Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Michèle Benois

Conditions nécessaires et suffisantes de simplifiabilité des demi-groupes quotients d'un demi-groupe libre sur un ensemble fini par certaines congruences

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 25, nº 1 (1971-1972), exp. nº 10, p. 1-5

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1971-1972__25_1_A10_0>

Séminaire DUBREIL
(Algèbre)
25e année, 1971/72, nº 10, 5 p.

10-01

13 mars 1972

CONDITIONS NÉCESSAIRES ET SUFFISANTES DE SIMPLIFIABILITÉ DES DEMI-GROUPES QUOTIENTS D'UN DEMI-GROUPE LIBRE SUR UN ENSEMBLE FINI PAR CERTAINES CONGRUENCES

par Michèle BENOIS

1. Introduction.

L'étude des monoïdes peut, de façon grossière, se diviser en deux parties : l'étude de l'organisation interne du monoïde et l'étude de son plongement dans un groupe. Dans cette partie, il est nécessaire de savoir à quelles conditions un monoïde est simplifiable. A. I. MAL'CEV et J. LAMBESK ont donné des conditions générales, mais non décidables, de plongement dans un groupe, S. I. ADJAN a donné des conditions suffisantes particulières, mais décidables. Nous avons envisagé certaines familles de monoïdes pour lesquelles nous donnons des conditions nécessaires et suffisantes de simplifiabilité, plus exploitables que les conditions de MAL'CEV, et plus générales que celles de S. ADJAN. Cette étude ayant des liens profonds avec la théorie des langages, la famille de monoïdes étudiée est celle des quotients d'un monoïde libre finiment engendré X^* par une congruence finiment engendrée par un système S . Le groupe libre sur un ensemble X appartient à cette famille

$$S = ((x\bar{x} , 1) , \ x \text{ appartenant à } X \cup \bar{X}),$$

un quotient voisin, le quotient de X^* par la congruence engendrée par le système $S' = ((x\bar{x} , 1) , \ x$ appartenant à X), n'est pas simplifiable, car

$$x\bar{x}x \equiv x \quad \text{et} \quad \bar{x}x \not\equiv 1 \ , \quad \bar{x}x\bar{x} \equiv x \quad \text{et} \quad \bar{x}x \not\equiv 1 \ .$$

Notre étude a porté sur les monoïdes quotients de X^* par des congruences finiment engendrées dites parfaites, introduites pas M. NIVAT, dont l'intérêt est, en particulier, qu'on sait décider de l'équivalence, d'une part de deux éléments de X^* dans la congruence associée à S , d'autre part de deux systèmes générateurs (dans l'équivalence : les congruences engendrées sont égales).

2. Notations.

Les systèmes, parties finies de $X^* \times X^*$ seront mis sous la forme :

$$S = S_1 \cup S_2 \cup \overline{\overline{S}}$$

union disjointe, où

$(f , g) \in S_1$ équivaut à $g = 1$,

$(f , g) \in S_2$ équivaut à $|f| > |g|$, $\left\{\begin{array}{l}|f| \text{ représente le nombre d'éléments de } X \\ \text{dans l'expression de } f\end{array}\right.$

$(f , g) \in \overline{\overline{S}}$ équivaut à $|f| = |g|$.

A $S_1 \cup S_2$ correspond un préordre, régulier à droite et à gauche, noté $\xrightarrow{*}$; à $\overline{\overline{S}}$ correspond une congruence notée $\stackrel{*}{\longmapsto}$; on notera, de la même façon, la congruence engendrée par S par $\stackrel{*}{\longleftrightarrow}$. Dans les exemples précédents, $S_2 = \overline{\overline{S}} = \emptyset$. La famille de systèmes, introduite par M. NIVAT, est définie par

$f \stackrel{*}{\longleftrightarrow} g$ si, et seulement si, il existe h et h' tels que $f \xrightarrow{*} h$,

$g \xrightarrow{*} h'$ et $h \stackrel{*}{\longmapsto} h'$, systèmes dits quasi parfaits.

Lorsque $h = h'$, i. e. dans chaque classe de congruence, il existe un élément h tel que f appartient à une classe si, et seulement si, $f \xrightarrow{*} h$, le système est dit parfait. Les systèmes étudiés sont, en outre, mis sous forme réduite, ce qui entraîne en particulier que les premiers éléments des couples de S ne contiennent aucun de leurs facteurs dans les premiers éléments de $S_1 \cup S_2$. Etant donné un système quasi parfait, il existe toujours un système réduit quasi parfait équivalent. On appelle élément irréductible, pour un système donné S, un élément minimal pour le préordre $\xrightarrow{*}$.

Les deux énoncés suivants de la propriété de simplifiabilité à droite du quotient par la congruence engendrée par un système réduit quasi parfait S sont équivalents :

Quels que soient f et g éléments de X^*, s'il existe $h \neq 1$ tel que $fh \stackrel{*}{\longleftrightarrow} gh$, alors $f \stackrel{*}{\longleftrightarrow} g$.

Quels que soient f et g irréductibles, s'il existe $h \neq 1$ irréductible tel que $fh \stackrel{*}{\longleftrightarrow} gh$, alors $f \stackrel{*}{\longleftrightarrow} g$.

3. Cas particulier des systèmes où $S_2 \cup \overline{\overline{S}} = \emptyset$, quasi parfaits réduits.

Ces systèmes sont parfaits.

THÉORÈME. - Les monoïdes quotients de X^* par de tels systèmes sont simplifiables à droite si, et seulement si, les classes de congruence des éléments f tels qu'il existe u et v et $ufv \xrightarrow{*} I$, forment un groupe.

PROPOSITION. - Les monoïdes quotients de X^* par de tels systèmes sont simplifiables à droite si, et seulement si, ils sont isomorphes au produit libre d'un monoïde libre et d'un groupe défini par des générateurs et des relations.

Ces deux énoncés se déduisent aisément des propriétés caractéristiques des systèmes pour lesquels on a la simplifiabilité :

PROPRIÉTÉ. - Une condition nécessaire et suffisante pour que le monoïde quotient de X^* par un tel système soit simplifiable à droite est que S soit de la forme :

$$S = \{(\sigma(\gamma_i)^{p_i}, 1), \ \gamma_i \text{ forme multilinéaire sur } X_i, \ p_i \text{ entier,} \ \sigma \text{ une permutation circulaire à } |\gamma_i| \text{ éléments}\}.$$

Les X_i, $i = 1, 2, 3, \dots, k$, forment avec X' une partition de X.

Exemple : $S = \{(abab , I) , (baba , I)\}$, $X = (a , b)$.

Ce système est parfait d'après une caractérisation de M. NIVAT, le quotient est isomorphe au groupe défini par les générateurs a et b et la relation $abab = I$; il n'est pas libre puisque un élément est d'ordre fini.

Remarque. - De façon générale lorsque tous les entiers sont égaux à 1 , le groupe est libre sur un ensemble à $(|X| - k)$ éléments.

Conséquence. - Pour les groupes définis par générateurs et relations de ce type, on sait décider de l'isomorphisme.

Extension. - Pour tout système tel que $S_2 \cup \overline{\overline{S}} = \emptyset$, le quotient associé est simplifiable d'un côté si, et seulement si, il est isomorphe au produit libre d'un groupe et d'un monoïde libre.

4. Conditions générales de simplifiabilité à droite.

S est un système quasi parfait réduit.

Enoncé des conditions

(i) Les éléments d'un couple de $S_1 \cup S_2$ n'ont aucun facteur droit commun ;

(ii) Les classes de congruence des éléments f , tels qu'il existe u et v et $ufv \xrightarrow{*} 1$, forment un groupe ;

(iii) Tous les couples d'éléments de S , tels que deux éléments de X^* , qu'ils contiennent, f et g , ont un facteur droit commun ; $f = f'h$, $g = g'h$ satisfont à :

Quels que soient u et v , tels que $uf \xleftrightarrow{*} vg$, alors $uf' \xleftrightarrow{*} vg'$;

(iv) Tous les couples d'éléments de S_2 : (f , g) (k , s) , tels qu'il existe h et $g = xty$, $h = yz$, $k = k't$, satisfont à :

Quels que soient u et v tels que $uk \xleftrightarrow{*} vgz$, alors $uk' \longleftrightarrow vx$.

Ces conditions sont nécessaires comme le montrent les exemples suivants de systèmes :

$X = (a,b,c,d)$ $S = \{(ab , I) , (ba , I) , (cbd , I)\}$

$X = (a,b,c)$ $S = \{(abc,, ac)\}$

$X = (a,b,c,d)$ $S = \{(aab , cc) , (ac , d) , (dc , b)\}$

$X = (a,b,c,d)$ $S = \{(aab , ca) , (db , a)\}$

$X = (a,b,c,d)$ $S = \{(aabb , abc) , (ce , I) , (ec , I) , (abb , de)\}$.

Une démonstration de la suffisance de ces conditions s'appuie sur le lemme technique suivant :

LEMME. - Soient t_i , $i = 0 , 1 , 2 , \ldots , p$, des éléments de X^* tels que

$$t_i = u_{i-1}\, g_i\, v_{i-1} = u_i\, f_{i+1}\, v_i \ , \quad i = 1 , 2 , \ldots , p$$

où (f_i , g_i) ou (g_i , f_i) appartiennent à S , système quasi parfait réduit défini sur X , et h appartenant à XX^* (on désignera par H_d l'ensemble des facteurs droits de h)·;

Si, pour tout i , (f_i , g_i) appartient à $\overline{\overline{S}}$, t_0 appartient à $X^* h$, et t_p n'appartient pas à $X^* H_d$, alors il existe (f , g) appartenant à $\overline{\overline{S}}$ tel que f ou g appartient à $X^* H_d$;

Si, pour tout i , (f_i , g_i) appartient à $S_1 \cup S_2$, t_0 appartient à $X^* h$, et t_p n'appartient pas à $X^* H_d$, alors il existe (f , g) appartenant à $S_1 \cup S_2$ tel que f appartient à $X^* H_d$;

Si, pour tout i , (f_i , g_i) appartient à $S_1 \cup S_2$, t_0 n'appartient pas à $X^* H_d$, et t_p appartient à $X^* h$, alors

- ou bien il existe h_d dans H_d facteur de t_0 , $(k , 1)$ dans S_1 tels que $t_0 = xh_d\, y$, $t_i = xh_d\, k$ et, pour tout $j > i$, $|v_j| > |h_d|$;
- ou bien il existe (f , g) dans S_2 , $(k , 1)$ dans S_1 , h_d dans H_d tels que $t_i = zgu$, $g = xh_d\, y$, $yu \xrightarrow{*} k$, $t_j = zxh_d\, k$.
- ou bien il existe (f , g) dans S_2 tel que g appartient à $X^* H_d$.

Ce lemme démontré par récurrence sur p , on achève la démonstration en établissant une récurrence sur le maximum des longueurs de th et zh , t , h , z irréductibles, tels que $th \xleftrightarrow{*} zh$.

5. Comparaison avec les conditions données par S. I. ADJAN.

On se restreint d'abord à un système où $S_1 = \emptyset$; si on applique les conditions suffisantes d'ADJAN à un système quasi parfait, elles entraînent de façon évidente les conditions (iii) et (iv) puisque deux termes d'un même couple ont leurs dernières lettres différentes, donc aucun facteur droit commun (iii) ; et si deux couples ont deux éléments de même dernière lettre, i. e. ayant un facteur droit commun, il n'existe pas de cycle au sens d'ADJAN, donc aucun u , v tels que $uf \xleftrightarrow{*} vg$, d'où la condition (iv).

Un exemple de système quasi parfait ne satisfaisant pas aux conditions d'ADJAN, et pour lequel les conditions proposées sont aisément vérifiables, est le suivant :

$$X = (a , b , c) \ , \quad S = \{(abbc , ab) , (bac , b) , (aba , abb)\} \ .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] ADJAN (S. I.). - Defining relations and algorithmic problems for groups and semi-groups, Proc. Stecklov Inst. of Math., t. 85, 1966, p. 1-152.

[2] BENOIS (Michèle). - Simplifiabilité et plongement dans un groupe des monoïdes quotients d'un monoïde libre par une congruence de Thue unitaire, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 276, 1973, Série A, p. 665-668.

[3] CLIFFORD (A. H.) and PRESTON (G. B.). - The algebraic theory of semi-groups. Vol. 1 and 2. - Providence, American mathematical Society, 1961-1967 (Mathematical Surveys, 7).

[4] COCHET (Y.) et NIVAT (M.). - Une généralisation des ensembles de Dyck, Israel J. of Math., t. 9, 1971, p. 389-395.

[5] MAGNUS (W.), KARRASS (A.) and SOLITAR (D.). - Combinatorial group theory. - New York, Interscience Publishers, 1966 (Pure and applied Mathematics, Interscience, 13).

Michèle BENOIS
Institut de Mathématiques appliquées
Boîte postale 53, Centre de Tri
38041 GRENOBLE CEDEX