Alain Bigard

Modules ordonnés injectifs

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 25, n° 1 (1971-1972), exp. n° 1, p. 1-5

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1971-1972__25_1_A1_0>

Séminaire DUBREIL
(Algèbre)
25e année, 1971/72, n° 1, 5 p.

22 novembre 1971

MODULES ORDONNÉS INJECTIFS

par Alain BIGARD

Il existe une abondante littérature sur les espaces vectoriels ordonnés. Par contre, l'étude des modules ordonnés est beaucoup plus récente.

Considérons un anneau A ordonné, c'est-à-dire qu'on a un ordre A_+ vérifiant

$$A_+ + A_+ \subseteq A_+ \ , \quad A_+ A_+ \subseteq A_+ \ , \quad A_+ \cap - A_+ = \{0\} \ .$$

Un module sur M est dit ordonné s'il est muni d'un ordre M_+ avec

$$M_+ + M_+ \subseteq M_+ \ , \quad A_+ M_+ \subseteq M_+ \ , \quad M_+ \cap - M_+ = \{0\} \ .$$

Si l'on fait abstraction des auteurs, assez nombreux, qui ont donné cette définition sans la développer, le premier travail vraiment substantiel sur les modules ordonnés est un article assez étonnant de P. RIBENBOIM [5], paru en 1967.

Cet article, en dépit, ou à cause, des erreurs nombreuses qu'il comporte, ouvre des perspectives extrêmement intéressantes. L'objectif de P. RIBENBOIM était d'obtenir très vite une description de la catégorie des modules ordonnés, afin d'appliquer directement des méthodes homologiques. C'est ainsi qu'il définit, avec succès, les notions de module O-libre et de module O-projectif. Mais il constate qu'il n'y a pas d'objet injectif non nul. La démonstration qu'il donne de ce fait est fausse : elle utilise un produit lexicographique de modules ordonnés, qui n'est pas un module ordonné. C'est ŠATALOVA qui a noté cette erreur, et qui a donné une nouvelle démonstration [3].

Alors RIBENBOIM définit des modules $\aleph_\alpha$-injectifs. Soit $\aleph_\alpha$ un cardinal supérieur à $\aleph_0$. Il dit que E est $\aleph_\alpha$-O-injectif si, pour tout module N de cardinal inférieur à $\aleph_\alpha$, pour tout sous-module M et tout homomorphisme isotone de M dans E, il existe un prolongement $\overline{f}$ à N. D'autre part, E est dit extension O-essentielle de F si, pour tout sous-module convexe C de E,

$$(C \cap F = 0) \quad \text{implique} \quad (C = 0) \ .$$

Au terme d'une induction transfinie assez longue, il parvient au résultat suivant :

Si M est un module isolé et de cardinal inférieur à $\aleph_\alpha$, il existe un module $\aleph_\alpha$-O-injectif E, qui est extension O-essentielle de M. On ignore s'il existe une telle extension minimale unique.

Ce résultat suppose que A est filtrant, c'est-à-dire que $A = A_+ - A_+$. RIBENBOIM indique dans ses corrections [6], et ALLING dans ses contre-exemples [1], que cette hypothèse est indispensable dans la plupart des assertions contenues dans cet article. Lorsque A est filtrant, $M_+ - M_+$ est un sous-module de M. En fait, c'est le plus grand sous-module filtrant contenu dans M. Par ailleurs, il paraît nécessaire de supposer A unitaire et $1 > 0$ (ce qui implique immédiatement que A est de caractéristique 0). Dans la théorie qui va suivre, A sera toujours un anneau réticulé satisfaisant cette condition.

Notre point de départ est assez différent de celui de RIBENBOIM. Dans la catégorie des A-modules ordonnés, nous conservons comme morphismes les homomorphismes isotones, mais nous considérons M comme un sous-objet de N si M est cofinal dans N, c'est-à-dire si tout $x \in N_+$ est inférieur à un élément y de M. La catégorie $\mathfrak{M}$ des A-modules est une sous-catégorie de la catégorie $\mathfrak{M}'$ des A-modules ordonnés, car à tout module M peut être identifié un module M muni de l'ordre trivial $M_+ = 0$.

D'autre part, nous dirons que M est large dans N si, pour tout $x \in N$, il existe $y_1, y_2 \in M$ avec $y_1 \leq x \leq y_2$. Ceci revient à dire que le sous-module convexe, engendré par M, est égal à N. Il est évident que "large" entraîne "cofinal".

DÉFINITION. - E, *module ordonné, est dit* 0-*injectif* (*resp.* q-*injectif*) *si, étant donnés :*

(i) *un module ordonné* N,

(ii) *un sous-module cofinal* (*resp. large*) M,

(iii) *un homomorphisme isotone* f *de* M *dans* E,

il existe un homomorphisme isotone $\bar{f}$ *de* N *dans* E *que prolonge* f.

Le rapport qui existe entre ces deux notions est le suivant :

PROPOSITION 1. - E *est* 0-*injectif si, et seulement si, il est injectif et* q-*injectif*.

La condition est *nécessaire* : Soient N un A-module, M un sous-module, f un homomorphisme de M dans E. Prenons $N_+ = \{0\}$. Il est évident que M est cofinal dans N et que f est isotone. Par conséquent, f se prolonge en

$$\bar{f} : N \to E .$$

Ceci prouve que E est injectif.

Inversement, soient N un A-module ordonné, M un sous-module cofinal et $f : M \to E$ isotone. Montrons que M est large dans $M + N_+ - N_+$. Si

$$x \in M + N_+ - N_+ , \quad x = y + p - q \qquad (y \in M , \ p \in N_+ , \ q \in N_+) .$$

Il existe $y_1, y_2 \in M$ tel que $p \leq y_1$ et $q \leq y_2$. On a donc

$$y - y_2 \leq x \leq y + y_1 .$$

Comme E est q-injectif, il existe un homomorphisme isotone

$$f_1 : M + N_+ - N_+ \dashrightarrow E$$

qui prolonge f. Soit maintenant $\overline{f}$ n'importe quel prolongement de f_1 à N. Il est isotone, car $f(N_+) = f_1(N_+) \subseteq E_+$.

La proposition 1 montre qu'on peut se limiter, dans une première étape, à étudier les modules q-injectifs.

On voit facilement que, si E est q-injectif, tout sous-module convexe est q-injectif. En particulier, $E_+ - E_+$ est q-injectif. La réciproque est vraie :

PROPOSITION 2. - E *est* q-*injectif si, et seulement si,* $E_+ - E_+$ *est* q-*injectif*.

Il en résulte immédiatement qu'un module trivialement ordonné est toujours q-injectif. Compte tenu de la proposition 1, un module trivialement ordonné est 0-injectif si, et seulement si, il est injectif. La proposition 2 montre en outre qu'il est important de déterminer les modules q-injectifs filtrants.

PROPOSITION 3. - *Tout module* E *filtrant* q-*injectif est un espace vectoriel sur* $\underset{\sim}{R}$ *réticulé complet, et* $r(\lambda x) = \lambda(rx)$ *pour tout* $r \in \underset{\sim}{R}$, $\lambda \in A$, $x \in E$.

La démonstration assez longue, s'inspire de la théorie de DAY pour les espaces réels ordonnés [4].

BONNICE et SILVERMAN ont montré que, pour un espace réel ordonné, le fait d'être complet est équivalent à la propriété de Hahn-Banach [2]. Soient E un A-module ordonné, et N un A-module. Nous dirons que $p : N \dashrightarrow E$ est sous-linéaire si, pour $x , y \in N$, et $\lambda , \mu \in A_+$ on a

$$p(\lambda x + \mu y) \leqslant \lambda p(x) + \mu p(y) .$$

Nous dirons que E a la propriété de Hahn-Banach si, étant donnés

(i) un A-module N et un sous-module M,

(ii) une application sous-linéaire p de N dans E,

(iii) une application linéaire f de M dans E qui vérifie $f(y) \leqslant p(y)$ pour tout $y \in M$,

il existe une application linéaire $\overline{f} : N \dashrightarrow E$ qui prolonge f, et telle que $\overline{f}(x) \leqslant p(x)$ pour tout $x \in N$.

PROPOSITION 4. - *Tout module* q-*injectif a la propriété de Hahn-Banach*.

Il paraît douteux que la réciproque soit vraie, bien que nous ne connaissions pas de contre-exemple.

Néanmoins, on peut démontrer la réciproque pour $A = \underset{\sim}{Z}$.

PROPOSITION 5. - *Si* $A = \underset{\sim}{Z}$, *les conditions suivantes sont équivalentes* :

1° E *est* q-*injectif,*

2° E *a la propriété de Hahn-Banach,*

3° E *est la somme directe d'un espace réel réticulé complet et d'un groupe trivialement ordonné.*

Pour prouver que 2° implique 3°, on considère $E_+ - E_+$. On montre qu'il a la propriété de Hahn-Banach. On prouve ensuite qu'un module filtrant, qui a la propriété de Hahn-Banach, est un espace réel réticulé complet. Alors $E_+ - E_+$ est divisible, donc il est facteur direct dans E. Il est évident que son supplémentaire est trivialement ordonné.

Si $E = V \oplus G$, où V est un espace réel réticulé complet et G trivialement ordonné, $V = E_+ - E_+$. Le point essentiel est donc de prouver qu'un espace réel réticulé complet est q-injectif. On conclut en utilisant la proposition 2.

COROLLAIRE. - *Si* $A = \mathbb{Z}$, *les conditions suivantes sont équivalentes*

1° E *est* 0-*injectif,*

2° E *est divisible et a la propriété de Hahn-Banach,*

3° E *est la somme directe d'un espace réel réticulé complet et d'un groupe divisible trivialement ordonné.*

On remarque qu'un groupe abélien q-injectif filtrant est 0-injectif. D'autre part, un groupe abélien q-injectif est nécessairement archimédien, c'est-à-dire que ($na \leq b$ pour tout $n \geq 0$) implique ($a \leq 0$).

Nous allons voir qu'un groupe archimédien peut être plongé dans un groupe q-injectif.

Soit G archimédien. Soit H son complété de Dedekind. Alors, $R = H_+ - H_+$ est un groupe réticulé complet. Son enveloppe divisible $\overline{R}$ est donc un espace réel complet. L'application identique de R dans R se prolonge en un homomorphisme φ de H dans R (nécessairement isotone). Si μ est l'application canonique de H sur H/R, alors $x \longrightarrow (\varphi(x), \mu(x))$ est un isomorphisme de G dans $\overline{R} \times (H/R) = K$. Comme H/R est trivialement ordonné, K est q-injectif par la proposition 5.

Ce résultat peut être généralisé au cas où A est un anneau réticulé quelconque, en suivant une méthode parallèle à celle d'ECKMANN et SCHOPF.

Si G est un groupe ordonné, considérons $\mathrm{Hom}(A, G)$. C'est un A-module à gauche si on pose $(\lambda f)(\mu) = f(\mu\lambda)$. Si $f \in \mathrm{Hom}(A, G)$, posons $f \geq 0$ si f est isotone. Quand $f \geq 0$ et $f \leq 0$, on a $f(A_+) = 0$, donc $f(A) = 0$, car A est filtrant. On voit que $\mathrm{Hom}(A, G)$ est un module ordonné.

PROPOSITION 6. - *Si* E *est un groupe abélien* q-*injectif* (*resp.* 0-*injectif*) *alors* $H = \mathrm{Hom}(A, E)$ *est un* A-*module* q-*injectif* (*resp.* 0-*injectif*).

Il en résulte aussi que $H_+ - H_+$ est q-injectif. Comme E est complet, ceci n'est autre que l'ensemble des homomorphismes bornés.

PROPOSITION 7. - <u>Un A-module peut être plongé dans un module q-injectif si, et seulement si, il est archimédien.</u>

Supposons M archimédien. M peut être plongé dans un groupe abélien q-injectif F. $\mathrm{Hom}(A, F)$ est un A-module q-injectif. Si $x \in M$, posons $\tau_x(\lambda)=\lambda x$. Alors, $x \longrightarrow \tau_x$ est un isomorphisme de M dans $\mathrm{Hom}(A, F)$. Soit E, le sous-module convexe de $\mathrm{Hom}(A, F)$ engendré par l'image de M. Alors M est large dans E, et E est q-injectif.

COROLLAIRE. - <u>Un A-module M peut être plongé, comme sous-module cofinal dans un module O-injectif si, et seulement si, il est archimédien.</u>

On a M large dans E avec E q-injectif. Soit S l'enveloppe injective de E, avec $S_+ = E_+$. Comme E est cofinal dans S, M est cofinal dans S. De plus, S est O-injectif d'après les propositions 1 et 2.

Nous ignorons s'il est possible de trouver une extension O-injective minimale unique. La difficulté provient essentiellement du fait que la catégorie que nous étudions n'est pas abélienne.

(Les démonstrations seront publiées dans un article ultérieur.)

BIBLIOGRAPHIE

[1] ALLING (N.). - Corrections to Ribenboim's paper "on ordered modules", J. für die reine und angew. Math., t. 243, 1970, p. 95-97.

[2] BONNICE (W. E.) and SILVERMAN (R. J.). - The Hahn-Banach extension property and the least upper bound properties are equivalent, Proc. Amer. math. Soc., t. 18, 1967, p. 843-849.

[3] DAY (M. M.). - Normed linear spaces. - Berlin, Springer-Verlag, 1962 (Ergebnisse der Mathematik, 21).

[4] RIBENBOIM (P.). - Corrections to my paper "on ordered modules", J. für die reine und angew. Math., t. 238, 1969, p. 132-134.

[5] RIBENBOIM (P.). - On ordered modules, J. für die reine und angew. Math., t. 225, 1967, p. 120-146.

[6] ŠATALOVA (M. A.). - L'absence de modules ordonnés O-injectifs [en russe], Matem. Zametki, t. 7, 1970, p. 693-696.

Alain BIGARD
8 rue Parrot
75012 PARIS