Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Alain Gerente

Demi-groupes duaux

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 25, nº 1 (1971-1972), exp. nº 12, p. 1-21

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1971-1972__25_1_A11_0>

Séminaire DUBREIL
(Algèbre)
25e année, 1971/72, n° 12, 21 p.

17 avril 1973

DEMI-GROUPES DUAUX

par Alain GERENTE

1. Introduction.

La notion d'anneau dual a été introduite par R. BAER [1], I. KAPLANSKY [7], et plus tard développée par F. BONSALL et A. GOLDIE [2], ainsi que par K. G. WOLFSON [13]. Une extension de leurs résultats et les connections avec la théorie des anneaux normés sont données dans le livre de NAJMARK [9].

Les notions introduites dans ces articles utilisant seulement les propriétés mulplicatives des éléments de l'anneau, il semblait naturel de demander comment ces résultats pouvaient être étendus à la théorie des demi-groupes. Stefan SCHWARZ a été le premier à étudier les demi-groupes duaux [11] ; il a démontré, en particulier, qu'un demi-groupe complètement 0-simple est dual si, et seulement si, il est inverse ; mais la majorité des résultats intéressants de son article ont été obtenus en imposant des conditions assez restrictives (par exemple, le demi-groupe étudié ne possède pas d'idéaux nilpotents).

L'étude des demi-groupes duaux sans idéaux nilpotents a été poursuivie par NUMAKURA [10] dans le cas compact, et récemment dans le cas général par KRAJNAKOVA [8]. Plus récemment encore, Štefan SCHWARZ s'est rendu compte que la majorité des résultats obtenus précédemment étaient valables dans le cas général [12]. Nous donnons ci-dessous (lemmes 1 à 4) un résumé de l'essentiel des propriétés connues qui permettront au lecteur de se faire une idée assez précise de la structure d'un demi-groupe dual après les travaux de Štefan SCHWARZ. Nous renvoyons à [12] pour la démonstration de ces lemmes.

Soient S un demi-groupe avec zéro, A une partie non vide de S . Nous définissons l'annulateur à gauche de A , $\ell(A)$, et l'annulateur à droite de A , $r(A)$, par les propriétés suivantes :

$\ell(A) = \{x \in S \ ; \ xA = 0\}$, $r(A) = \{x \in S \ ; \ Ax = 0\}$,

$\ell(A)$ (resp. $r(A)$) est un idéal à gauche (resp. à droite) , et si A est un idéal, $\ell(A)$ et $r(A)$ sont des idéaux. On peut établir facilement les résultats qui suivent :

(a) $A \subseteq r(\ell(A))$, $A \subseteq \ell(r(A))$.

(b) $(A \subseteq B \subseteq S)$ implique $(r(B) \subseteq r(A)$ et $\ell(B) \subseteq \ell(A))$.

(c) Si I est un ensemble non vide d'indices, et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de sous-ensembles non vides de S , alors

$$\ell(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i\in I} \ell(A_i) \quad \text{et} \quad r(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i\in I} r(A_i) \ .$$

En particulier, si L (resp. R) est un idéal à gauche (resp. à droite) de S, $\ell(r(L))$ (resp. $r(\ell(R))$) est un idéal à gauche (resp. à droite) de S contenant L (resp. R).

Un demi-groupe avec zéro, et non réduit à $\{0\}$, est dit dual si, pour chaque idéal à gauche L de S, nous avons $\ell(r(L)) = L$, et, pour chaque idéal à droite R de S, nous avons $r(\ell(R)) = R$.

On déduit facilement que :

(d) Soient S un demi-groupe dual, I un ensemble d'indices, $I \neq \emptyset$, $(L_i)_{i\in I}$ (resp. $(R_i)_{i\in I}$) une famille d'idéaux à gauche (resp. à droite) de S. Alors

$$r(\cap_{i\in I} L_i) = \cup_{i\in I} r(L_i) \quad (\text{resp. } \ell(\cap_{i\in I} R_i) = \cup_{i\in I} \ell(R_i)) .$$

Soient S un demi-groupe dual, G (resp. D) l'ensemble de tous les idéaux à gauche (resp. à droite) de S ; en introduisant les opérations $\cap$ et $\cup$, on voit que G et D sont des treillis complets ; l'application bijective de G sur D, qui à $L \in G$ associe $r(L) \in D$, a les propriétés suivantes :

$$r(\cup_{i\in I} L_i) = \cap_{i\in I} r(L_i) \quad \text{et} \quad r(\cap_{i\in I} L_i) = \cup_{i\in I} r(L_i) ;$$

d'où les treillis complets G et D sont complètement anti-isomorphes ; l'ensemble des idéaux de S est clairement un sous-treillis complet de G et de D ; or si M est un idéal de S, il en est de même de $r(M)$; donc le sous-treillis complet des idéaux bilatères de S est anti-isomorphe à lui-même.

Nous rappelons qu'un demi-groupe S avec zéro est dit réunion 0-directe de demi-groupes S_i, $i \in I$, si

$$S = \cup_{i\in I} S_i \quad \text{et} \quad S_i \cap S_j = S_i S_j = \{0\} \quad \text{pour } i \neq j \quad (i \in I ,\ j \in I) ;$$

il est clair que chaque S_i est un idéal de S, donc nous pouvons parler de réunion 0-directe d'idéaux.

Le lemme ci-dessous découle de [12] (p. 462-464, et lemme 4.1).

LEMME 1. - *Soit* S *un demi-groupe dual* :

(a) $\ell(S) = r(S) = 0$;

(b) *Soit* a *un élément de* S, *alors* a *appartient à* $Sa \cap aS$; *donc* Sa (*resp.* aS, SaS) *est l'idéal à gauche* (*resp. à droite, bilatère*) *de* S *engendré par* a ;

(c) *Chaque idéal à droite* I *de* S *contient un idéal* 0-*minimal à droite* (*sauf si* $I = \{0\}$), *et est contenu dans un idéal maximal à droite* (*sauf si* $I = S$) ;

(d) *Chaque idéal* I *de* S *contient un idéal* 0-*minimal* (*sauf si* $I = \{0\}$), *et est contenu dans un idéal maximal* (*sauf si* $I = S$) ;

(e) *Chaque idéal* 0-*minimal d'un côté est contenu dans un idéal* 0-*minimal, et chaque idéal maximal d'un côté contient un idéal maximal* ;

(f) Si L est un idéal 0-minimal (resp. maximal) à gauche, $r(L)$ est un idéal maximal (resp. 0-minimal) à droite ; résultats analogues en permutant gauche et droite ;

(g) Si M est un idéal 0-minimal (resp. maximal), $\ell(M)$ et $r(M)$ sont des idéaux maximaux (resp. 0-minimaux) ;

(h) Soit $S = \bigcup_{i \in I} S_i$ une réunion 0-directe d'idéaux S_i ; S est dual si, et seulement si, chaque S_i est dual.

Dans le reste de cet exposé, $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{D}$ et $\mathcal{J}$ désigneront les équivalences de Green sur le demi-groupe dual S. Si x est un élément de S, nous noterons L_x, R_x, H_x, D_x, J_x, respectivement, la $\mathcal{L}$-classe, la $\mathcal{R}$-classe, la $\mathcal{H}$-classe, la $\mathcal{D}$-classe et la $\mathcal{J}$-classe de x dans S.

Le lemme 1 (d) montre que tout demi-groupe dual S contient des idéaux maximaux puisque, par définition, S n'est pas réduit à $\{0\}$; nous noterons désormais $S^\times$ l'intersection des idéaux maximaux de S ($S^\times$ est non vide, car $0 \in S^\times$). En utilisant les résultats d'un article de GRILLET sur les intersections d'idéaux maximaux [6], S. SCHWARZ établit les résultats suivants (voir [12], lemme 3.1 pour (a), lemmes 2.1, 2.2, 3.3 et théorème 3.12 pour (b), théorème 3.11 pour (c), théorème 3.10 et lemme 3.13 pour (d) et (e)).

LEMME 2. - Soient S un demi-groupe dual, $S^\times$ l'intersection des idéaux maximaux de S, et E l'ensemble des idempotents de S.

(a) $S^\times$ ne contient pas d'autre idempotent que 0 ;

(b) Chaque $\mathcal{J}$-classe contenue dans $S \setminus S^\times$ contient un idempotent et le produit de deux $\mathcal{J}$-classes distinctes de $S \setminus S^\times$ est égal à $\{0\}$;

(c) Le produit de deux idempotents est toujours 0 ;

(d) $S = \bigcup_{e \in E} Se = \bigcup_{f \in E} fS$; de plus si e et f sont deux idempotents distincts $Se \cap Sf = eS \cap fS = \{0\}$;

(e) Soit e un idempotent non nul de S ; Se (resp. eS) contient un idéal 0-minimal à gauche (resp. à droite) unique ; en outre :

$$r(Se) = \{\bigcup_f fS \ ; \ f \in E \ , \ f \neq e\} \ , \quad \ell(eS) = \{\bigcup_f Sf \ ; \ f \in E \ , \ f \neq e\} .$$

Soit e un idempotent non nul de S dual ; on note L (resp. R) l'idéal 0-minimal à gauche (resp. à droite) unique contenu dans Se (resp. eS). Soit J_e la $\mathcal{J}$-classe de e (nous verrons ci-dessous (lemme 5), que c'est en fait une $\mathcal{D}$-classe) ; on pose

$$SE_\alpha = \bigcup_f (Sf : f \in E \cap J_e) \quad \text{et} \quad E_\alpha S = \bigcup_f (fS : f \in E \cap J_e) .$$

Nous avons les résultats suivants (voir [12] paragraphe 6).

LEMME 3.

(a) SE_α (resp. $E_\alpha S$) contient un seul idéal 0-minimal M (resp. N), et $M = LS$ (resp. $N = SR$) est exactement la réunion de tous les idéaux 0-minimaux à gauche (resp. à droite) contenus dans SE_α (resp. $E_\alpha S$).

(b) SeS (qui contient évidemment SE_α et $E_\alpha S$) contient un seul idéal 0-minimal si, et seulement si, $SE_\alpha = E_\alpha S$.

Le reste de l'article [12] est consacré à la recherche de conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un demi-groupe dual soit réunion 0-directe de demi-groupes duaux d'un certain type (théorèmes 6.2, 6.3, 6.8, 6.9).

Remarquons qu'un demi-groupe dual possède toujours au moins un idéal 0-minimal à gauche et au moins un idéal 0-minimal à droite (lemme 1 (c)), donc un demi-groupe dual 0-simple est complètement 0-simple ; comme la structure d'un demi-groupe complètement 0-simple dual est connue ([11] théorème 3.9), nous obtenons le lemme suivant.

LEMME 4. - Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(A) S est un demi-groupe dual 0-simple ;

(B) S est un demi-groupe dual complètement 0-simple ;

(C) S est un demi-groupe complètement 0-simple et inverse ;

(D) S est un demi-groupe de Brandt.

Après la parution du dernier article de Stefan SCHWARZ, il était possible d'avoir une idée très précise sur la structure de $S/S^\times$, mais ce qui se passe dans $S^\times$ restait en grande partie inconnu (en dehors des propriétés énoncées dans le lemme 1 et le lemme 2).

Nous nous proposons d'exposer ici une partie des résultats que nous avons obtenus dans cette voie, et spécialement la structure des $\mathcal{D}$-classes contenues dans $S^\times$.

2. Résultats préliminaires.

Soient S un demi-groupe, E l'ensemble des idempotents de S. E est muni de la relation d'ordre classique, à savoir $e \leq f$ ($e \in E$, $f \in E$) si, et seulement si, $ef = fe = e$. On dit que S est complètement semi-simple si chacun des facteurs principaux de S est complètement 0-simple ou complètement simple ([4], page 32).

Le lemme ci-dessous découle du théorème 2 de [5].

LEMME 5. - Soient S un demi-groupe, D une $\mathcal{D}$-classe contenant un idempotent e minimal parmi les idempotents de D ; alors D est une $\mathcal{J}$-classe, et le facteur principal $J(e)/I(e)$ est complètement 0-simple ou complètement simple.

THÉORÈME 1. - *Soient* S *un demi-groupe dual,* $S^{\times}$ *l'intersection des idéaux maximaux de* S , E *l'ensemble des idempotents de* S ; *Alors* :

(a) *Chaque* $\mathcal{J}$*-classe, contenue dans* $S \setminus S^{\times}$, *est une* $\mathcal{D}$*-classe, et* $T=S \setminus S^{\times} \cup \{0\}$ *est la réunion des* $\mathcal{D}$*-classes régulières de* S ;

(b) T *est un demi-groupe dual inverse complètement semi-simple* ; *si* a *est un élément de* T , *les classes de Green de* a *dans* S *et* T *coïncident* ; *si* x *et* y *sont deux éléments non nuls de* T , $xy \neq 0$ *si, et seulement si,* $L_x \cap R_y$ *contient un idempotent, et dans ce cas* $xy \in R_x \cap L_y$.

Démonstration.

(a) Soit I une $\mathcal{J}$-classe contenue dans $S \setminus S^{\times}$; I contient un idempotent e (lemme 2 (b)) ; il suit du lemme 2 (c) que le seul idempotent comparable à e est 0 , et il est clair que 0 n'appartient pas à I ; d'où I est une $\mathcal{D}$-classe (lemme 5) ; comme $S^{\times}$ ne contient pas d'autre idempotent que 0 (lemme 2 (a)), T est clairement la réunion des $\mathcal{D}$-classes régulières de S .

(b) Soient x et y deux éléments de $S \setminus S^{\times}$ tels que $xy \neq 0$; compte tenu de (a), il existe un idempotent e dans L_x et un idempotent f dans R_y ; alors xy appartient à $SefS$, d'où $e = f$ (sinon $ef = 0$ d'après le lemme 2 (c), et $SefS = \{0\}$, donc $xy = 0$) ; alors e étant un idempotent de $L_x \cap R_y$, xy appartient à $R_x \cap L_y$ ([3] théorème 2.17) ; en particulier T est un demi-groupe.

Soit a un élément de $S \setminus S^{\times}$, a est régulier dans S , donc il existe x dans S tel que $a = axa$; $S^{\times}$ étant un idéal, il est clair que x appartient à $S \setminus S^{\times}$, ce qui prouve que T est un demi-groupe régulier.

Soient a un élément de $S \setminus S^{\times}$ et b un élément de S appartenant à L_a ; il existe x et y dans S tels que $a = xb$ et $b = ya$; $S^{\times}$ étant un idéal, x et y appartiennent à $S \setminus S^{\times}$, donc la $\mathcal{L}$-classe de a dans T coïncide avec la $\mathcal{L}$-classe de a dans S ; en particulier, T est un demi-groupe inverse puisque deux idempotents distincts ne peuvent appartenir ni à la même $\mathcal{L}$-classe de S , ni à la même $\mathcal{R}$-classe de S d'après le lemme 2 (c) ; T est complètement semi-simple d'après le lemme 5, et si D est une $\mathcal{D}$-classe non nulle de T , $D \cup \{0\}$ est un demi-groupe complètement 0-simple et inverse, donc dual (lemme 4), et T dual suit du lemme 1 (h) et du lemme 2 (b).

Le corollaire ci-dessous généralise le lemme 4 puisqu'un demi-groupe 0-simple est évidemment semi-simple, c'est-à-dire un demi-groupe dont tout facteur principal est simple ou 0-simple.

COROLLAIRE 1.1. - *Soient* S *un demi-groupe dual,* $S^{\times}$ *l'intersection des idéaux maximaux de* S . *Les propriétés suivantes sont équivalentes* :

(A) S *est semi-simple* ;

(B) S *est complètement semi-simple* ;

(C) $S^\times = \{0\}$;

(D) S est 0-simple dual ou réunion 0-directe de demi-groupes 0-simples duaux.

Démonstration.

(B) $\Longrightarrow$ (A) est immédiat.

(A) $\Longrightarrow$ (C) : supposons $S^\times$ non réduit à $\{0\}$; alors $S^\times$ contient un idéal 0-minimal de S , I (lemme 1 (d)) ; mais I contient un idéal 0-minimal à gauche de S et un idéal 0-minimal à droite de S (lemme 1 (c)). Supposons $I^2 \neq \{0\}$, alors $I^2 = I$, et I est un demi-groupe 0-simple contenant un idéal 0-minimal à gauche de lui-même et un idéal 0-minimal à droite de lui-même ([3] théorèmes 2.29 et 2.35) ; alors I est complètement 0-simple, donc contient un idempotent non nul, ce qui est en contradiction avec $I \subseteq S^\times$ et le lemme 2 (a) ; donc $I^2 = \{0\}$, et le facteur principal associé à un élément non nul de I est ni 0-simple, ni simple, ce qui entraîne S non semi-simple.

(C) $\Longrightarrow$ (B) suit du théorème 1 ;

(C) $\Longrightarrow$ (D) suit facilement du théorème 1 ;

(D) $\Longrightarrow$ (C) : si S est réunion 0-directe de demi-groupes 0-simples duaux S_i , $i \in I$, comme chaque S_i est régulier (lemme 4), S est clairement régulier, donc $S^\times = \{0\}$ d'après le théorème 1 (a).

Remarque 1. - Si $S^\times \neq \{0\}$, nous avons vu qu'il existait un idéal nilpotent I de S contenu dans $S^\times$, on en déduit facilement qu'un demi-groupe dual est sans idéaux nilpotents si, et seulement si, $S^\times = \{0\}$. Le théorème 1 (b) qui donne la structure d'un tel demi-groupe, permet de retrouver l'essentiel des résultats de NUMAKURA [10] et KRAJNAKOVA [8].

Remarque 2. - Après lecture du corollaire 1.1, on peut se demander si, dans un demi-groupe dual, tout facteur principal 0-simple est complètement 0-simple ; nous donnons ci-dessous (corollaire 2.1) une réponse partielle à cette question ; la réponse complète n'est pas connue.

THÉORÈME 2. - Soient S un demi-groupe, a un élément de S ; alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

(A) $a \mathcal{L} a^2$;

(B) $a \mathcal{R} a^2$;

(C) la $\mathcal{H}$-classe de a est un groupe.

Démonstration. - Soit a un élément de $S \setminus S^\times$ tel que $a \mathcal{R} a^2$; il suit du théorème 1 qu'il y a un idempotent unique e dans la $\mathcal{R}$-classe de a ; $ea = a$, d'où $a^2 = aea$; comme $a \mathcal{R} a^2$, il existe x dans S tel que $a = a^2 x = (ae)(ax)$; alors $a \mathcal{R} ae$. La $\mathcal{D}$-classe de a étant régulière, il existe un idempotent f dans la $\mathcal{L}$-classe de ae , L_{ae} ; Se étant un idéal à gauche est réunion de $\mathcal{L}$-

classes ; alors Se , contenant ae , contient f , et $fe = f$, ce qui n'est possible que si $e = f$, d'après le lemme 2 (c) ; $a \mathcal{R} ae$ et e idempotent de L_{ae} entraînent que ae appartient à H_e ; donc ae appartient à $R_a \cap L_e$, et il suit du théorème 2.17 de [3] que $L_a \cap R_e = H_a$ est un groupe.

Soit maintenant a un élément non nul de $S^{\times}$ (si a est nul, l'équivalence de (A), (B) et (C) est immédiate) tel que $a \mathcal{R} a^2$; d'où $aS = a^2 S$ (lemme 1 (b)) ; aS n'est pas réduit à $\{0\}$ puisque $\ell(S) = \{0\}$ (lemme 1 (a)) ; de plus,

$$\ell(aS) \cap Sa = \{0\} ,$$

car s'il existe un élément y de S tel que $ya.aS = \{0\}$, nous avons

$$\{0\} = ya^2 S = yaS$$

et $ya = 0$ suit du lemme 1 (a).

Or si L_1 et L_2 sont deux idéaux à gauche d'un demi-groupe dual, nous avons vu que

$$r(L_1 \cap L_2) = r(L_1) \cup r(L_2) ;$$

donc $\ell(aS) \cap Sa = \{0\}$ entraîne

$$S = r[\ell(aS) \cap Sa] = aS \cup r(Sa) ;$$

comme a appartient à $S^{\times}$, $aS \subseteq S^{\times}$ et $r(Sa) \supseteq S \setminus S^{\times}$; alors $Sae = \{0\}$, c'est-à-dire $ae = 0$, pour tout idempotent e non nul de S (voir lemme 2 (a)), ce qui est en contradiction avec le lemme 2 (d) ; donc la relation $a \mathcal{R} a^2$ n'est pas possible.

Finalement comme (C) entraîne (B), nous avons prouvé l'équivalence des propriétés (B) et (C) ; un raisonnement analogue montrerait l'équivalence de (A) et (C).

Soient S un demi-groupe, a et b deux éléments de S ; la relation $L_a \leq L_b$ si, et seulement si, $L(a) \subseteq L(b)$ est une relation d'ordre partiel sur l'ensemble des $\mathcal{L}$-classes de S ; de même $R_a \leq R_b$ si, et seulement si, $R(a) \subseteq R(b)$ est une relation d'ordre partiel sur l'ensemble des $\mathcal{R}$-classes de S (voir [4] paragraphe 6.6).

COROLLAIRE 2.1. - <u>Soient</u> S <u>un demi-groupe dual,</u> J_a ($a \in S$, $a \neq 0$) <u>une</u> $\mathcal{J}$-<u>classe telle que le facteur principal associé</u> $J(a)/I(a)$ <u>soit</u> 0-<u>simple</u> ; <u>supposons que</u> J_a <u>vérifie l'une des trois propriétés suivantes</u> :

(a) J_a <u>contient une</u> $\mathcal{L}$-<u>classe minimale dans l'ensemble des</u> $\mathcal{L}$-<u>classes de</u> S <u>contenues dans</u> J_a ;

(b) J_a <u>contient une</u> $\mathcal{R}$-<u>classe minimale dans l'ensemble des</u> $\mathcal{R}$-<u>classes de</u> S <u>contenues dans</u> J_a ;

(c) J_a <u>contient un élément régulier dans</u> S .

<u>Alors</u> $J(a)/I(a)$ <u>est complètement</u> 0-<u>simple</u>.

Démonstration. - Supposons que J_a vérifie (a), et soit L une $\mathcal{L}$-classe minimale dans l'ensemble des $\mathcal{L}$-classes contenues dans J_a ; $L \cup \{I(a)\}$ est un idéal 0-minimal à gauche de $S/I(a)$ ([4], lemme 6.44) contenu dans $J(a)/I(a)$; il suit du théorème 2.35 de [3] que $J(a)/I(a)$ a la structure d'un demi-groupe 0-simple contenant un idéal 0-minimal à gauche de lui-même. Alors la $\mathcal{L}$-classe de a dans $J(a)/I(a)$ contient un sous-demi-groupe non vide ([4], lemme 8.30), donc il existe un élément b dans L_a tel que $b \mathcal{L} b^2$; la $\mathcal{H}$-classe de b étant un groupe (théorème 2), $J(a)/I(a)$ contient un idempotent non nul, c'est-à-dire est complètement 0-simple ([4], théorème 8.22)..

On montrerait de même que si J_a vérifie (b), $J(a)/I(a)$ est complètement 0-simple, et si J_a vérifie (c), il suit du théorème 1 que $J(a)/I(a)$ est complètement 0-simple.

Un élément a d'un demi-groupe S est croissant à gauche (resp. à droite) s'il existe un sous-ensemble propre de S , T , tel que $aT = S$ (resp. $Ta = S$) ; un élément ne pouvant être croissant de chaque côté (voir, par exemple, le livre de LJAPIN sur les Demi-groupes), on dit par simplification qu'un élément est croissant s'il est croissant d'un côté.

Nous avons vu [5] qu'il **n'existe** pas d'éléments croissants dans les demi-groupes stables (donc dans les demi-groupes compacts ou périodiques ou complètement semi-simples) ; un demi-groupe dual est un nouvel exemple de demi-groupe sans éléments croissants. Le lemme 6 suit du théorème 7 de [5].

LEMME 6. - *Soient* S *un demi-groupe,* A *l'ensemble des éléments* x *de* S *tels que* $xS = S$; *si* A *non vide,* A *est une* $\mathcal{R}$-*classe, et l'ensemble des éléments croissants à gauche de* S *est la réunion des* $\mathcal{H}$-*classes contenues dans* A *qui ne sont pas des groupes*.

COROLLAIRE 2.2. - *Un demi-groupe dual* S *ne possède pas d'éléments croissants*.

Supposons que S possède un élément a croissant à gauche ; alors il existe une partie propre de S , T , telle que $aT = S$; d'où $a^2 T = aS = S$; alors $a \mathcal{R} a^2$, donc la $\mathcal{H}$-classe de a est un groupe (théorème 2), ce qui est en contradiction avec le lemme 6.

3. $\mathcal{Q}$-classes d'un demi-groupe dual.

Le théorème 1 nous a permis de localiser le produit de deux éléments de $S \setminus S^\times$; nous allons étudier le produit ab lorsque l'un des deux éléments a et b appartient à $S \setminus S^\times$ (théorème 4), et préciser ce qui arrive lorsque les deux éléments sont situés dans $S^\times$ (théorème 5).

THÉORÈME 3. - *Soient* S *un demi-groupe dual,* a *un élément non nul de* S , e *et* f *les idempotents (uniques) tels que* $fa = ae = a$. *Alors* :

(a) L'égalité $a\alpha = a$ (resp. $\beta a = a$) entraîne α élément de H_e (resp. β élément de H_f) ;

(b) Soit b un élément de la $\mathcal{R}$-classe de a ; il existe deux éléments de S, c et d, tels que $ac = b$, $bd = a$, et un idempotent unique g tel que $bg=b$; alors e et g appartiennent à la même $\mathcal{D}$-classe, c appartient à $R_e \cap L_g$, d appartient à $L_e \cap R_g$;

(c) Soit x un élément de la $\mathcal{L}$-classe de a ; il existe deux éléments de S, y et z, tels que $ya = x$, $zx = a$, et un idempotent unique h tel que $hx=x$; alors f et h appartiennent à la même $\mathcal{D}$-classe, y appartient à $R_h \cap L_f$, z appartient à $L_h \cap R_f$.

Démonstration.

(a) Supposons d'abord que a soit un élément de $S \setminus S^{\times}$; $S^{\times}$ idéal et $a\alpha = a$ impliquent alors que α est dans $S \setminus S^{\times}$; il résulte du théorème 1 (puisque $a\alpha \neq 0$) que $a\alpha$ est dans $R_a \cap L_\alpha$ (donc $L_\alpha = L_a$), et que $L_a \cap R_\alpha$, c'est-à-dire la $\mathcal{H}$-classe de α, contient un idempotent ; le seul idempotent de la $\mathcal{L}$-classe de a étant e (conséquence facile du lemme 2 (d)), α appartient à H_e.

Supposons maintenant que a soit un élément non nul de $S^{\times}$; il existe un idempotent unique f' tel que α soit dans $f'S$; si $f' \neq e$, $a = a\alpha$ appartient à $Se\, f'S = S\,0\,S = 0$ (lemme 2 (c), en contradiction avec a non nul ; donc $e = f'$, et $\alpha S \subseteq eS$, ce qui entraîne $\ell(\alpha S) \supseteq \ell(eS) = \bigcup_f (Sf : f \in E ; f \neq e)$ d'après le lemme 2 (e).

Pour montrer que $\ell(\alpha S) = \ell(eS)$, on voit facilement qu'il suffit d'établir l'égalité $\ell(\alpha S) \cap Se = \{0\}$; si cette égalité n'était pas satisfaite, l'idéal à gauche $\ell(\alpha S) \cap Se$ serait non nul et contiendrait un idéal 0-minimal à gauche (lemme 1 (c)), qui ne pourrait être que l'unique idéal à gauche 0-minimal L contenu dans Se (lemme 2 (e)) ; or $Sa \subseteq Se$ et a non nul entraînent, pour les mêmes raisons (lemme 1 (c), lemme 2 (e)), que Sa contient L ; comme $a\alpha = a$ implique $xa\alpha=xa$ pour tout x de S, pour tout y non nul de L, nous avons $y\alpha = y$, et L ne peut être contenu dans $\ell(\alpha S)$; d'où $\ell(\alpha S) = \ell(eS)$.

Alors $r[\ell(\alpha S)] = r[\ell(eS)]$, c'est-à-dire $\alpha S = eS$, et α est élément de la $\mathcal{R}$-classe de e ; mais $a\alpha = a$ implique $a\alpha^2 = a$; α et α^2 appartiennent à la même $\mathcal{R}$-classe ; la $\mathcal{H}$-classe de α est un groupe (théorème 2), et comme la $\mathcal{R}$-classe de e contient un seul idempotent à savoir e, α est élément de H_e.

(b) Supposons d'abord que a soit un élément de $S \setminus S^{\times}$; $S^{\times}$ étant un idéal, on voit facilement que b, c et d appartiennent à $S \setminus S^{\times}$; alors $L_a \cap R_c$ contient un idempotent (théorème 1) qui ne peut être que e (lemme 2 (d)) et $b = ac$ appartient à $R_a \cap L_c$; il est clair que g est l'idempotent de $L_c = L_b$, donc c appartient à $R_e \cap L_g$; on montrerait de même que d appartient à $L_e \cap R_g$.

Supposons maintenant que a soit un élément non nul de $S^{\times}$; il est clair que b est un élément non nul de $S^{\times}$; soit k (resp. h) l'idempotent unique tel que $kc = c$ (resp. $hd = d$) ; comme $b = ac = aekc$ (resp. $a = bd = bghd$), il suit du lemme 2 (c) que $e = k$ et $g = h$; comme $a = acd$ et $b = bdc$, cd appartient à H_e et dc à H_g. Mais $eS = R_e \cup A$ avec $A \subseteq S^{\times}$, d'après la loi de composition dans $S \setminus S^{\times}$ (théorème 1) et le fait que $eS^{\times} \subseteq S^{\times}$. Si c appartenait à A, on aurait cd dans $AS \subseteq S^{\times} S \subseteq S^{\times}$, ce qui est impossible. Donc c appartient à R_e, et on montrerait de même que d est dans R_g ; cd n'étant pas nul, cd est situé dans $R_c \cap L_d$, donc e et g appartiennent à la même $\mathcal{D}$-classe ; de même, dc étant non nul est situé dans $R_d \cap L_c$; finalement, $L_d \cap R_c = H_e$, $L_c \cap R_d = H_g$, d'où c est situé dans $R_e \cap L_g$, d dans $L_e \cap R_g$.

Dans le théorème ci-dessous, il va être nécessaire de distinguer si S possède ou non un élément neutre. Si un demi-groupe dual possède un élément neutre d'un côté e, on a, par exemple, $Se = S$, et il suit du lemme 2 (d) que $S = Se = eS$, donc e est neutre et est l'unique idempotent non nul de S. Il suit alors du théorème 1 que $H_e = J_e = S \setminus S^{\times}$. Si un demi-groupe dual S ne possède pas d'élément neutre, il suit toujours du lemme 2 (d) que S possède au moins deux idempotents distincts et non nuls ; dans ce cas, le théorème 1 nous montre que si e est un idempotent non nul de S, les ensembles $S \setminus (S^{\times} \cup L_e)$ et $S \setminus (S^{\times} \cup R_e)$ sont non vides.

THÉORÈME 4. - *Soient* S *un demi-groupe dual sans élément neutre,* a *un élément non nul de* S, e *et* f *les idempotents tels que* $a = ae = fa$, *et* E *l'ensemble des idempotents de* S. *On appelle* T_e *le complémentaire de* R_e *dans* $S \setminus S^{\times}$, ${}_fT$ *le complémentaire de* L_f *dans* $S \setminus S^{\times}$, *et* D *la* $\mathcal{D}$-*classe de* a. *Alors* :

(a) $\{h \; ; \; h \in E \; ; \; Sh \cap D$ *non vide*$\}$ *est égal à* $E \cap D_e$ *et*
$\{h \; ; \; h \in E \; ; \; hS \cap D$ *non vide*$\}$ *est égal à* $E \cap D_f$;

(b) $aT_e = \{0\}$, $aR_e = R_a$, $R_a(S \setminus S^{\times}) = R_a \cup \{0\}$ *et* $D(S \setminus S^{\times}) = D \cup \{0\}$;

(c) ${}_fTa = \{0\}$, $L_f\, a = L_a$, $(S \setminus S^{\times})L_a = L_a \cup \{0\}$ *et* $(S \setminus S^{\times})D = D \cup \{0\}$;

(d) $D = L_a\, R_e = L_f\, R_a = L_f\, aR_e$;

(e) *Soit* g (*resp.* h) *un idempotent de la* $\mathcal{D}$-*classe de* e (*resp.* f) ; *on pose* $H = R_e \cap L_g$, $H^{\times} = R_h \cap L_f$; *nous avons*

$$aH = R_a \cap Sg \;, \quad H^{\times} a = L_a \cap hS \quad \text{et} \quad H^{\times} aH = D \cap hSg \;.$$

Démonstration.

(a) Supposons $D \cap Sh$ non vide $(h = h^2)$; $D \cap Sh$ étant réunion de $\mathcal{L}$-classes, il existe b dans la $\mathcal{R}$-classe de a tel que $bh = b$; donc h appartient à la $\mathcal{D}$-classe de e (théorème 3 (b)). Réciproquement, soit h un idempotent de la $\mathcal{D}$-classe de e ; il existe x dans $R_e \cap L_h$; alors $ax = axh$ appartient à $Sh \cap R_a$ (suit de $aR_e = R_a$ qui sera démontré dans (b)), et $Sh \cap D$ est non vide.

(b) Si b appartient à la $\mathcal{R}$-classe de a, il existe un élément c de R_e tel que $ac = b$ (théorème 3 (b)), donc $aR_e \supseteq R_a$; réciproquement, si x est un élément de R_e, il existe y dans S avec $xy = e$; alors $ax \,\mathcal{R}\, a$, car $(ax)y = ae = a$ d'où $aR_e = R_a$. Pour toute $\mathcal{R}$-classe R_g $(g = g^2)$ contenue dans $S \setminus S^{\times}$ telle que $g \neq e$, aR_g est contenu dans $SegS = S\,0\,S = \{0\}$, d'où $aT_e = \{0\}$; on en déduit immédiatement

$$R_a(S \setminus S^{\times}) = R_a \cup \{0\} \quad \text{et} \quad D(S \setminus S^{\times}) = D \cup \{0\} .$$

(c) s'établit d'une manière analogue.

(d) Si b est un élément de L_a, il est clair que $be = b$, d'où $bR_e = R_b$; on en déduit $D = L_a R_e$ et dualement $D = L_f R_a$; comme $L_f a = L_a$, $D = L_a R_e$ entraîne $D = L_f aR_e$.

(e) Il est clair que $aH \subseteq R_a$; comme $H \subseteq Sg$, $aH \subseteq SeSg \subseteq S_g$, d'où $aH \subseteq R_a \cap Sg$; réciproquement, si b est un élément de $R_a \cap Sg$, il existe c tel que $b = ac$, d'où $b = bg = acg$; cg appartient à Sg, à R_e (théorème 3 (b)), donc à H (théorème 1), et $aH = R_a \cap Sg$; nous avons dualement $H^{\times} a = L_a \cap hS$. Enfin, pour tout élément x de H, $fax = ax$, d'où $L_f\, ax = L_{ax}$; il suit que $H^{\times}\, ax = L_{ax} \cap hS$, d'où $H^{\times}\, aH = D \cap hSg$.

Si S est dual avec élément neutre, pour tout élément a de S, $ae = ea = a$, et les ensembles T_e et ${}_eT$ sont vides ; on obtient sans difficulté les résultats suivants :

THÉORÈME 4 bis. - Soient S un demi-groupe dual avec élément neutre e, $G = S \setminus S^{\times}$ le groupe maximal contenant e, a un élément non nul de S, et D la $\mathcal{D}$-classe de a ; alors :

(a) $R_a = aG = R_a G$;

(b) $L_a = Ga = GL_a$;

(c) $D = GaG = GD = DG = GDG$.

COROLLAIRE 4.1. - Soient S un demi-groupe dual, a un élément non nul de S, e et f les idempotents tels que $a = ae = fa$; on note respectivement H, R, L, D, la $\mathcal{H}$-classe de a, la $\mathcal{R}$-classe de a, la $\mathcal{L}$-classe de a, la $\mathcal{D}$-classe de a :

(a) $\{Lx \; ; \; x \in R_e\}$ est l'ensemble des $\mathcal{L}$-classes de D.

(b) $\{yR \; ; \; y \in L_f\}$ est l'ensemble des $\mathcal{R}$-classes de D.

(c) $\{Hx \; ; \; x \in R_e\}$ est l'ensemble des $\mathcal{H}$-classes de R.

(d) $\{yH \; ; \; y \in L_f\}$ est l'ensemble des $\mathcal{H}$-classes de L.

(e) $\{yHx \; ; \; y \in L_f \; ; \; x \in R_e\}$ est l'ensemble des $\mathcal{H}$-classes de D.

Si x appartient à R_e, ax est élément de R, donc $Hx \cap R$ est non vide ; il suit du lemme 3.15 de [3] que Hx est une $\mathcal{H}$-classe contenue dans R, et que Lx est la $\mathcal{L}$-classe contenant Hx. Comme $aR_e = R_a$, (a) et (c) suivent sans difficulté ; dualement, nous obtenons (b) et (d) ; (e) s'obtient en combinant (c) et (d), et en remarquant que, pour tout élément z de L, nous avons $ze = z$.

COROLLAIRE 4.2. - *Les ensembles SE_α et $E_\alpha S$ du lemme 3 sont réunion de $\mathcal{D}$-classes.*

Suit immédiatement du théorème 4 (a).

THÉORÈME 5. - *Soient S un demi-groupe dual, a et b deux éléments non nuls de S, et e, f, g, h, les idempotents tels que $a = ae = fa$, $b = gb = bh$; si $D_a D_b$ n'est pas réduit à $\{0\}$, e et g appartiennent à la même $\mathcal{D}$-classe ; dans ce qui suit, nous supposerons que c'est le cas, et nous poserons $H = D_e = H_e$ si la $\mathcal{D}$-classe de e contient un seul idempotent, et $H = (R_e \cap L_g) \cap \{0\}$ dans le cas contraire. Alors :*

(a) $L_a R_b = D_{ab}$, *donc le produit LR d'une $\mathcal{L}$-classe L et d'une $\mathcal{R}$-classe R est toujours une $\mathcal{D}$-classe ;*

(b) $aR_b = R_{ab}$; $L_a b = L_{ab}$; $aL_b = R_a b = R_a L_b = aHb$;

(c) $R_a R_b = aD_b$ *est le saturé par* $\mathcal{R}$ *de* aHb ;
$L_a L_b = D_a b$ *est le saturé par* $\mathcal{L}$ *de* aHb ;
$D_a D_b$ *est le saturé par* $\mathcal{D}$ *de* aHb.

En particulier tout produit de $\mathcal{R}$-classes (resp. de $\mathcal{L}$-classes, de $\mathcal{D}$-classes) est réunion de $\mathcal{H}$-classes (resp. de $\mathcal{L}$-classes, de $\mathcal{D}$-classes).

Démonstration. - Supposons $D_a D_b$ non réduit à $\{0\}$; il existe c dans D_a, d dans D_b avec $cd \neq 0$, donc un idempotent k tel que $ck = c$ et $kd = d$; $ck = c$ et $ae = a$ entraînent que k appartient à la $\mathcal{D}$-classe de e (théorème 4 (a)) ; on voit de même que k appartient à la $\mathcal{D}$-classe de g ($kd = d$ et $gb = b$) donc e et g sont dans la même $\mathcal{D}$-classe.

(a) $L_a = L_f a$ et $R_b = bR_h$ entraînent $L_a R_b = L_f abR_h$; comme $fabh = ab$, $L_f abR_h = D_{ab}$ (théorème 4 (d)).

(b) De même, $aR_b = abR_h = R_{ab}$ et $L_a b = L_f ab = L_{ab}$.

Nous allons distinguer deux cas suivant que la $\mathcal{D}$-classe de e contient ou non au moins deux idempotents distincts.

Si la $\mathcal{D}$-classe de e contient un seul idempotent, nous avons

$$e = g \,, \quad R_e = D_e = H_e \quad \text{et} \quad R_e L_g = L_g = R_e = H_e \,;$$

d'où $aL_b = aL_g b = aH_e b$; de même,

$$R_a b = aR_e b = aH_e b \quad \text{et} \quad R_a L_b = aR_e L_g b = aH_e b \,.$$

Supposons que la $\mathcal{D}$-classe de e contienne au moins deux idempotents distincts ; $aL_b = aL_g\, b$; il suit du théorème 4 (b) que $aR_e = R_a$ et $a(S \setminus S^{\times} \cup R_e) = \{0\}$. Comme $L_g \setminus R_e \cap L_g$ n'est pas vide (même si $g = e$), aL_b contient $a(L_g \setminus R_e \cap L_g)b$ c'est-à-dire 0 et

$$aL_b = a(R_e \cap L_g)\, b \cup \{0\} = aHb \ ;$$

on voit de même que

$$R_a\, b = aR_e\, b = a(R_e \cap L_g)\, b \cup \{0\} = aHb \ .$$

Pour déterminer $R_a\, L_b$ nous avons besoin de $R_e\, L_g$, car $R_a\, L_b = aR_e\, L_g\, b$; soient x dans R_e et y dans L_g, alors ou $xy = 0$, ou xy appartient à $R_x \cap L_y$ (théorème 1), c'est-à-dire $R_e \cap L_g$, d'où

$$R_e\, L_g \subseteq (R_e \cap L_g) \cup \{0\} \ ;$$

réciproquement, si z appartient à $R_e \cap L_g$, $ez = z$, d'où $e(R_e \cap L_g) = R_e \cap L_g$; en particulier,

$$R_e\, L_g \supseteq e(R_e \cap L_g) = R_e \cap L_g \quad \text{et} \quad R_e\, L_g = (R_e \cap L_g) \cup \{0\}$$

c'est-à-dire H, d'où $R_a\, L_b = aHb$.

(c) $R_a\, R_b = aR_e\, bR_h = aHbR_h$ puisque $aR_e\, b = R_a\, b = aHb$; pour tout x de H, tel que axb soit non nul, il est clair que $axbh = axb$, d'où $axb\, R_h = R_{axb}$, donc $R_a\, R_b$ est le saturé par $\mathcal{R}$ de aHb ; comme $D_b = L_g\, bR_h$ (théorème 4 (d)), $aD_b = aL_g\, bR_h$; mais $aL_g\, b = aL_b = aHb$, d'où $aD_b = aHbR_h$, c'est-à-dire $R_a\, R_b$.

Dualement, on obtient $L_a\, L_b = D_a\, b = L_f\, aHb$ c'est-à-dire le saturé par $\mathcal{L}$ de aHb.

$D_a\, D_b = L_f\, aR_e\, L_g\, bR_h$ (théorème 4 (d)) ; mais nous avons vu ci-dessus que $R_e\, L_g$ est égal à H, d'où $D_a\, D_b = L_f(aHb)\, R_h$; pour tout x de H tel que axb soit non nul, on a $faxb = axb = axbh$, alors $L_f(aHb)\, R_h$ est le saturé par $\mathcal{D}$ de aHb (théorème 4 (d)).

Remarque. - Même si S est un demi-groupe dual possédant un élément neutre e (dans ce cas $H = H_e = S \setminus S^{\times}$), il n'y a aucune raison pour que aHb soit contenu dans une seule $\mathcal{D}$-classe. En effet, si L_b contient au moins deux éléments b et c non $\mathcal{R}$-équivalents, bS est différent de cS (lemme 1 (b)), donc $\ell(bS)$ est distinct de $\ell(cS)$; supposons par exemple l'existence de a dans $\ell(bS) \setminus \ell(cS)$, alors $0 = ab = aeb$ et $0 \neq ac = axb$ avec x dans H, puisque $c\, \mathcal{L}\, b$ [Si $\ell(bS) \setminus \ell(cS)$ était vide, on pourrait choisir a dans $\ell(cS) \setminus \ell(bS)$, et on aurait de même $aec = 0$ et $axc \neq 0$ pour un élément x dans H]

4. Groupes de Schützenberger.

Nous allons établir une suite de lemmes qui nous amèneront au théorème 6.

LEMME 7. - *Soient* S *un demi-groupe dual,* a *un élément non nul de* S, *et* e

et f les idempotents tels que $a = ae = fa$. On pose

$$K_a = \{x \in S \ ; \ ax \in H_a\} \ , \quad {}_aK = \{x \in S \ ; \ xa \in H_a\} \ ,$$

$$N_a = \{x \in S \ ; \ ax = a\} \ , \quad {}_aN = \{x \in S \ ; \ xa = a\} \ .$$

Alors K_a et N_a (resp. ${}_aK$ et ${}_aN$) sont des sous-groupes de H_e (resp. H_f) ; en outre $H_a = a(K_a) = ({}_aK)a = H_a\alpha = \beta H_a$ pour tout α de K_a et tout β de ${}_aK$.

Soit x un élément de K_a ; $ax \mathcal{R} a$ donc x appartient à R_e (théorème 3) ; comme $axe = ax$, il suit du théorème 4 (e) que x appartient à H_e ; $H_a x \cap H_a$ étant non vide, $H_a x = H_a$ suit du corollaire 4.1 (c).

Alors, si x et y sont deux éléments de K_a, $H_a = H_a x = H_a y$, d'où

$$H_a xy = H_a yx = H_a \ ;$$

si x^{-1} est l'inverse de x dans le groupe H_e,

$$H_a = H_a e = H_a xx^{-1} = H_a x^{-1} \ ,$$

donc x^{-1} appartient à K_a, et K_a est un sous-groupe de H_e ; le reste du lemme s'établit par des méthodes analogues.

LEMME 8. - Sous les mêmes hypothèses qu'au lemme 7, les ensembles K_a et N_a (resp. ${}_aK$ et ${}_aN$) ne dépendent que de la $\mathcal{L}$-classe (resp. la $\mathcal{R}$-classe) de a.

Supposons $a \mathcal{L} b$ pour toute la démonstration (b dans S) ; il existe x et y dans S tels que $a = xb$ et $b = ya$; si α appartient à N_a, $a\alpha = a$, d'où $ya\alpha = ya$, c'est-à-dire $b\alpha = b$ et $N_a \subseteq N_b$; de même, $b\beta = b$ (β dans N_b) entraîne $xb\beta = xb$; d'où $N_a = N_b$.

Soit α un élément de K_a ; $a\alpha$ appartient à H_a, donc $ya\alpha$ appartient à yH_a ; mais yH_a contient $ya = b$, et $yH_a \cap L_a$ est non vide ; il suit du lemme 3.15 de [3] que $yH_a = H_b$; alors $ya\alpha = b\alpha$ appartient à H_b, et $K_a \subseteq K_b$; la réciproque s'établit en permutant a et b.

Rappelons brièvement comment est construit le groupe de Schützenberger à droite associé à une $\mathcal{H}$-classe H d'un demi-groupe S ; si S est sans élément neutre, on note $S^1 = S \cup \{1\}$ avec $a1 = 1a = a$, pour tout a de $S \cup \{1\}$. On définit $T(H) = \{t \in S^1 \ ; \ Ht \subseteq H\}$; à tout élément t de $T(H)$, on associe la translation à droite sur H, γ_t, définie par $\gamma_t(x) = xt$ (x dans H).

Alors $T^\times(H) = \{\gamma_t \ ; \ t \in T(H)\}$ est un groupe simplement transitif de permutations de H, et $T^\times(H)$ est isomorphe à $T(H)/\varepsilon$, ε étant l'équivalence suivante ; $t \,\varepsilon\, t'$ (t et t' dans $T(H)$) si, et seulement si, $ht = ht'$ pour tout élément h de H.

Remarquons qu'il était nécessaire de considérer $S \cup \{1\}$ pour définir $T(H)$, car il peut arriver que $H_a = \{a\}$ et qu'il n'existe pas d'élément x dans S tel que $ax = a$; alors $\{t \in S \ ; \ H_a t \subseteq H_a\}$ est vide. Ceci n'arrive jamais dans un demi-groupe dual, car il existe toujours un idempotent e tel que $ae = a$.

LEMME 9. - Sous les hypothèses du lemme 7, K_a/N_a et ${}_aK/{}_aN$ sont isomorphes au groupe de Schützenberger à droite de H_a ; en particulier N_a (resp. ${}_aN$) est un sous-groupe distingué de K_a (resp. ${}_aK$) .

On voit facilement que $K_a = T(H_a)$ si S a un élément neutre, et que

$$K_a = T(H_a) \setminus \{1\}$$

dans le cas contraire. On note ε_a l'équivalence suivante sur K_a : $x \, \varepsilon_a \, y$ (x et y dans K_a) si, et seulement si, $ax = ay$; il est clair que $hx = hy$ pour tout élément h de H_a , donc ε_a est la restriction à K_a de l'équivalence ε , définie ci-dessus sur $T(H_a)$; ε_a est régulière à droite, car $ax = ay$ entraîne $ax\alpha = ay\alpha$ pour tout α de K_a ; montrons que ε_a est régulière à gauche : $ax=ay$ entraîne $axy^{-1} = a$ (y^{-1} inverse de y dans le groupe H_e) , et xy^{-1} dans N_a ; mais $N_a = N_{a\alpha}$ pour tout α de K_a d'après le lemme 8 ; donc $a\alpha xy^{-1} = a\alpha$, c'est-à-dire $a\alpha x = a\alpha y$ pour tout α de K_a . Le groupe $K_a/\varepsilon^{\times}$ est clairement isomorphe à $T(H_a)/\varepsilon$, car il y a toujours un élément b dans S tel que $ab = a$; la classe de l'élément neutre de K_a , e , étant N_a , N_a est un sous-groupe distingué de K_a , et K_a/N_a est isomorphe à $T(H_a)/\varepsilon$; un raisonnement analogue montrerait que ${}_aK/{}_aN$ est isomorphe à $T(H_a)/\varepsilon$; (${}_aK/{}_aN$ n'est pas le groupe de Schützenberger à gauche de H_a qui est anti-isomorphe en général au groupe de Schützenberger à droite).

Compte tenu des résultats du lemme 8, si L (resp. R) est la $\mathcal{L}$-classe de a (resp. la $\mathcal{R}$-classe de a) , nous noterons K_L et N_L (resp. ${}_RK$ et ${}_RN$) les ensembles K_a et N_a (resp. ${}_aK$ et ${}_aN$) .

Rappelons que si H est un sous-groupe d'un groupe G , l'image aHa^{-1} $(a \in G)$ de H par un automorphisme intérieur de G est dit conjugué de H .

LEMME 10. - Soient S un demi-groupe dual, D une $\mathcal{D}$-classe de S , et e (resp. f) un idempotent de S tel que $D \cap Se$ (resp. $D \cap fS$) soit non vide ; on note $\overline{L}$ (resp. $\overline{L}_e$) l'ensemble des $\mathcal{L}$-classes de S contenues dans D (resp. dans $D \cap Se$) ; on définit dualement $\overline{R}$ (resp. $\overline{R}_f$) comme l'ensemble des $\mathcal{R}$-classes de S contenues dans D (resp. dans $D \cap fS$) ; alors :

(a) Les ensembles K_L (resp. N_L , ${}_RK$, ${}_RN$) , où L parcourt $\overline{L}$ et R parcourt $\overline{R}$, sont isomorphes entre eux.

(b) Soient L_0 dans $\overline{L}_e$ et R_0 dans $\overline{R}_f$, alors l'ensemble des K_L (resp. N_L , ${}_RK$, ${}_RN$) , où L parcourt $\overline{L}_e$ et R parcourt $\overline{R}_f$, est l'ensemble des sous-groupes conjugués de K_{L_0} (resp. N_{L_0} , ${}_{R_0}K$, ${}_{R_0}N$) .

Démonstration.

(a) Soient a et b deux éléments de D appartenant à la même $\mathcal{R}$-classe, g et h les idempotents tels que $ag = a$ et $bh = b$.

Supposons $g \neq h$; alors g et h appartiennent à la même $\mathcal{D}$-classe (théorème 4 (a)), et il existe α dans S tel que $b = a\alpha$; α appartient à $R_g \cap L_h$ d'après le théorème 3, il existe un inverse α' de α dans $L_g \cap R_h$ ([3] théorème 2.18), d'où $\alpha\alpha' = g$ et $\alpha'\alpha = h$ ([3] théorème 2.17) ; on sait que

$$\varphi_1 : x \longrightarrow \alpha' x\alpha \quad \text{et} \quad \varphi_2 : y \longrightarrow \alpha y\alpha'$$

sont des isomorphismes mutuellement réciproques de H_g sur H_h et H_h sur H_g respectivement ([3] théorème 2.20). Nous allons montrer que $\varphi_1(N_a) = N_b$ et $\varphi_1(K_a) = K_b$.

$\varphi_1(N_a) = N_b$: en effet, soit x dans N_a ; $ax = a$, d'où $ax\alpha = a\alpha = b$; mais $b\alpha' = a\alpha\alpha' = ag = a$; alors $(ax\alpha = b)$ entraîne $(b\alpha' x\alpha = b)$; $\alpha' x\alpha = \varphi_1(x)$ appartient à N_b , et $\varphi_1(N_a) \subseteq N_b$; en permutant a et b , on obtient $\varphi_2(N_b) \subseteq N_a$ d'où

$$N_b = \varphi_1 \circ \varphi_2(N_b) \subseteq \varphi_1(N_a) \ .$$

$\varphi_1(K_a) = K_b$: si x appartient à K_a , $H_a x = H_a$ (lemme 7) ; considérons $H_b \varphi_1(x) = H_b \alpha' x\alpha$; $H_b \alpha'$ étant une $\mathcal{H}$-classe (corollaire 4.1) contenant $b\alpha' = a\alpha\alpha' = a$, $H_b \alpha' = H_a$; alors $H_b \varphi_1(x) = H_a x\alpha = H_a \alpha$, et $H_a \alpha$ étant une $\mathcal{H}$-classe contenant $a\alpha = b$, $H_a \alpha = H_b$, d'où $\varphi_1(K_a) \subseteq K_b$, et la réciproque s'établit comme pour N_a .

Le cas particulier où $g = h$ va découler de (b).

(b) Soient a un élément de L_0 , L un élément de $\overline{L}_e$, et b un élément de $L \cap R_a$; il existe β dans H_e tel que $a\beta = b$ (théorème 4 (e)) ; nous allons montrer que $K_{a\beta} = \beta^{-1} K_a \beta$, β^{-1} étant l'inverse de β dans H_e .

Soit γ un élément de $K_{a\beta}$; alors $H_{a\beta}\gamma = H_{a\beta}$ (lemme 7) ; d'où $H_{a\beta\gamma} = H_{a\beta}$; Du corollaire 4.1 suit :

$$H_a = (H_{a\beta})\beta^{-1} = H_{a\beta\gamma}\, \beta^{-1} = H_{a\beta\gamma\beta^{-1}} = H_a\, \beta\gamma\beta^{-1} \ ;$$

donc $\beta\gamma\beta^{-1}$ est dans K_a , et $\beta K_{a\beta}\, \beta^{-1} \subseteq K_a$, c'est-à-dire $K_{a\beta} \subseteq \beta^{-1} K_a \beta$; d'autre part, si γ est un élément de K_a , c'est-à-dire si $H_a \gamma = H_a$, nous avons :

$$H_{a\beta}(\beta^{-1}\gamma\beta) = H_{a\beta\beta^{-1}}\, \gamma\beta = H_a\, \gamma\beta = H_a\, \beta = H_{a\beta} \ ;$$

donc $\beta^{-1} K_a \beta \subseteq K_{a\beta}$, ce qui prouve l'égalité.

Nous avons de même $N_{a\beta} = \beta^{-1} N_a \beta$; par exemple, si x est un élément de N_a , $ax = a$, d'où $ax\beta = a\beta$; mais $ax\beta = a\beta\beta^{-1} x\beta$, d'où $a\beta = a\beta(\beta^{-1} x\beta)$, et $\beta^{-1} N_a \beta \subseteq N_{a\beta}$; l'inclusion inverse s'établit de la même façon.

LEMME 11. - Sous les mêmes hypothèses qu'au lemme 10, on pose

$$N = \bigcap (N_L \ ; \ L \in \overline{L}_e) \quad \underline{\text{et}} \quad M = \bigcap ({}_R N \ ; \ R \in \overline{R}_f) \ ;$$

alors N (resp. M) est un sous-groupe distingué de H_e (resp. H_f) ; H_e/N

(resp. H_f/M) est un groupe transitif de permutations de $R \cap Se$ (resp. $L \cap fS$), R (resp. L) étant une $\mathcal{R}$-classe (resp. une $\mathcal{L}$-classe) quelconque contenue dans D ; si N_L (resp. ${}_RN$) est distingué dans H_e (resp. H_f), H_e/N (resp. H_f/M) est un groupe simplement transitif de permutations de $R \cap Se$ (resp. $L \cap fS$).

Soient a un élément de D, e l'idempotent tel que $ae = a$, et x un élément de S tel que ax soit dans $R_a \cap Se$; x appartient à H_e (théorème 3 (b)) ; comme $R_a \cap Se = aH_e$ (théorème 4 (e))

$$(R_a \cap Se)x = aH_e\, x = aH_e = R_a \cap Se \text{ ;}$$

supposons $ax = bx$ avec a et b dans $R_a \cap Se$; alors, si x^{-1} est l'inverse de x dans H_e, $axx^{-1} = bxx^{-1}$, d'où $a = b$; on note γ_x la translation à droite sur $R_a \cap Se$, définie par $\gamma_x(b) = bx$; alors $T^{\times}(R_a \cap Se) = \{\gamma_x \; ; \; x \in H_e\}$ est un groupe transitif de permutations de $R_a \cap S_e$; l'application $x \rightarrow \gamma_x$ de H_e sur $T^{\times}(R_a \cap Se)$ est clairement un homomorphisme dont le noyau est $\{x \in H_e \; ; \; ax = a$ pour tout a de $R_a \cap Se\}$, on voit facilement que c'est $N = \bigcap N_L$, L parcourant $\overline{L}_e$, donc N est distingué dans H_e, et $T^{\times}(R_a \cap Se)$ est isomorphe à H_e/N.

En général, $T^{\times}(R_a \cap Se)$ n'est pas simplement transitif, car $ax = ax'$ implique seulement $bx = bx'$ pour tout élément de la $\mathcal{H}$-classe de a ; cependant, si L est un élément de $\overline{L}_e$ tel que N_L soit distingué dans H_e, il suit du lemme 10 (b), que les N_L coïncident pour tous les éléments L de L_e ; en particulier, ($N = N_L$ et $ax' = ax$ (x et x' dans H_e)) entraîne ($ax'\,x^{-1} = a$ (x^{-1} inverse de x dans H_e)), d'où $bx'\,x^{-1} = b$, c'est-à-dire $bx' = bx$ pour tout élément b de $R_a \cap Se$.

Dans ce qui suit, si H est un sous-groupe d'un groupe G, nous noterons $G|H$ l'ensemble des classes à droite de G par rapport à H.

LEMME 12. - Soient S un demi-groupe dual, a un élément non nul de S, e et f les idempotents tels que $a = ae = fa$, D la $\mathcal{D}$-classe de a, et $\overline{L}_g$, $\overline{R}_h$ (h et g idempotents) $\overline{L}$ et $\overline{R}$, définis comme au lemme 10. L (resp. R) désigne un élément quelconque de L_e (resp. R_f).

Alors les ensembles décrits ci-dessous dans la même partie (ils sont numérotés de 1 à 11) sont équipotents :

(1) $\overline{L}_e$ et H_e/K_L ;

(2) $\overline{R}_f$ et $H_f/{}_RK$;

(3) Les ensembles $\overline{L}_g$, g parcourant $E \cap D_e$;

(4) Les ensembles $\overline{R}_h$, h parcourant $E \cap D_f$;

(5) $\overline{L}$ et $(H_e/K_L) \times (D_e \cap E)$;

(6) $\overline{R}$ et $(H_f/{}_RK) \times (D_f \cap E)$;

(7) H_e/N_L <u>et chacun des ensembles</u> $R^* \cap Sg$, g <u>parcourant</u> $E \cap D_e$; <u>et</u> R^* <u>parcourant</u> $\overline{R}$;

(8) $H_f/_R N$ <u>et chacun des ensembles</u> $L^\times \cap hS$, h <u>parcourant</u> $E \cap D_f$, <u>et</u> $L^\times$ <u>parcourant</u> $\overline{L}$;

(9) $H_E/N_L \times H_f/_R K$, $H_e/K_L \times H_f/_R N$, <u>ainsi que</u> $D \cap hSg$, g <u>parcourant</u> $E \cap D_e$ <u>et</u> h <u>parcourant</u> $E \cap D_f$;

(10) <u>Les ensembles</u> ${}_hH_g$ = {$\mathcal{H}$<u>-classes contenues dans</u> $D \cap hSg$} , g <u>parcourant</u> $E \cap D_e$, <u>et</u> h <u>parcourant</u> $E \cap D_f$; <u>ainsi que</u> $H_e/K_L \times H_f/_R K$;

(11) $(D_e \cap E) \times (D_f \cap E) \times (H_e/N_L) \times (H_f/_R K)$,
$(D_e \cap E) \times (D_f \cap E) \times (H_e/K_L) \times (H_f/_R N)$, <u>ainsi que</u> D .

<u>Démonstration.</u>

(1) Il suit du corollaire 4.1 et du théorème 4 (e) que $\{Lx ; x \in H_e\} = \overline{L}_e$, si L désigne un élément de $\overline{L}_e$; soient x et y dans H_e , y^{-1} l'inverse de y dans H_e , alors nous avons :

$(Lx = Ly) \Longleftrightarrow (Lxy^{-1} = L) \Longleftrightarrow (xy^{-1}$ élément de $K_L) \Longleftrightarrow (x$ appartient à $K_L\, y)$,

d'où l'existence d'une bijection entre $\overline{L}_e$ et H_e/K_L .

(2) s'établit dualement.

(3) Soient g un idempotent de la $\mathcal{D}$-classe de e , α un élément de $R_e \cap L_g$, α' l'inverse de α dans $L_e \cap R_g$ ([3] théorème 2.18), d'où $\alpha\alpha' = e$ et $\alpha'\,\alpha{=}g$; on considère l'application φ qui, à tout élément L_0 de $\overline{L}_e$, associe $L_0\,\alpha$; il suit du corollaire 4.1 que $L_0\,\alpha$ est une $\mathcal{L}$-classe de D et, comme $L_0\,\alpha g{=}L_0\,\alpha$, $L_0\,\alpha$ appartient à $\overline{L}_g$.

φ est injective car, si L_0 et L_1 sont deux éléments de $\overline{L}_e$ tels que $L_0\,\alpha = L_1\,\alpha$, nous avons $L_0\,\alpha\alpha' = L_1\,\alpha\alpha'$, d'où $L_0\,e = L_1\,e$, c'est-à-dire $L_0{=}L_1$; soit maintenant $L^\times$ un élément de $\overline{L}_g$; si ℓ est dans $L^\times$, $\ell = \ell g = \ell\alpha'\,\alpha$; comme $\ell\alpha'\,e = \ell\alpha'$, $\ell\alpha'$ appartient à $R_\ell \cap Se$ (théorème 4 (e)), et $L_{\ell\alpha'}\,\alpha = L^\times$ suit du corollaire 4.1 ; donc φ est surjective, et les ensembles $\overline{L}_e$ et $\overline{L}_g$ sont équipotents.

(4) s'établit dualement.

(5) (resp. 6) est une conséquence de (1) et (3) (resp. (2) et (4)) du théorème 4 (a).

(7) $aH_e = R_a \cap Se$ découle du théorème 4 (e) ; soient x et y dans H_e , y^{-1} l'inverse de y dans H_e ; nous avons

$(ax = ay) \Longleftrightarrow (axy^{-1} = a) \Longleftrightarrow (xy^{-1}$ élément de $N_{L_a}) \Longleftrightarrow (x$ élément de $N_{L_a}\, y)$;

d'où l'existence d'une bijection entre $R_a \cap Se$ et H_e/N_{L_a} ; si g est un idempotent de la $\mathcal{D}$-classe de e , l'équipotence de $R_a \cap Se$, et $R_a \cap Sg$ provient de (3) et du fait que les $\mathcal{H}$-classes d'une même $\mathcal{D}$-classe sont équipotentes ; cette dernière remarque entraîne l'équipotence de $R_1 \cap Sg$ et $R_2 \cap Sg$, lorsque R_1 et R_2 sont deux $\mathcal{R}$-classes de S contenues dans D .

(8) suit dualement.

(9) suit facilement de (1), (2), (7), (8), et entraîne (11).

(10) suit de (1), (2), (3) et (4).

En regroupant les lemmes 7 à 12, nous obtenons le théorème suivant.

THÉORÈME 6. - *Soient* S *un demi-groupe dual,* a *un élément non nul de* S , D *la* $\mathcal{D}$*-classe de* a , *et* e *et* f *les idempotents tels que* $a = ae = fa$; *on note* $\overline{L}$ (*resp.* $\overline{L}_e$) *l'ensemble des* $\mathcal{L}$*-classes de* S *contenues dans* D (*resp. dans* $D \cap Se$) . *On définit de même* $\overline{R}$ (*resp.* $\overline{R}_f$) *comme l'ensemble des* $\mathcal{R}$*-classes de* S *contenues dans* D (*resp.* $D \cap fS$) ; *enfin on pose*

$$K_a = \{x \in S \; ; \; ax \in H_a\} \; , \quad N_a = \{x \in S \; ; \; ax = a\} \; ,$$

$${}_aK = \{x \in S \; , \; ya \in H_a\} \; , \quad {}_aN = \{y \in S \; ; \; ya = a\} \; .$$

Alors K_a *et* N_a (*resp.* ${}_aK$ *et* ${}_aN$) *ne dépendent que de la* $\mathcal{L}$*-classe* (*resp. la* $\mathcal{R}$*-classe*) *de* a , *et seront notés* K_{L_a} , N_{L_a} (*resp.* ${}_{R_a}K$, ${}_{R_a}N$) . *Pour tout élément* L (*resp.* R) *de* $\overline{L}_e$ (*resp.* $\overline{R}_f$)*.* K_L *et* N_L (*resp.* ${}_RK$ *et* ${}_RN$) *sont des sous-groupes de* H_e (*resp.* H_f) . *De plus* :

(a) *pour tout* $L \in \overline{L}$ *et tout* $R \in \overline{R}$, N_L (*resp.* ${}_RN$) *est distingué dans* K_L (*resp.* ${}_RK$) ; $\bigcap (N_L : L \in \overline{L}_e)$ (*resp.* $\bigcap ({}_RN : R \in \overline{R}_f)$) *est distingué dans* H_e (*resp.* H_f) .

(b) *Si* L_0 (*resp.* R_0) *est un élément de* $\overline{L}_e$ (*resp.* $\overline{R}_f$) , $\{K_L \; ; \; L \in \overline{L}_e\}$ (*resp.* $\{{}_RK \; ; \; R \in \overline{R}_f\}$) *est l'ensemble des sous-groupes conjugués de* K_{L_0} (*resp.* ${}_{R_0}K$) . *Résultats analogues pour les* N_L *et les* ${}_RN$.

(c) *Les ensembles* K_L (*resp.* N_L , ${}_RK$, ${}_RN$) , *où* L *parcourt* $\overline{L}$, *et* R *parcourt* $\overline{R}$, *sont isomorphes entre eux.*

(d) K_L/N_L *est le groupe de Schützenberger à droite de toute* $\mathcal{H}$*-classe contenue dans* L , *et* ${}_RK/{}_RN$ *est isomorphe au groupe de Schützenberger à droite de toute* $\mathcal{H}$*-classe contenue dans* R ($L \in \overline{L}$ *et* $R \in \overline{R}$) .

(e) *Si* N_L (*resp.* ${}_RN$) *avec* L *élément de* $\overline{L}_e$ (*resp.* R *élément de* $\overline{R}_f$) *est distingué dans* H_e (*resp.* H_f) , H_e/N_L (*resp.* $H_f/{}_RN$) *est un groupe simplement transitif de permutations de* $R^{\times} \cap Se$ (*resp.* $L^{\times} \cap fS$) , $R^{\times}$ (*resp.* $L^{\times}$) *étant un élément de* $\overline{R}$ (*resp.* $\overline{L}$) .

(f) *On a toutes les équipotences du lemme* 12.

Cas particuliers.

1° Soit S dual avec élément neutre e tel que $S \setminus S^{\times} = H_e$ soit contenu dans le centre de S ; alors, pour tout x de H_e et pour tout a de S , ax (resp.

xa) appartient à $H_e a$ (resp. aH_e) , donc

$$H_e a = aH_e = R_a = L_a = H_a .$$

De plus,

$$H_a H_b = aH_e H_e b = aH_e b = H_e ab = H_{ab} ;$$

donc l'application de $S \to S/\mathcal{H}$ qui à a associe H_a est un homomorphisme ; $S/\mathcal{H}$ est un demi-groupe d'élément neutre $\{H_e\}$ dont toute $\mathcal{D}$-classe est triviale. On voit facilement que l'application qui, à un idéal à gauche L de S , associe $L/\mathcal{H}$ est une correspondance bijective entre l'ensemble des idéaux à gauche de S et l'ensemble des idéaux à gauche de $S/\mathcal{H}$; même remarque pour les idéaux à droite ; on en déduit facilement que $S/\mathcal{H}$ est dual.

2° Soit S dual avec élément neutre e tel que le groupe maximal contenant e , $S \setminus S^\times$, soit abélien ; alors pour toute $\mathcal{L}$-classe L (resp. $\mathcal{R}$-classe R) de S , N_L (resp. ${}_RN$) est distingué dans H_e . Donc nous pouvons associer à toute $\mathcal{R}$-classe R (resp. $\mathcal{L}$-classe L) de S , un groupe simplement transitif de permutations de R (resp. de L) à savoir H_e/N_L (resp. $H_e/{}_RN$) .

3° Soit S dual avec élément neutre e ; S contient un idéal 0-minimal unique M (lemme 3 (a)) et, compte tenu du lemme 1 (c) et du lemme 2 (e), M est à la fois unique idéal à gauche 0-minimal de S et unique idéal à droite 0-minimal de S , donc S est la réunion de $\{0\}$ et d'une $\mathcal{H}$-classe. Posons $M^* = M \setminus \{0\}$, et supposons que $N_{M^*} = {}_{M^*}N = \{e\}$ (dans ce cas, H_e est le groupe de Schützenberger de M^* puisque $K_{M^*} = {}_{M^*}K = H_e$) ; alors, pour tout élément a de S , $N_a = {}_aN = \{e\}$ (par exemple $(ax = a)$ entraîne $(mx = m)$ par tout élément m de M^* , puisque $M \subseteq Sa$ d'après le lemme 1 (c). Donc H_e est un groupe simplement transitif de permutations de R (resp. de L) , R (resp. L) étant une $\mathcal{R}$-classe (resp. une $\mathcal{L}$-classe) quelconque de S ; en particulier, H_e , R et L sont équipotents.

4° Soit S dual avec élément neutre e , et supposons que le groupe maximal contenant e , H_e , soit un groupe fini de n éléments. Soient D une $\mathcal{D}$-classe de S , et ℓ (resp. r) le nombre de $\mathcal{L}$-classes (resp. $\mathcal{R}$-classes) contenues dans D ; alors ℓ et r sont des diviseurs de n (lemme 12 (1)). Posons $n = m\ell = pr$; alors $m = \text{card } K_L$ et $p = \text{card } {}_RK$, L (resp. R) étant une $\mathcal{L}$-classe (resp. $\mathcal{R}$-classe) contenue dans D ; posons $\alpha = \text{card } N_L$, et $\beta = \text{card } {}_RN$; α (resp. β) divise m (resp. p) ; de plus $m/\alpha = p/\beta = h$, où h est le nombre d'éléments d'une $\mathcal{H}$-classe de D (K_L/N_L groupe de Schützenberger d'une $\mathcal{H}$-classe contenue dans L), donc h divise m , p et n . Le cardinal de D est $\ell r \frac{m}{\alpha} = \ell r \frac{p}{\beta}$, d'où $(nr/\alpha) = (n\ell/\beta)$ et $r\beta = \ell\alpha$.

On voit apparaître une liaison étroite entre les groupes maximaux contenus dans $S \setminus S^\times$ et la structure des $\mathcal{D}$-classes de S ; cette liaison sera développée dans une prochaine note.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BAER (R.). - Rings with duals, Amer. J. Math, t. 65, 1943, p. 569-584.

[2] BONSALL (F.) and GOLDIE (A.). - Annihilator algebras, Proc. London math. Soc., t. 4, 1954, p. 154-167.

[3] CLIFFORD (A. H.) and PRESTON (G. B.). - The algebraic theory of semigroups. Tome I. - Providence, American mathematical Society, 1961 (Mathematical Surveys, 7).

[4] CLIFFORD (A. H.) and PRESTON (G. B.). - The algebraic theory of semigroups. Tome II. - Providence, American mathematical Society, 1967 (Mathematical Surveys, 7).

[5] GERENTE (A.). - Idempotents $\mathcal{Q}$-primitifs dans un demi-groupe Semigroup Forum (à paraître).

[6] GRILLET (P. A.). - Intersections of maximal ideals in semigroups, Amer. math. Monthly, t. 76, 1969, p. 503-509.

[7] KAPLANSKY (I.). - Dual rings, Annals of Math., t. 49, 1948, p. 689-701.

[8] KRAJNAKOVA (D.). - On dual semigroups, Matem. Časopis, t. 20, 1970, p. 87-91.

[9] NAJMARK (M. A.). - Anneaux normés [en russe]. - Moskva, 1956 ; Normed rings. - Groningen, P. Noordhoff, 1959.

[10] NUMAKURA (K.). - Compact dual semigroups without nilpotent ideals, Duke math. J., t. 31, 1964, p. 555-574.

[11] SCHWARZ (Štefan). - On dual semigroups, Czechoslovak math. J., t. 10, 1960, p. 201-230.

[12] SCHWARZ (Štefan). - On the structure of dual semigroups, Czechoslovak math. J., t. 21, 1971, p. 461-483.

[13] WOLFSON (K. G.). - Annihilator rings, J. London math. Soc., t. 31, 1956, p. 94-104.

Note. - Cet exposé a fait l'objet d'une Note aux Comptes Rendus sous le titre $\mathcal{Q}$-classes dans un demi-groupe dual, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 275, 1972, Série A, p. 581-584.

Alain GERENTE
Laboratoire de Mathématiques
Centre d'Enseignement supérieur
Boîte postale 847
97400 SAINT DENIS DE LA RÉUNION