Thérèse Merlier

# Demi-groupes 0-simples et complètement 0-simples totalement ordonnés. Application aux demi-groupes de matrices de Rees

*Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres*, tome 25, n° 1 (1971-1972), exp. n° 2, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1971-1972__25_1_A2_0>

Séminaire DUBREIL
(Algèbre)
25e année, 1971/72, n° 2, 11 p. 

29 novembre 1971

# DEMI-GROUPES 0-SIMPLES ET COMPLÈTEMENT 0-SIMPLES TOTALEMENT ORDONNÉS. APPLICATION AUX DEMI-GROUPES DE MATRICES DE REES

par Thérèse MERLIER

Nous nous conformons à la terminologie et aux notations de A. H. CLIFFORD et G. B. PRESTON [1], et nous renvoyons le lecteur à cet ouvrage pour les définitions et propriétés, utilisées ici sans être rappelées. Nous dirons qu'un demi-groupe $S$ peut être totalement ordonné, si l'on peut définir sur $S$ une relation d'ordre total $\leqslant$, isotone, c'est-à-dire telle que

$$a \leqslant b \rightarrow xa \leqslant xb \ , \quad ax \leqslant bx \quad \text{pour tout } x \text{ de } S \ .$$

Le zéro d'un demi-groupe sera toujours noté $0$ ; par idéal d'un demi-groupe, nous entendons idéal bilatère.

Nous allons donner ici la structure algébrique des demi-groupes complètement 0-simples totalement ordonnés ; T. SAITÔ, dans [2], avait donné la structure des demi-groupes complètement simples (sans zéro). Nous donnerons également la représentation des demi-groupes complètement 0-simples totalement ordonnés, par des matrices de Rees. Cela nous permettra de donner, dans le dernier paragraphe, une condition nécessaire et suffisante pour qu'un demi-groupe de matrices de Rees puisse être totalement ordonné.

## 1. Demi-groupes 0-simples totalement ordonnés.

DÉFINITION 1. - *Un demi-groupe* $S$ *avec zéro est* 0-*simple* [0-*simple à gauche*, 0-*simple à droite*], *si* $S^2$ *est différent de* $0$ , *et si* $S$ *n'admet aucun idéal propre* [*aucun idéal à gauche propre*, *aucun idéal à droite propre*], *c'est-à-dire distinct de* $0$ *et de* $S$ .

DÉFINITION 1'. - *Un demi-groupe* $S$ *sans zéro est simple* [*simple à gauche*, *simple à droite*], *si* $S$ *n'admet aucun idéal propre* [*idéal à gauche propre*, *idéal à droite propre*], *c'est-à-dire distinct de* $\emptyset$ *et de* $S$ .

PROPOSITION 1 (lemme 2. 28 de [1]). - *Un demi-groupe* $S$ *est simple* [0-*simple*], *si, et seulement si*,

$$\forall\, a \in S \ , \ [a \neq 0] \ , \ S\, a\, S = S \ .$$

*Un demi-groupe* $S$ *est simple à gauche* [0-*simple à gauche*], *si, et seulement si*,

$$\forall\, a \in S \ , \ [a \neq 0] \ , \ Sa = S \ .$$

Si $S$ est un demi-groupe 0-simple à gauche, on démontre facilement (théorème 2.27 de [1]) que $S - \{0\}$ est aussi un demi-groupe, simple à gauche. Par contre, un demi-groupe peut être 0-simple, sans que $S - \{0\}$ soit un demi-groupe. Dans le cas totalement ordonné, nous allons voir qu'il n'en est plus de même.

PROPOSITION 2. - Dans un demi-groupe $S$, 0-simple, totalement ordonné, $0$ est élément maximum ou minimum.

On a

$$S = S_1 \cup S_2 \cup \{0\} \text{ , avec } S_1 = \{x \in S \; ; \; x < 0\} \text{ , } S_2 = \{x \in S \; ; \; 0 < x\} \text{ ,}$$

et il en résulte immédiatement par isotonie que $S_i^2$ est contenu dans $S_i \cup \{0\}$ pour $i = 1$, $2$, et que $S_1 S_2 = S_2 S_1 = \{0\}$. Par suite, si $a$ est un élément de $S$, différent de $0$, on a, par exemple, si $a$ appartient à $S_2$, $aS_1 = S_1 a = 0$ et alors, comme $S$ est supposé 0-simple,

$$S = S a S = S_2 a S_2 \cup \{0\} \leqslant S_2 \cup \{0\} \text{ .}$$

Donc $S = S_2 \cup \{0\}$, $S_1$ est vide, et $0$ est élément maximum.

Ainsi, dans tous les cas, deux éléments quelconques non nuls sont d'un même côté de $0$, et par suite, si leur produit est nul, le carré de l'un d'eux est nul.

$$(a \leqslant b \leqslant 0) \text{ implique, par isotonie, } (a^2 \leqslant ab \leqslant b^2 \leqslant 0) \text{ ,}$$

et si $ab = 0$, $b^2 = 0$.

THÉORÈME 1. - Si un demi-groupe $S$, 0-simple, peut être totalement ordonné, $S - \{0\}$ est un demi-groupe simple.

Il suffit de montrer que $S$ n'admet pas de diviseurs de $0$. Supposons que $S$ est totalement ordonné par $\leqslant$. Considérons dans $S$, l'ensemble

$$I = \{x \in S \; ; \; x^2 = 0\} \text{ .}$$

$I$ ne peut être égal à $S$, car alors $S$ serait un zéro-demi-groupe $(S^2 = 0)$, puisque tout produit $xy$ est compris entre $x^2$ et $y^2$ dans un demi-groupe totalement ordonné. Mais $I$ est un idéal : si $a$ et $b$ sont deux éléments quelconques de $S$, on a $ab$ et $ba$ étant comparables,

$$a^2 b^2 \leqslant (ab)^2 \leqslant (ba)^2 \leqslant b^2 a^2 \quad \text{ou} \quad b^2 a^2 \leqslant (ba)^2 \leqslant (ab)^2 \leqslant a^2 b^2 \text{ ;}$$

donc si $a^2 = 0$, $a^2 b^2 = b^2 a^2 = 0$ et $(ab)^2 = (ba)^2 = 0$ dans tous les cas, et ainsi, $I$ est idéal de $S$, distinct de $S$, donc $I = \{0\}$ puisque $S$ est 0-simple. Par suite, aucun produit $ab$, où $a \neq 0$ et $b \neq 0$, ne peut être nul d'après la remarque faite précédemment. Il en résulte que $S - \{0\}$ est un demi-groupe évidemment simple.

## 2. Demi-groupes complètement simples et complètement 0-simples.

Nous rappelons, dans ce paragraphe, les principales définitions et propriétés des demi-groupes complètement 0-simples. Pour les démonstrations, nous renvoyons à [1], principalement aux chapitres 2 et 3.

(a) Définitions.

DÉFINITION 2. - Un demi-groupe 0-simple [simple] est dit "complètement 0-simple" [complètement simple], s'il admet au moins un idéal à gauche 0-minimal [minimal] et au moins un idéal à droite 0-minimal [minimal].

PROPOSITION 3. - Un demi-groupe S complètement 0-simple est régulier

$$\forall a \in S , \quad a \neq 0 , \quad \exists x \in S , \quad a = a x a .$$

PROPOSITION 4. - Dans un demi-groupe complètement 0-simple, l'ensemble des idempotents $[\neq 0]$ n'est pas vide, et si e et f sont deux idempotents, tels que $ef = fe \neq 0$ , alors $e = f$ .

Rappelons les définitions des équivalences de Green dans un demi-groupe S : $\mathcal{L}_S$ , $\mathcal{R}_S$ , $\mathcal{D}_S$ , $\mathcal{H}_S$ .

$(a \equiv b \ (\mathcal{L}_S)) \Longleftrightarrow$ (a et b engendrent le même idéal à gauche) $\Longleftrightarrow (S^1 a = S^1 b)$ .

$(a \equiv b \ (\mathcal{R}_S)) \Longleftrightarrow$ (a et b engendrent le même idéal à droite) $\Longleftrightarrow (aS^1 = bS^1)$ .

$\mathcal{H}_S = \mathcal{L}_S \cap \mathcal{R}_S$ et $\mathcal{D}_S = \mathcal{L}_S \circ \mathcal{R}_S = \mathcal{R}_S \circ \mathcal{L}_S$ .

PROPOSITION 5. - Si S est un demi-groupe complètement simple (sans zéro), $\mathcal{D}_S$ est l'équivalence universelle (S est bisimple), et toutes les $\mathcal{H}_S$ classes sont des groupes, sous-demi-groupes de S , isomorphes entre eux.

PROPOSITION 6. - Si S est un demi-groupe simple à gauche, ayant des idempotents, S est isomorphe au produit direct d'un zéro-demi-groupe à gauche, E , par un groupe G .

De plus, E représente, dans cette décomposition, le demi-groupe des idempotents de S , et G est un groupe, sous-demi-groupe de S .

Comme le produit direct de deux demi-groupes complètement simples est complètement simple, un demi-groupe simple à gauche (ou à droite) ayant des idempotents est complètement simple.

(b) Matrices de Rees sur un groupe avec zéro.

Soient G un groupe (multiplicatif) avec zéro, noté $G^0$ , et X , Y , deux ensembles quelconques. On peut définir des matrices $(a_{i,j})$ de $X \times Y$ sur $G^0$ , où $a_{i,j} \in G^0$ , $(i , j) \in X \times Y$ , grâce aux conventions suivantes :

$$\textstyle\sum_{i\in X} a_{i,j} = 0 \quad \text{si} \quad a_{i,j} = 0 \quad \text{pour tout } i \text{ de } X ,$$

$$\textstyle\sum_{i\in X} a_{i,j} = a_{i^*,j} \quad \text{si} \quad a_{i,j^*} = 0 \quad \text{pour tout } i \text{ de } X , \text{ sauf } i = i^* .$$

S'il existe $i_1$ et $i_2$ de X tels que $a_{i_1,j}$ , $a_{i_2,j}$ sont non nuls, $\sum_{i\in X} a_{i,j}$ n'est pas défini.

On peut alors définir le produit de deux matrices $A = (a_{i,j})$ , matrice de $X \times Y$

sur $G^0$ , par $B = (b_{j,k})$ matrice de $Y \times Z$ sur $G^0$ par

$$C = AB = (c_{i,k}) \text{ , où } c_{i,k} = \sum_{j \in Y} a_{i,j}\, b_{j,k} \text{ ,}$$

si $c_{i,k}$ existe, c'est-à-dire si $c_{i,k}$ est une somme de termes tous nuls, sauf un au plus. En particulier, si l'une des matrices a au plus un élément non nul, le produit est défini.

DÉFINITION 3. - Une matrice de Rees est une matrice ayant au plus un élément distinct de $0$ .

La matrice de Rees de $I \times \Lambda$ sur le groupe avec zéro $G^0$ , ayant pour élément non nul l'élément $a$ , situé à l'intersection de la i-ième ligne et de la $\lambda$-ième colonne est notée $(a)_{i\lambda}$ . La matrice nulle peut se noter $(0)_{i\lambda}$ , où $i$ et $\lambda$ sont arbitraires.

On définit dans l'ensemble des matrices de Rees une opération notée $\circ$ , par l'intermédiaire d'une matrice $P$ de $\Lambda \times I$ sur $G^0$ , $P = (p_{\lambda i})$

$$(a)_{i\lambda} \circ (b)_{j\mu} = (a)_{i\lambda}\, P (b)_{j\mu} \text{ ,}$$

où dans le membre de droite la multiplication des matrices est la multiplication au sens ordinaire.

On vérifie facilement que :

(1) $$(a)_{i\lambda} \circ (b)_{j\mu} = (a p_{\lambda j}\, b)_{i\mu} \text{ ,}$$

et que l'ensemble des matrices de Rees, muni du produit $\circ$ , est un demi-groupe. $P$ est appelée "matrice-sandwich". Ainsi, si $G^0$ , $\Lambda$ , $I$ sont donnés, à toute matrice-sandwich $P$ correspond un demi-groupe de matrices de Rees, noté

$$\mathfrak{M}^0(G \; ; \; I \; , \; \Lambda \; ; \; P) \text{ .}$$

Deux matrices $P$ et $P'$ peuvent déterminer des demi-groupes $\mathfrak{M}^0(G ; I , \Lambda ; P)$ et $\mathfrak{M}^0(G ; I , \Lambda ; P')$ isomorphes. On a d'ailleurs la proposition suivante.

PROPOSITION 7. - Tout demi-groupe $\mathfrak{M}^0(G ; I , \Lambda ; P)$ est isomorphe à

$$\mathfrak{M}^0(G \; ; \; I \; , \; \Lambda \; ; \; P') \text{ ,}$$

où $P'$ est une matrice normalisée, c'est-à-dire dont les éléments d'une ligne donnée et d'une colonne donnée sont égaux ou à zéro, ou à l'élément neutre $e$ de $G$ .

(c) Représentation des demi-groupes complètement 0-simples par des demi-groupes de matrices de Rees.

DÉFINITION 4. - Une matrice $P$ sur un groupe avec zéro $G^0$ est régulière, si chaque ligne et chaque colonne contient au moins un élément non nul.

Dans ce cas, et seulement dans ce cas, le demi-groupe de matrices de Rees $\mathfrak{M}^0(G ; I , \Lambda ; P)$ est régulier. Nous avons alors un théorème.

THÉORÈME DE REES. - Un demi-groupe $S$ est complètement 0-simple, si, et seulement si, il est isomorphe à un demi-groupe régulier de matrices de Rees,

$$\mathcal{M}^0(G ; I , \Lambda ; P) .$$

De plus, dans l'isomorphisme précédent, $G$ est isomorphe à un sous-groupe de $S$.

Remarque 1. - De la formule (1) résulte qu'un demi-groupe de matrices de Rees $\mathcal{M}^0(G ; I , \Lambda ; P)$ a un zéro formellement adjoint si, et seulement si, la matrice-sandwich $P$ n'a aucun élément nul.

3. Demi-groupes complètement simples, complètement 0-simples, totalement ordonnés.

Puisqu'un demi-groupe $S$ complètement 0-simple est en particulier 0-simple, s'il est totalement ordonné, il a son zéro formellement adjoint. Considérons donc tout d'abord le résultat suivant.

(a) Demi-groupes complètement simples totalement ordonnés (D'après T. SAITÔ. § 2 et § 3 de [2]).

LEMME. - Soit $S$ un tel demi-groupe. L'ensemble $E$ des idempotents de $S$ est un zéro-demi-groupe d'un côté.

Nous savons que dans un demi-groupe totalement ordonné, l'ensemble des idempotents, s'il n'est pas vide, est un demi-groupe (donc une bande) [3]. Puisque $S$ est complètement simple, il est bisimple (proposition 5) ; donc si $e$ et $f$ appartiennent à $E$, il existe $x \in S$ tel que

$$e \equiv x \quad (\mathcal{R}_S) \quad \text{et} \quad x \equiv f \quad (\mathcal{L}_S) .$$

Mais $x$ appartient à une $\mathcal{H}_S$-classe, qui est un groupe d'élément unité $g$ (proposition 5), et par suite, il existe $g \in E$ tel que

$$e \equiv g \quad (\mathcal{R}_S) \quad \text{et} \quad g \equiv f \quad (\mathcal{L}_S) \text{ , donc } \quad e \equiv f \quad (\mathcal{D}_E) .$$

Comme dans une bande totalement ordonnée [3], toute $\mathcal{D}$-classe est une $\mathcal{R}$ ou $\mathcal{L}$-classe, $E$ est par exemple une $\mathcal{L}$-classe, et $E$ est un zéro-demi-groupe à gauche.

THÉORÈME 2. - Un demi-groupe complètement simple $S$ peut être totalement ordonné si, et seulement si, $S$ est isomorphe au produit direct d'un zéro-demi-groupe d'un côté par un groupe, pouvant être totalement ordonné.

Condition nécessaire. - Si $S$ est totalement ordonné, et si $E$ est l'ensemble des idempotents de $S$, on peut supposer, d'après le lemme précédent, que $E$ est un zéro-demi-groupe à gauche, par exemple. Dans ce cas,

$$\forall e , f \in E , \qquad e \equiv f \quad (\mathcal{L}_S) .$$

Donc si $a$ et $b$ sont deux éléments quelconques de $S$, en désignant par $e$ et $f$ les éléments unités des $\mathcal{H}$-classes auxquelles ils appartiennent, on a

$$a \equiv e \ (\mathcal{L}_S) \ , \quad e \equiv f \ (\mathcal{L}_S) \ , \quad f \equiv b \ (\mathcal{L}_S) \ ,$$

et par suite, pour tout $a$ et $b$ de $S$ , $S^1 a = S^1 b$ , et $S$ est simple à gauche.

Donc, d'après la proposition 6, on a le résultat : $S$ est isomorphe à $G \times E$ , où $G$ est un groupe, isomorphe à un sous-demi-groupe de $S$ , donc pouvant être totalement ordonné.

Condition suffisante. - Si $G$ est un groupe totalement ordonné, et $E$ un zéro-demi-groupe, $E$ peut être totalement ordonné par toute relation d'ordre total (l'isotonie est en effet trivialement assurée), et $G \times E$ peut être totalement ordonné par l'ordre lexicographique (4).

(b) Représentation des demi-groupes complètement 0-simples totalement ordonnés.

Remarquons tout d'abord, qu'un demi-groupe $S$ , complètement 0-simple, isomorphe à $\mathfrak{M}^0(G ; I , \Lambda ; P)$ est 0-simple à gauche (à droite) si, et seulement si, le cardinal de $\Lambda$ $[I]$ est égal à 1 (et alors $S$ est avec zéro adjoint).

Si $S$ est 0-simple à gauche et si $(a)_{j\mu}$ et $(b)_{i\lambda}$ sont deux matrices de $\mathfrak{M}^0(G ; I , \Lambda ; P)$ , il existe, d'après la proposition 1 , une matrice $(x)_{k\nu}$ telle que $(x)_{k\nu} \circ (b)_{i\lambda} = (a)_{j\mu}$ , soit $(xp_{\nu i} \, b)_{k\lambda} = (a)_{j\mu}$ . Donc nécessairement $\lambda = \mu$ , et le cardinal de $\Lambda$ est $1$ . Réciproquement, si le cardinal de $\Lambda$ est $1$ , la matrice $P$ est uniligne, régulière, donc elle n'a aucun élément nul, et si $(a)_{j\lambda}$ , $(b)_{i\lambda}$ sont deux matrices non nulles, on peut trouver un $x$ dans $G$ tel que $xp_{\lambda i} \, b = a$ , et alors $(x)_{j\lambda} \circ (b)_{i\lambda} = (a)_{j\lambda}$ , et $S$ est 0-simple à gauche, avec zéro adjoint.

PROPOSITION 8. - Si $S = \mathfrak{M}^0(G ; I , \Lambda ; P)$ est un demi-groupe complètement 0-simple, et si $|I|$ $(|\Lambda|)$ égale $1$ , $S - \{0\}$ est un demi-groupe isomorphe au produit direct de $G \times \Lambda$ $(G \times I)$ , où $\Lambda$ $(I)$ est structuré en zéro-demi-groupe à droite (zéro-demi-groupe à gauche).

On a vu (proposition 7) que $S = \mathfrak{M}^0(G ; I , \Lambda ; P)$ est isomorphe à

$$\mathfrak{M}^0(G ; I , \Lambda ; P') ,$$

où $P'$ est normalisée. Donc si $P$ est régulière, comme il en est de même de $P'$ , tous les éléments de $P'$ sont égaux à l'élément neutre ; si $|I| = 1$ , le produit de matrices dans $\mathfrak{M}^0(G ; I , \Lambda ; P')$ devient

$$(a)_{1\lambda} \circ (b)_{1\mu} = (ab)_{1\mu} .$$

En écrivant les éléments de $S - \{0\}$ sous la forme $(a , \lambda)$ , on a

$$(a , \lambda) \circ (b , \mu) = (ab , \mu) ,$$

d'où la proposition.

THÉORÈME 3. - Un demi-groupe complètement 0-simple isomorphe à $\mathcal{M}^0(G ; I,\Lambda ; P)$ peut être totalement ordonné, si, et seulement si, le groupe $G$ peut être totalement ordonné et si le cardinal de $\Lambda$ ou $I$ est égal à $1$.

Condition nécessaire. - Si $S$ est un demi-groupe complètement 0-simple totalement ordonné, d'après le théorème 1 et le théorème 2, $S$ est 0-simple à gauche ou à droite (avec zéro formellement adjoint), et d'après la remarque précédente, le cardinal de $\Lambda$ ou $I$ est $1$. Comme d'autre part, le groupe $G$ est isomorphe à une $\mathcal{H}$-classe de $S$, donc à un sous-demi-groupe de $S$, $G$ peut être totalement ordonné.

Condition suffisante. - D'après la proposition 8, $S - \{0\}$ est isomorphe au produit direct $G \times \Lambda$, par exemple, où $\Lambda$ est structuré en zéro-demi-groupe à droite. On sait alors (cf. démonstration du théorème 2) que $S - \{0\}$ peut être totalement ordonné. $S$ peut alors être totalement ordonné avec $0$ comme élément maximum ou minimum.

## 4. Demi-groupes de matrices de Rees totalement ordonnés.

Nous allons, dans ce paragraphe, donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un demi-groupe de matrices de Rees $\mathcal{M}^0(G ; I , \Lambda ; P)$ puisse être totalement ordonné.

THÉORÈME 4. - Soit $S = \mathcal{M}^0(G ; I , \Lambda ; P)$ un demi-groupe de matrices de Rees totalement ordonné. Alors

ou chaque colonne de $P$ contient au moins un élément non nul,

ou chaque ligne de $P$ contient au moins un élément non nul,

ou $P$ est la matrice nulle ( et $S$ est un zéro-demi-groupe).

Supposons que la matrice $P$ admet une ligne $\lambda_0$, et une colonne $j_0$, formées d'éléments tous nuls. Puisque $S$ est totalement ordonné, nous savons que

$$(A^2 = B^2 = 0) \text{ implique } (AB = BA = 0)$$

($AB$ et $BA$ sont compris entre $A^2$ et $B^2$ ).

Mais si $(a)_{i\lambda}$ est une matrice de Rees non nulle, $(a)_{i\lambda}^2 = 0$ si, et seulement si, $p_{\lambda i} = 0$ ; de même, si $(a)_{i\lambda}$ et $(b)_{j\mu}$ sont deux éléments non nuls,

$$(a)_{i\lambda} \circ (b)_{j\mu} = (ap_{\lambda j}\, b)_{i\mu} = 0$$

si, et seulement si, $p_{\lambda j} = 0$.

Ainsi, dans un demi-groupe de matrices de Rees, l'implication $(A \neq 0 , B \neq 0)$

$$(A^2 = B^2 = 0) \Longrightarrow (AB = BA = 0) ,$$

se traduit sur les éléments de $P$ par

$$(p_{\lambda i} = 0 , \; p_{\mu j} = 0) \Longrightarrow (p_{\lambda j} = 0 , \; p_{\mu i} = 0) . \tag{2}$$

Aussi, si nous avons $p_{\lambda_0 i} = 0$ pour tout $i$ de $I$, $p_{\mu j_0} = 0$ pour tout $\mu$ de $\Lambda$, nous avons, si $p_{\nu k}$ est un élément quelconque de $P$,

$$p_{\lambda_0 k} = 0 \, , \quad p_{\nu j_0} = 0 \, ,$$

donc, d'après (2), $p_{\nu k} = 0$, et $P$ est la matrice identiquement nulle.

PROPOSITION 9. - <u>Soit</u> $S$ <u>un demi-groupe de matrices de Rees</u>, $\mathcal{M}^0(G \, ; I \, , \Lambda \, ; P)$, <u>totalement ordonné</u>, <u>tel que</u> $P$ <u>n'est ni régulière</u>, <u>ni identiquement nulle</u>.

<u>Alors le groupe</u> $G$ <u>peut être totalement ordonné et</u>, <u>de plus</u>, <u>ou toutes les lignes</u> (<u>ou toutes les colonnes</u>) <u>de</u> $P$ <u>sont nulles sauf une</u>, <u>dont aucun élément n'est nul</u>, <u>ou la matrice</u> $P$ <u>est uniligne</u> (<u>ou unicolonne</u>).

<u>Démonstration</u>. - Puisque la matrice $P$ est supposée non régulière, il existe une ligne $\lambda_0$, par exemple, dont tous les éléments sont nuls. Soit $\Lambda' = \{\lambda \in \Lambda \; ; \; \lambda$-ième ligne de $P$ est nulle$\}$, et soit $M = \Lambda - \Lambda'$ (*). Puisque $P$ n'est pas identiquement nulle, $M$ n'est pas vide. Considérons la matrice $Q$ de $M \times I$ sur $G^0$, déduite de $P$, en supprimant les lignes nulles de cette dernière. Puisque la matrice $P$ avait une ligne nulle, d'après le théorème 4, toute colonne de $P$ admet au moins un élément non nul ; par suite, $Q$ est une matrice dont toute colonne a au moins un élément non nul, et de même toute ligne par construction. $Q$ <u>est donc régulière</u>, <u>et le demi-groupe</u> $T = \mathcal{M}^0(G \, ; I \, , M \, ; Q)$ <u>est un demi-groupe complètement</u> 0-<u>simple</u>.

<u>Mais</u> $T$ <u>est isomorphe à un sous-demi-groupe de</u> $S$. Considérons, en effet, dans $S$ le sous-ensemble

$$X = \{(a)_{i\lambda} \; ; \; i \in I \, , \; \lambda \in M\} \, .$$

$X$ <u>est un idéal à gauche de</u> $S$, car si $(x)_{j\mu} \in S$, $(a)_{i\lambda} \in X$,

$$(x)_{j\mu} \circ (a)_{i\lambda} = (x p_{\mu i} \, a)_{j\lambda} \, ,$$

donc, comme $\lambda \in M$, cette matrice appartient à $X$. Il est alors clair que $X$ est isomorphe à $T$. Par suite, $T$ est un demi-groupe complètement 0-simple, qui peut être totalement ordonné. Donc, $G$ est un groupe qui peut être totalement ordonné, et le cardinal de $I$ ou $M$ est $1$, d'après le théorème 3. Cela signifie que la matrice $P$ est unicolonne, ou a toutes ses lignes nulles, sauf une exactement. Mais alors, d'après le théorème 4, si une ligne est nulle, chaque colonne contient au moins un élément non nul, donc la seule ligne, non toute nulle, n'a aucun élément nul.

THÉORÈME 5. - <u>Soit</u> $S = \mathcal{M}^0(G \, ; I \, , \Lambda \, ; P)$ <u>un demi-groupe de matrices de Rees</u>. $S$ <u>peut être totalement ordonné si</u>, <u>et seulement si</u>,

<u>ou</u> $P$ <u>est identiquement nulle</u>,

---

(*) $M$ représente ici un $\mu$ majuscule.

ou $G$ peut être totalement ordonné, et $|I|$ ou $|\Lambda| = 1$ ,

ou $G$ peut être totalement ordonné, et $P$ a toutes ses lignes, ou toutes ses colonnes nulles sauf une dont aucun élément n'est nul.

Condition nécessaire. - Soit $S = \mathcal{M}^0(G\ ;\ I\ ,\ \Lambda\ ;\ P)$ un demi-groupe de matrices totalement ordonné. La matrice-sandwich $P$ peut être nulle, auquel cas $S$ est un zéro-demi-groupe ; $P$ peut être régulière, auquel cas, d'après le théorème 3, $G$ peut être totalement ordonné, et $|I|$ ou $|\Lambda| = 1$ . Si l'on n'est pas dans l'un de ces cas, il suffit d'appliquer la proposition 9.

Condition suffisante. - Soit $S = \mathcal{M}^0(G\ ;\ I\ ,\ \Lambda\ ;\ P)$ un demi-groupe de matrices de Rees.

(a) Si $P$ est identiquement nulle, $S$ , zéro-demi-groupe, est ordonné par n'importe quelle relation d'ordre total.

(b) Si $G$ est totalement ordonné, et si $P$ est unicolonne, $(|I| = 1)$ . Si $P$ est régulière, $S$ peut être totalement ordonné, d'après le théorème 3.

Si $P$ n'est pas régulière, certains des éléments qui forment la colonne de $P$ sont nuls ; on peut, de plus, supposer $P$ normalisée, ainsi $\forall\ \lambda \in \Lambda$ , $p_{\lambda 1} = 0$ ou $e$ , élément unité de $G$ .

Soit $M = \{\lambda \in \Lambda\ ;\ p_{\lambda 1} \neq 0\}$ . Les éléments de $S$ , $(a)_{1\lambda}$ , $a \in G$ , $\lambda \in \Lambda$ , peuvent être écrits sous la forme $(a\ ,\ \lambda)$ , et alors le produit dans $S$ est donné par

$$\begin{aligned}(a\ ,\ \lambda).(b\ ,\ \mu) &= (ab\ ,\ \mu) \quad \text{si } \lambda \in M\ ,\ a \in G\ ,\ b \in G \\ &= 0 \quad \text{si } \lambda \notin M\ ,\ \text{ou si } a = 0 \text{ ou } b = 0\ .\end{aligned}$$

$G$ peut être totalement ordonné par $\leq$ , et $\Lambda$ peut être muni d'une relation d'ordre total, notée aussi $\leq$ . $S$ admet la partition $\{0\ ,\ T\ ,\ T'\}$ , où

$T = \{(a\ ,\ \lambda) \in S\ ;\ \lambda \in M\ ,\ a \in G\}$ , $T' = \{(a\ ,\ \lambda) \in S\ ;\ \lambda \notin M\ ,\ a \in G\}$ .

$T \cup \{0\}$ et $T' \cup \{0\}$ sont des idéaux à gauche de $S$ et, de plus, $T'\,S = \{0\}$ .

Définissons une relation d'ordre sur $S$ :

$0 < (a\ ,\ \lambda).(b\ ,\ \mu)$ , pour tout $(a\ ,\ \lambda)$ de $T'$ , tout $(b\ ,\ \mu)$ de $T$ .

De plus, nous imposons à cette relation de prolonger les deux relations binaires définies respectivement sur $T$ et $T'$ par :

(sur $T$ ) : $((a,\lambda) \leq (b,\mu)) \Longleftrightarrow (a < b$ dans $G$ ou $a = b$ et $\lambda \leq \mu$ dans $\Lambda)$ .

(sur $T'$) : $((a,\lambda) \leq (b,\mu)) \Longleftrightarrow (\lambda < \mu$ dans $\Lambda$ ou $\lambda = \mu$ et $a \leq b$ dans $G)$ .

Les relations binaires sur $T$ et $T'$ sont des relations d'ordre lexicographique ; comme $G$ et $\Lambda$ sont munis de relation d'ordre total, $S$ est muni d'une relation d'ordre total.

Vérifions l'isotonie. - Si $(a , \lambda) < (b , \mu)$ avec $\lambda \notin M$ et $\mu \in M$, $a$ et $b \in G$.

L'isotonie à droite est trivialement vérifiée, car $(a , \lambda).(c , \nu) = 0$ pour tout $(c , \nu)$ de $S$. L'isotonie à gauche l'est également, car les produits $(c , \nu).(a , \lambda)$ et $(c , \nu).(b , \mu)$ sont nuls, si $(c , \nu)$ appartient à $T'$, et appartiennent respectivement à $T'$ et $T$ si $(c , \nu)$ appartient à $T$.

Si $(a , \lambda) \leqslant (b , \mu)$ avec $(a , \lambda)$, $(b , \mu) \in T'$ et $\lambda < \mu$ ou $\lambda = \mu$ et $a \leqslant b$ :

Si $(c , \nu) \in T'$, comme $T'$ est un zéro-demi-groupe,

$$(a , \lambda)(c , \nu) = (c , \nu)(a , \lambda) = (b , \mu)(c , \nu) = (c , \nu)(b , \mu) = 0 .$$

Si $(c , \nu) \in T$,

$$(a,\lambda).(c,\nu) = (b,\mu).(c,\nu) = 0 \quad \text{et} \quad (c,\nu)(a,\lambda) = (ca,\lambda) \leqslant (cb,\mu) = (c,\nu)(b,\mu) ,$$

car soit $\lambda < \mu$ dans $\Lambda$, soit $ca \leqslant cb$ dans $G$, et $\lambda = \mu$.

Si $(a , \lambda) \leqslant (b , \mu)$ avec $(a , \lambda)$, $(b , \mu) \in T$ et $a < b$ dans $G$ ou $a = b$ et $\lambda \leqslant \mu$ :

Si $(c , \nu) \in T'$, l'isotonie à gauche est trivialement vérifiée, puisque $T' S=0$,

$$(a , \lambda).(c , \nu) = (ac , \nu) \quad \text{et} \quad (b , \mu).(c , \nu) = (bc , \nu) ,$$

donc ces deux éléments appartiennent à $T'$, comme $a \leqslant b$ dans $ac \leqslant bc$, et aussi $(ac , \nu) \leqslant (bc , \nu)$ dans $S$.

Si $(c , \nu) \in T$,

$(ac , \nu) \leqslant (bc , \nu)$, car ou $ac < bc$ ou $ac = bc$,

$(ca , \lambda) \leqslant (cb , \mu)$, car ou $ca < cb$ ou $ca = cb$ et $\lambda \leqslant \mu$.

Ainsi, dans le cas (b), $S$ peut être totalement ordonné.

(c) Supposons que $G$ peut être totalement ordonné, et que la matrice $P$ a toutes ses lignes nulles, sauf une dont aucun élément n'est nul.

Notons $\lambda = 1$, la ligne dont aucun élément n'est nul, et supposons de plus que $P$ est normalisée, de sorte que

$$p_{1i} = e , \ \forall\, i \in I , \ p_{\lambda i} = 0 , \ \forall\, i \in I , \ \forall\, \lambda \neq 1 \in \Lambda .$$

Dans ce cas, le produit dans $S$ se définit par

$$(a)_{i\lambda} \circ (b)_{j\mu} = (ab)_{i\mu} \quad \text{si } \lambda = 1 , \ a \text{ et } b \in G ,$$
$$= 0 \qquad \text{si } \lambda \neq 1 \text{ ou si } a \text{ ou } b = 0 .$$

Soit

$$T = \{(a)_{i1} \, ; \ a \in G , \ i \in I\} ,$$

et soit

$$T' = \{(a)_{i,\lambda} \ ; \ a \in G \ , \ \lambda \neq 1 \in \Lambda \ , \ i \in I\} \ .$$

On a alors $S = T \cup T' \cup \{0\}$ . De plus, $\{0\} \cup T'$ est un zéro-demi-groupe de $S$ , $T' S = \{0\}$ , $ST' \subseteq T' \cup \{0\}$ , $T$ est un sous-demi-groupe de $S$ , et $ST \subseteq T \cup \{0\}$ .

Comme nous pouvons supposer $G$ totalement ordonné par $\leqslant$ , $I$ totalement ordonné par $\leqslant$ , et de même $\Lambda$ totalement ordonné par $\leqslant$ , on peut définir sur $S$ , $T$ et $T'$ les relations binaires suivantes :

<u>sur $T$</u> : $((a)_{i1} \leqslant (b)_{j1}) \Longleftrightarrow (a < b$ dans $G$ ou $a = b$ et $i \leqslant j$ dans $I)$ .

<u>sur $T'$</u> : $((a)_{i\lambda} \leqslant (b)_{j\mu}) \Longleftrightarrow (\lambda < \mu$ ou $\lambda = \mu$ et $a < b$ dans $G$ ou $\lambda = \mu$ , $a = b$ et $i \leqslant j$ dans $I)$ .

<u>sur $S$</u> : la relation prolonge celles définies sur $T$ et $T'$ et de plus,

$$0 < (a)_{i\lambda} < (b)_{j1} \quad \text{pour tout} \quad (a)_{i\lambda} \quad \text{de} \quad T' \text{ , et tout } \quad (b)_{j1} \quad \text{de} \quad T \ .$$

Cette relation binaire $\leqslant$ est une relation d'ordre total sur $S$ , car les relations sur $T$ et $T'$ sont des relations d'ordre lexicographique déduites de relations d'ordre total. On vérifie alors, comme dans le cas (b), que l'isotonie est satisfaite ; ainsi $S$ est un demi-groupe de matrices de Rees totalement ordonné.

## BIBLIOGRAPHIE

[1] CLIFFORD (A. H.) and PRESTON (G. B.). - The algebraic theory of semigroups. Vol. 1. - Providence, American mathematical Society, 1961 (Mathematical Surveys, 7).

[2] SAITÔ (T.). - Ordered completely regular semigroups, Pacific J. of Math., t. 14, 1964, p. 295-308.

[3] SAITÔ (T.). - Ordered idempotent semigroups, J. Math. Soc. Japan, t. 14, 1962, p. 149-169.

[4] SAITÔ (T.). - Note on the lexicographic product of ordered semigroups, Proc. Jap. Acad., t. 46, 1970, p. 413-416.

Thérèse MERLIER
15 boulevard de la République
92260 FONTENAY AUX ROSES