) \cap G(b)\ .$$

D'autre part, le lemme 2.1 entraîne que $G(a) = G(na)$, $G(b) = G(nb)$ et, de plus, a et b sont quasi-disjoints si, et seulement si, na et nb sont quasi-disjoints. D'après ce qui précède,

$$H(na\ ,\ nb) = G(na) \cap G(nb) = G(a) \cap G(b) = H(a\ ,\ b)\ ;$$

d'où la condition (b).

(c) Supposons x et y quasi-disjoints. Compte tenu de la proposition 2.2 et du fait que $G(x) \cap G(y) = H(x\ ,\ y)$, il est évident que x et y majorent tout élément de $G(x) \cap G(y)$. Inversement, supposons que x et y majorent tout élément de $G(x) \cap G(y)$. Soit z un élément quelconque de G majoré par x et y . Il existe c , d de G tels que $z = c - d$ et c et d quasi-disjoints. Soit M une valeur dans G telle que $x \in M$. Si $c \notin M$, il existe $N \in \underset{\sim}{M}(c)$ tel que $N \supseteq M$. D'après le lemme 1.1 de [8], il existe une valeur N' de x telle que $N' \supseteq N$. Ceci entraîne $N' \supseteq M$ où $x \in M$; ce qui est impossible. Il en résulte que $x \in M$ implique $c \in M$ pour tout $M \in \underset{\sim}{M}(G)$. De même, $y \in M$ implique $c \in M$. On en déduit que $c \in G(x) \cap G(y)$ et $nc \in G(x) \cap G(y)$; d'où, par hypothèse, $nz < nc < x\ ,\ y$. D'après le théorème 1.1 de [7], on a x et y quasi-disjoints. Nous avons donc la condition (c) et la proposition.

Le théorème suivant, avec une démonstration directe, est dû à Alain BIGARD :

THÉORÈME 2.6. - Tout groupe quasi-réticulé G est un groupe de Riesz.

Démonstration. - Puisque tout groupe quasi-réticulé G est filtrant (voir [7], propriété 1.7), il suffit de démontrer que G vérifie la condition d'interpolation de Riesz. Sans perte de généralité, soient $0\ ,\ g \lesssim x\ ,\ y$ où $g = a - b$ et a et b quasi-disjoints ; alors,

$$-a\ ,\ -b \lesssim -a + x\ ,\ -a + y \quad \text{et} \quad -x + a\ ,\ -y + a \lesssim a\ ,\ b\ .$$

Supposons que $-x + a = c - d$ et $-y + a = e - f$ avec c et d , e et f quasi-disjoints. D'après le même raisonnement que dans la partie (c) de la démonstration de la proposition 2.5, on a $c\ ,\ e \in G(a) \cap G(b) = H(a\ ,\ b)$; d'où $-x + a\ ,\ -y + a \lesssim c + e \lesssim a\ ,\ b$. On en déduit $-a\ ,\ -b \lesssim -e - c \lesssim -a+y\ ,\ -a+x$ et $0\ ,\ g \lesssim a - e - c \lesssim y\ ,\ x$; ce qu'il fallait démontrer.

Nous utiliserons le lemme suivant pour démontrer la dernière proposition de cette partie :

LEMME 2.7. - Soient G un groupe quasi-réticulé, a et b quasi-disjoints, et $m \in H(a\ ,\ b)$. Alors,

$$\underset{\sim}{M}(a) = \underset{\sim}{M}(a + m) = \underset{\sim}{M}(m + a) \quad \text{et} \quad \underset{\sim}{M}(b) = \underset{\sim}{M}(b + m) = \underset{\sim}{M}(m + b)\ .$$

Démonstration. - Soient $m \in H(a\ ,\ b)$, et $0 \lesssim m$; d'après la proposition 2.2, $0 \lesssim m \lesssim a\ ,\ b$; d'où $0 \lesssim -m + a \lesssim a$ et $0 \lesssim -m + b \lesssim b$. Soit M une valeur de $-m+a$; alors $a \notin M$, et il existe $N \in \underset{\sim}{M}(a)$ tel que $M \subseteq N$ et $b \in N$. Si $M \subset N$, $-m+a$ appartient à N . Puisque $0 \leqslant m \leqslant b \in N$, m appartient aussi à N . On en déduit que $a = m + (-m+a) \in N$; ce qui est absurde. Il s'en suit que $M = N$ et $\underset{\sim}{M}(-m+a) \subseteq \underset{\sim}{M}(a)$. Pour démontrer l'inclusion inverse, soit M une valeur de a . Alors, $b \in M$ et, par convexité, $m \in M$. Il en résulte que M est une valeur de $-m+a$, et $\underset{\sim}{M}(a) = \underset{\sim}{M}(-m+a)$. De la même façon, on démontre que $\underset{\sim}{M}(a) = \underset{\sim}{M}(a-m)$. D'autre part, pour une valeur quelconque N dans G , $0 \leqslant m \leqslant a \leqslant m+a$, $a+m$ entraîne que $a \in N$ si, et seulement si, $m+a \in N$ ou $a+m \in N$; d'où $\underset{\sim}{M}(a) = \underset{\sim}{M}(a+m) = \underset{\sim}{M}(m+a)$.

Supposons maintenant que m soit un élément quelconque de $H(a\ ,\ b)$. D'après le lemme 2.4 et la proposition 2.2, il existe m_1 , $m_2 \in H(a\ ,\ b)$ tels que

$$m_1 \leqslant 0\ ,\quad m_1 \leqslant m\ ,\quad 0 \leqslant m_2 \leqslant a \quad \text{et} \quad m \leqslant m_2 \leqslant b\ .$$

Alors, $0 \leqslant a + m_1 \leqslant a + m \leqslant a + m_2$. D'après le même raisonnement que dans le paragraphe **précédent**,

$$\underset{\sim}{M}(a + m_1) = \underset{\sim}{M}(a) = \underset{\sim}{M}(a + m_2)\ ;$$

d'où, par convexité, $\underset{\sim}{M}(a) = \underset{\sim}{M}(a+m)$. On démontre de la même façon que

$$\underset{\sim}{M}(a) = \underset{\sim}{M}(m + a)\ .$$

Puisque tous ces arguments sont s**ym**étriques par rapport à a et b , on a

$$\underset{\sim}{M}(b) = \underset{\sim}{M}(m + b) = \underset{\sim}{M}(b + m)$$

et le lemme.

LEMME 2.8. - Soit G un groupe quasi-réticulé et a et b quasi-disjoints dans G . Alors, $(a+m)$ et $(b+m)$ sont quasi-disjoints si, et seulement si, $m \in H(a\ ,\ b)$.

Démonstration. - D'après le lemme précédent, l'implication est évidente dans un sens. Or supposons $(a+m)$ et $(b+m)$ quasi-disjoints ; alors, $-m \leqslant a$ et $-m \leqslant b$. Il existe c , d de G tels que $-m = c - d$, et c et d quasi-disjoints. Par le même raisonnement que nous avons fait pour démontrer la condition (c) de la proposition 2.5, on obtient $c \in G(a) \cap G(b) = H(a\ ,\ b)$. D'autre part, le lemme 1.2 de [8] entraîne $\underset{\sim}{M}(a) = \underset{\sim}{M}(a+m)$, car $a - b = a + m - (b+m)$ avec a et b , $(a+m)$ et $(b+m)$ quasi-disjoints. On en déduit que si une valeur quelconque N dans G contient a , elle contient aussi c et $a{+}m = a{+}d{-}c$; d'où elle contient d . De même, $b \in N$ entraîne $d \in N$. Comme nous venons de voir, ceci implique $d \in G(a) \cap G(b) = H(a\ ,\ b)$; d'où $m = d - c \in H(a\ ,\ b)$ et le lemme.

PROPOSITION 2.9. - Soient G un groupe quasi-réticulé, et M un sous-groupe quelconque de G qui satisfait à la condition (1) suivante :

(1) (x et y quasi-disjoints) implique ($x \in M$ ou $y \in M$) . Alors, (a et

b quasi-disjoints) entraîne $(H(a\ ,\ b) \subseteq M)$.

Démonstration. - Soit $a \in M$. Raisonnons par l'absurde ; supposons qu'il existe h de $H(a\ ,\ b)$ tel que $0 \leqslant h$ et $h \notin M$. Alors, $-h+a \notin M$ et $a+h \notin M$. D'après le lemme 2.7, $-h+b\ ,\ b+h \in M$; d'où $2b \in M$. D'autre part, $a \in M$ entraîne $2a \in M$ et $2a+h \notin M$. Le lemme 2.1 implique $2a$ et $2b$ quasi-disjoints, et la condition (b) de la proposition 2.5 implique $h \in H(2a\ ,\ 2b)$; d'où $(2a+h)$ et $(2b+h)$ quasi-disjoints, cf. lemme 2.8. Compte tenu de ceci et du fait que $2a+h \notin M$, on a $2b+h \in M$. Puisque $2b \in M$, on obtient la contradiction $h \in M$. De même pour $b \in M$; d'où la proposition.

Troisième partie

Nous procédons directement à la démonstration du théorème suivant :

THÉORÈME 3.1. - Soient G un groupe quasi-réticulé, $\mathbb{S}(G)$ le treillis de tous les sous-groupes de G , $\mathcal{C}(G)$ l'ensemble de tous les sous-groupes c. f. de G , et A , $\{B_\gamma\ ;\ \gamma \in \Gamma\}$ des éléments de $\mathcal{C}(G)$. Alors, $\mathcal{C}(G)$ est un treillis complet et distributif et un sous-treillis de $\mathbb{S}(G)$ tel que

$$A \wedge (\bigvee \{B_\gamma\ ;\ \gamma \in \Gamma\}) = \bigvee \{A \wedge B_\gamma\ ;\ \gamma \in \Gamma\} .$$

De plus, tous les $\wedge$ et les $\vee$ dans $\mathcal{C}(G)$ sont des $\wedge$ et des $\vee$ dans $\mathbb{S}(G)$ pour les mêmes éléments.

Démonstration. - La première partie de ce théorème a été démontrée par L. FUCHS ([4], p. 160, Satz 42) pour les 0-idéaux d'un groupe de Riesz. Mais en réalité, il a démontré ce résultat pour l'ensemble des sous-groupes c. f. d'un groupe de Riesz. Puisque G est un groupe de Riesz (théorème 2.6), nous avons la première partie de notre théorème. D'autre part, la propriété 1.8 de [7] entraîne $\bigcap\{B_\gamma\ ;\ \gamma \in \Gamma\} \in \mathcal{C}(G)$; d'où

$$\bigwedge\{B_\gamma\ ;\ \gamma \in \Gamma\} = \bigcap \{B_\gamma\ ;\ \gamma \in \Gamma\}$$

dans $\mathcal{C}(G)$ et dans $\mathbb{S}(G)$; c'est-à-dire les $\wedge$ dans $\mathcal{C}(G)$ sont des $\wedge$ dans $\mathbb{S}(G)$ pour les mêmes éléments. De la même façon que dans un groupe de Riesz,

$$\bigvee \{B_\gamma\ ;\ \gamma \in \Gamma\} = [\bigcup \{B_\gamma^+\ ;\ \gamma \in \Gamma\}]$$

dans $\mathcal{C}(G)$ et dans $\mathbb{S}(G)$; d'où le théorème.

PROPOSITION 3.2. - Soient G un groupe quasi-réticulé, et M un sous-groupe quelconque de G . Alors, il existe un plus grand sous-groupe c. f. N de G tel que $N \subseteq M$.

Démonstration. - Si $M \in \mathcal{C}(G)$, il n'y a rien à démontrer. Supposons que $M \notin \mathcal{C}(G)$, et soit $\{N_i\ ;\ i \in I\}$ la famille de tous les sous-groupes c. f. de G contenus dans M. Alors, le sous-groupe N de G, engendré par tous les éléments de la réunion ensembliste $\cup \{N_i \; ; \; i \in I\}$, est contenu dans M. Puisque N est la borne supérieure de $\{N_i \; ; \; i \in I\}$ dans $\mathcal{S}(G)$, le théorème 3.1 exige que N soit la borne supérieure de $\{N_i \; ; \; i \in I\}$ dans $\mathcal{C}(G)$, et $N \in \mathcal{C}(G)$. On en déduit que $N \subseteq M$, et que N est le plus grand sous-groupe c. f. de G contenu dans M.

Cette démonstration est analogue à celle de JAKUBÍK ([5], lemma 2, p. 110).

Le théorème suivant **est** nécessaire pour démontrer le résultat central de cette partie :

THÉORÈME 3.3. - Soient G un groupe $*$-quasi-réticulé, N un sous-groupe c. f. de G, et H le sous-groupe c. f. de G engendré par la famille

$$\{H(x \, , \, y) \; ; \; x \text{ et } y \text{ quasi-disjoints}\} .$$

Alors, les trois conditions suivantes sont équivalentes :

(I) $H \subseteq N$;

(II) (x et y quasi-disjoints) entraîne ($N = (N + x) \wedge (N + y)$ dans $\mathcal{R}(N)$) ou ($N = (x + N) \wedge (y + N)$ dans $\mathcal{L}(N)$) ;

(III) $\mathcal{R}(N)$ [ou $\mathcal{L}(N)$] est un treillis.

Démonstration. - (I) implique (II) : Pour a et b quasi-disjoints, on a $N \lesssim N + a \, , \, N + b$. Si $N < N + r \lesssim N + a \, , \, N + b$, il existe n_1, n_2 de N tels que $n_1 + r \lesssim a$ et $n_2 + r \lesssim b$. Puisque N est filtrant, on peut trouver n_3 de N tel que $n_3 + r \lesssim a \, , \, b$. D'après le théorème 2.6, il existe z de G tel que $0 \, , \, n_3 + r \lesssim z \lesssim a \, , \, b$. Or, $z \in H(a \, , \, b) \subseteq N$, par hypothèse ; alors, $N < N + r \lesssim N + z = N$, ce qui est absurde. Il en résulte que $N = (N+a) \wedge (N+b)$. De la même façon, on démontre $N = (a + N) \wedge (b + N)$; d'où (II) dans ses deux formes.

(II) implique (III) : Soient N et $N + g$ non comparables, et $N + v \lesssim N \, , \, N+g$. De plus, soit $g = a - b = - b + a$ avec a et b quasi-disjoints. Alors,

$$(N + v \lesssim N \, , \, N + a - b) \text{ entraîne } (N + v + b \lesssim N + b \, , \, N + a)$$

et, d'après (II),

$$N + v + b \lesssim N = (N + b) \wedge (N + a) .$$

On en déduit $N + v \lesssim N - b$. D'autre part, $(-b \lesssim a-b=g)$ donne $(N-b \lesssim N,N+g)$. Il en résulte que $N - b = N \wedge (N + g)$. Dualement, $(N \gtrsim N - b \, , \, N - a)$ et $(N - a \, , \, N - b \lesssim N + t \lesssim N)$ entraînent $(a + N \, , \, b + N \gtrsim - t + N \gtrsim N)$, et $t \in N$; d'où $N = (N - a) \vee (N - b)$. Or, $(N + g = N - b + a \, , \, N \lesssim N + r)$ entraîne $(N - b \, , \, N - a \lesssim N + r - a)$. Compte tenu de ce que nous venons de démontrer, $N \lesssim N + r - a$ et $N + a \lesssim N + r$. Puisque $N \, , \, N + g \lesssim N + a$, on a bien

$$N \vee (N + g) = N + a .$$

Maintenant, si $N + x$ et $N + y$ sont comparables, soit $g = x - y = a - b$ avec a et b quasi-disjoints, et $a + b = b + a$. D'après ce qui précède,

$$(N + x) \vee (N + y) = N + a + y \quad \text{et} \quad (N + x) \wedge (N + y) = N - b + y \ ;$$

d'où $\mathcal{R}(N)$ est bien un treillis. De la même façon, on démontre que $(N=(x+N)\wedge(y+N)$ pour tout x et y quasi-disjoints) entraîne ($\mathcal{L}(N)$ est un treillis).

(III) implique (I) : Cette partie de la démonstration montre en réalité que (III) implique (II) et que (II) implique (I). En effet, soient a et b quasi-disjoints et $N \leq N + w = (N + a) \wedge (N + b)$. Comme nous avons vu dans la partie [(I) implique (II)], il existe n_3 de N et z de G tels que $n_3 + w$, $0 \leq z \leq a$, b . Or, $z \in H(a , b)$ et $nz \leq a$, b pour tout n de $\underset{\sim}{N}$. Si $N < N + w$, on aurait $N + z = N + w > N$ et $N + a$, $N + b \geq N + 2z > N + z = (N + a) \wedge (N + b)$, qui est une contradiction. Il en résulte que $N = (N + a) \wedge (N + b)$. De plus, pour tout $0 \leq h$ $H(a , b)$, on a $N \leq N + h \leq N + a$, $N + b$, et ceci entraîne $N = N + h$. Puisque $H(a , b)$ est filtrant, $H(a , b) \subseteq N$ pour tout a et b quasi-disjoints d'où $H \subseteq N$. De même, ($\mathcal{L}(N)$ un treillis) entraîne $(H \subseteq N)$; d'où le théorème.

Dans les deux parties [(I) implique (II)] et [(III) implique (I)] , on n'utilise pas le fait que tout g de G s'écrit $g = a - b = - b + a$ pour une paire d'éléments telle que a et b quasi-disjoints. Donc nous avons le corollaire suivant.

COROLLAIRE 3.4. - _Soient_ G _un groupe quasi-réticulé,_ H _le sous-groupe c. f. de_ G _engendré par la famille_ $\{H(x , y)$; x _et_ y _quasi-disjoints_$\}$ _et_ N _un sous-groupe c. f. de_ G . _Alors,_ $H \subseteq N$ _si, et seulement si,_ (x _et_ y _quasi-disjoints_) _entraîne_ $(N = (N + x) \wedge (N + y))$ _ou_ $(N = (x + N) \wedge (y + N))$.

Définition. - Soient G un groupe quasi-réticulé, et N un sous-groupe c. f. de G . On dira que N est un _sous-groupe premier dans_ G s'il satisfait à la condition (a) :

(a) (x et y quasi-disjoints dans G) implique ($x \in N$ ou $y \in N$) .

Maintenant, nous allons démontrer le théorème qui généralise le résultat central de JAKUBÍK de [5] :

THÉORÈME 3.5. - _Soient_ G _un groupe quasi-réticulé, et_ M _un sous-groupe quelconque de_ G . _Alors,_ M _satisfait à la condition_ (a) _si, et seulement si, il contient un sous-groupe premier dans_ G . _De plus, si_ M _satisfait à la condition_ (a), _il satisfait à la condition_ (b) _suivante_ :

(b) _Les sous-groupes c. f. de_ G _contenant_ M _forment une chaîne_.

Démonstration. - La première implication est évidente dans un sens ; alors, nous supposons que M satisfait à la condition (a). D'après la proposition 3.2, il existe un plus grand sous-groupe c. f. N de G tel que $N \subseteq M$. Compte tenu de ceci et de la proposition 2.9, on a $H \subseteq N$, où H est le sous-groupe c. f. engendré par la famille $\{H(x , y) ; x$ et y quasi-disjoints$\}$. Soient a et b quasi-disjoints, il suffit de démontrer que $a \in N$ ou $b \in N$. Raisonnons par l'absurde ; supposons que $a \notin N$ et $b \notin N$. Si M contient tous les éléments a' [ou b'], où $0 \leq a' \leq ma$ $[0 \leq b' \leq mb]$ pour tout m de $\mathbb{N}$, alors $G(a) \subseteq M$ [ou $G(b) \subseteq M$]. Puisque N est le plus grand sous-groupe c. f. de G contenu dans M, on a $G(a) \subseteq N$ et $a \in N$ [ou $G(b) \subseteq N$ et $b \in N$] ; ce qui est impossible. Donc, il existe un a' et un b' de G et m, m' de $\mathbb{N}$ tels que $0 \leq a' \leq ma$ et $0 \leq b' \leq m' b$ et, de plus, $a' \notin M$ et $b' \notin M$.

Supposons qu'il existe w de G tel que $N + w \leq (N + a') , (N + b')$. Comme nous l'avons vu précédemment, il existe v de N et z de G tels que $v + w , 0 \leq z \leq a' , b'$; d'où $N + w \leq N + z$. Or, $0 \leq z \leq ma , m' b$ et, d'après la proposition 2.2, $0 \leq z \leq a , b$; c'est-à-dire $z \in H(a , b) \subseteq H \subseteq N$. On en déduit $N = (N + a') \wedge (N + b')$. Soit $a' - b' = x - y$ avec x et y quasi-disjoints.

Il existe m de G tel que $a' = x + m \geq m$; d'où $b' = y + m \geq m$. Alors,

$$N = (N + a') \wedge (N + b') = (N + x + m) \wedge (N + y + m) ;$$

ce qui entraîne

$$N - m = (N + x) \wedge (N + y) = N ,$$

d'après le corollaire 3.4 du théorème 3.3. En effet, $N - m \leq N + x , N + y$ et si $N + r \leq N + x , N + y$, on aurait

$$N + r + m \leq N + x + m , N + y + m \quad \text{et} \quad N + r + m \leq N = (N + x + m) \wedge (N + y + m) ;$$

d'où $N + r \leq N - m$. Il s'ensuit que $m \in N$ et $m \in M$. Puisque M satisfait à la condition (a), $x \in M$ ou $y \in M$. Si $x \in M$, $x + m = a' \in M$; ce qui contredit notre hypothèse. De même, $y \in M$ entraîne la contradiction $y + m = b' \in M$. Donc $a \in N$ ou $b \in N$, et N est un sous-groupe premier dans G.

Supposons, de nouveau, que M satisfait à la condition (a). D'après ce qui précède, N satisfait à la condition (a). Si les sous-groupes c. f. de G qui contiennent N ne forment pas une chaîne, il en existe deux P, P' tels qu'ils sont incomparables. Alors, on peut trouver deux éléments positifs x, y tels que $x \in P \setminus P'$ et $y \in P' \setminus P$. Soit $x - y = a - b$ avec a et b quasi-disjoints. D'après la condition (a), on a $a \in N$ ou $b \in N$; soit $b \in N$. Alors, $x - y + P = a + P \geq P$, car $P \supseteq N$. On en déduit que $P = P + x \geq P + y > P$; ce qui est impossible. De même, $a \in N$ entraîne la contradiction $P'=P'+y\geq P'+x>P'$. Il en résulte que P et P' sont comparables, et que les sous-groupes c. f. de G qui contiennent N forment une chaîne C. Il est évident que les sous-groupes c. f. de G, qui contiennent M, forment un sous-ensemble de C et, ainsi, une chaîne C' contenue dans C. D'où le théorème.

JAKUBÍK ([5], Example 2) donne un contre-exemple pour démontrer que les conditions (a) et (b) ne sont pas équivalentes pour un sous-groupe quelconque M d'un groupe quasi-réticulé abélien.

Dans la prochaine partie nous démontrerons un théorème analogue au théorème 3.5, mais pour le cas d'un sous-groupe c. f. d'un groupe quasi-réticulé.

Quatrième partie

Nous démontrons tout de suite la généralisation du théorème 3.5 dans le cas d'un groupe quasi-réticulé :

THÉORÈME 4.1. - *Soient* G *un groupe quasi-réticulé, et* N *un sous-groupe c. f. de* G *. Alors, les trois conditions suivantes sont équivalentes* :

(α) (a *et* b *quasi-disjoints dans* G) *entraîne* ($a \in N$ *ou* $b \in N$) ;

(β) *Les sous-groupes c. f. de* G *qui contiennent* N *forment une chaîne* ;

(γ) $\mathcal{R}(N)$ *et* $\mathcal{L}(N)$ *sont totalement ordonnés* ;

(δ) N *contient un sous-groupe premier dans* G .

Démonstration.

(α) *implique* (β) : La démonstration est exactement celle que nous avons faite dans la dernière partie de la démonstration du théorème 3.5.

(β) *implique* (γ) : Supposons que N satisfait à (β). Soit $x + N \neq N$, et $x=a-b$ avec a et b quasi-disjoints. Si $a \in N$ (ou $b \in N$) , on a $x + N < N$ (ou $x + N > N$) . Si $a \notin N$, $b \notin N$, il existe $M \in \underset{\sim}{M}(a) \subseteq \underset{\sim}{M}(x)$ et $M' \in \underset{\sim}{M}(b) \subseteq \underset{\sim}{M}(x)$ tels que $N \subseteq M$, M' . Puisque deux valeurs différentes d'un même élément ne sont jamais comparables, on obtient $M = M' \in \underset{\sim}{M}(a) \cap \underset{\sim}{M}(b) = \emptyset$; ce qui est absurde. Il en résulte que $\mathcal{L}(N)$ est totalement ordonné ; de même, $\mathcal{R}(N)$ est totalement ordonné.

(γ) *implique* (δ) : Supposons que N satisfait à (γ) et soient a et b quasi-disjoints. Par hypothèse, $a - b + N$ est comparable avec N , soit $a-b+N \geq N$; d'où $N + a \geq N + b \geq N$. Si $a \notin N$ et $b \notin N$, il existe $M \in \underset{\sim}{M}(b)$ tel que $M \supseteq N$ et $a \in M$. On en déduit que $M = M + a \geq M + b > M$; ce qui est impossible. Le cas $a - b + N \leq N$ entraîne une contradiction pareille ; d'où $a \in N$ ou $b \in N$.

(α) *et* (δ) *sont évidemment équivalents* ; d'où le théorème.

THÉORÈME 4.2. - *Soit* G *un groupe quasi-réticulé. Alors,* G *est un groupe réticulé si, et seulement si, toute valeur* M *dans* G *est un sous-groupe premier dans* G .

Démonstration. - La nécessité est un résultat bien connu de la théorie des groupes réticulés (voir [2], p. 28, remarque 3). Inversement, si toute valeur M dans G est un sous-groupe premier dans G , d'après le théorème précédent, $\mathcal{R}(M)$ et $\mathcal{L}(M)$

sont totalement ordonnés. Le théorème 2.2 de [7] entraîne que G est un groupe réticulé.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CONRAD (P.). - Representation of partially ordered abelian groups as groups of a real valued function, Acta Math., Uppsala, t. 116, 1966, p. 199-221.

[2] CONRAD (P.). - Introduction à la théorie des groupes réticulés. - Paris, Secrétariat mathématique, 1967.

[3] CONRAD (P.) and TELLER (J. R.). - Abelian pseudo lattice ordered groups, Publ. Math., Debrecen, t. 17, 1970, p. 223-241.

[4] FUCHS (L.). - Teilweise geordnete algebraische Strukturen. - Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht, 1966 (Studia Mathematica/ Mathematische Lehrbücher, 19).

[5] JAKUBÍK (J.). - On subgroups of a pseudo lattice ordered group, Pacific J. Math., t. 34, 1970, p. 109-115.

[6] TELLER (J. R.). - On abelian pseudo lattice ordered groups, Pacific J. Math., t. 27, 1968, p. 411-419.

[7] VAN METER (K. M.). - Introduction aux groupes quasi-réticulés (à paraître).

[8] VAN METER (K. M.). - Sur les groupes *-quasi-réticulés (à paraître).

Karl M. VAN METER
45 rue Linné
75005 PARIS