Léonce Lesieur

Idéal complètement premier d'un anneau noethérien à gauche intègre

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 24, n° 1 (1970-1971), exp. n° 9, p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1970-1971__24_1_A7_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
24e année, 1970/71, n° 9, 12 p.

15 février 1971

IDÉAL COMPLÈTEMENT PREMIER D'UN ANNEAU NOETHÉRIEN À GAUCHE INTÈGRE

par Léonce LESIEUR

Introduction. - Soient K un anneau intègre noethérien à gauche, P un idéal bilatère complètement premier $(ab \in P \implies a \in P$ ou $b \in P)$. On suppose $P \neq K$.

L'idéal P est $\cap$-irréductible à gauche, car K/P est un anneau noethérien à gauche intègre qui vérifie donc la condition de Ore des multiples communs à gauche :

(1) $$\forall\, a \notin P\ ,\quad b \notin P\ ,\qquad \exists\ \lambda a = \mu b + p \notin P\ ,\quad p \in P\ .$$

On se propose de donner des conditions d'existence de l'anneau de fractions à gauche de K par rapport à l'ensemble $S = K - P$, qui est une partie multiplicative d'éléments réguliers. La condition de Ore correspondante est :

(2) $$\forall\, a \in K\ ,\quad k \in S\ ,\qquad \exists\ a'k = sa\ ,\quad s \in S\ ,\quad a' \in K\ .$$

En supposant cette condition remplie, nous allons étudier les idéaux à gauche P-isotypiques de l'anneau K , et leurs relations avec les idéaux à gauche P-tertiaires (§ 1). Cette étude met en relief une classe d'idéaux un peu plus généraux : les idéaux à gauche P-fermés, que nous considérons au paragraphe 2. Ils correspondent biunivoquement aux idéaux à gauche de l'anneau de fractions, que nous étudions au paragraphe 3. Nous donnons ensuite deux exemples d'idéaux complètement premiers, pris dans l'anneau de Birkhoff-Witt, dont l'un possède un anneau de fractions, et l'autre non (§ 4). Enfin, parmi toutes les conditions nécessaires ainsi trouvées pour l'existence de l'anneau de fractions, nous en relevons une qui est également suffisante, en réservant d'ailleurs pour une étude ultérieure une recherche plus poussée dans cette voie.

1. Etude des idéaux à gauche P-isotypiques.

On rappelle qu'un idéal à gauche Q est P-isotypique, si l'enveloppe injective $E(K/Q)$ du K-module K/Q est somme directe d'un nombre fini d'injectifs indécomposables isomorphes à $E(K/P)$.

Si $Q = Q_1 \cap \ldots \cap Q_m$ est une décomposition réduite de Q en intersection d'idéaux à gauche $\cap$-irréductibles, Q est P-isotypique si, et seulement si, tous les Q_i sont P-isotypiques. Un idéal à gauche P-isotypique sera donc connu si l'on peut caractériser les idéaux à gauche P-isotypiques $\cap$-irréductibles.

PROPRIÉTÉ 1. - Pour que $Q \neq K$ soit un idéal à gauche $\cap$-irréductible P-isotypique, il faut et il suffit qu'il soit l'annulateur d'un élément $\beta \neq 0$ de l'enveloppe injective $E(K/P)$,

$$Q = \mathrm{Ann}\,\beta = \{q \in K \mid q\beta = 0\} = 0 \therefore \beta \quad .$$

En effet, si Q est P-isotypique $\cap$-irréductible, on a $E(K/Q) \overset{\sigma}{\simeq} E(K/P)$. Or $Q = \mathrm{Ann}\,\bar{1}$, où $\bar{1} \in K/Q$, et $\bar{1} \neq 0$, car on suppose $Q \neq K$. Donc Q est aussi l'annulateur de $\sigma(\bar{1})$ dans $E(K/P)$.

Réciproquement, si $Q = \mathrm{Ann}\,\beta$, c'est un idéal à gauche $\cap$-irréductible, du fait que $E(K/P)$ est un K-module à gauche co-irréductible. Q est d'ailleurs P-isotypique, car

$$E(K/P) = E(K\beta) \simeq E(K/(\mathrm{Ann}\,\beta)) = E(K/Q) \quad .$$

Remarques.

1° Le K-module à gauche $M = K/P$ vérifie la propriété suivante, déjà considérée dans [4] :

$$km = 0 \;,\quad m \neq 0 \implies kM = 0 \quad ;$$

et $P = 0 \therefore M$ est l'annulateur à gauche de ce module.

2° Le coeur $C(M)$ est égal à M. (En effet, on sait (cf. [3]) qu'il n'est pas nul, donc, si $0 \neq m \in C(M)$, $P = 0 \therefore m$ est annulateur maximum des éléments de l'enveloppe injective de M. Cette propriété reste vraie pour tout élément de M, d'où $C(M) = M$.)

La démonstration n'utilise pas l'existence de l'anneau de fractions de K par rapport à $S = K - P$. Par contre, la propriété suivante l'utilise :

PROPRIÉTÉ 2. - Si K possède un anneau de fractions à gauche par rapport à S, tout idéal à gauche propre Q, P-isotypique, est contenu dans P.

Il suffit de le démontrer pour un idéal à gauche $\cap$-irréductible P-isotypique $Q = \mathrm{Ann}\,\beta$, $\beta \neq 0$. Il existe $0 \neq \lambda\beta = \bar{a} \in K/P$, car $E(K/P)$ est extension essentielle de K/P. Soit $q \in Q$, donc $q\beta = 0$; si $q \notin P$, la condition de Ore appliquée à q et λ donnerait $s\lambda = tq$, avec $s \notin P$, d'où $s\lambda\beta = tq\beta = 0$, c'est-à-dire $s\bar{a} = 0$, avec $s \notin P$ et $\bar{a} \neq 0$, ce qui est impossible.

Afin de caractériser les idéaux P-isotypiques, donnons une définition :

DÉFINITION 1. - Un idéal à gauche $Q \neq K$ est dit P-fermé, si l'on a

$$ab \in Q \;,\quad b \notin Q \implies a \in P \quad .$$

L'idéal K lui-même est considéré comme P-fermé.

Tout idéal à gauche P-fermé propre est inclus dans P :

$$q.1 \in Q \ , \quad 1 \notin Q \implies q \in P \ .$$

L'idéal à gauche P est P-fermé :

$$ab \in P \ , \quad b \notin P \implies a \in P \ .$$

P est donc l'idéal à gauche P-fermé propre maximum.

THÉORÈME 1. - Pour que l'idéal à gauche $Q \neq K$ soit P-isotypique, il faut et il suffit, en supposant que K possède un anneau de fractions à gauche par rapport à $S = K - P$, que l'on ait les deux conditions :

(1) Q est P-fermé ;

(2) Q est P-tertiaire.

En clair, ces deux conditions équivalent à :

(1') $ab \in Q \ , \quad b \notin Q \implies a \in P$;

(2') $\forall\, b \notin Q \ , \quad \exists\, \lambda \in K$ tel que $Q \mathbin{\dot{.}} \lambda b = P$.

Démonstration.

(α) Tout idéal à gauche Q qui est P-isotypique vérifie (1) et (2). En effet, il est d'abord P-tertiaire ([2], p. 106). Démontrons qu'il est P-fermé. Soit $Q = Q_1 \cap \ldots \cap Q_m$ une décomposition réduite de Q en intersection d'idéaux à gauche $\cap$-irréductibles. Les Q_i sont P-isotypiques. Il suffit de démontrer qu'ils sont P-fermés. Soit donc

$$ab \in Q_i \ , \qquad b \notin Q_i \ .$$

L'idéal à gauche $Q_i \mathbin{\dot{.}} b$ est différent de K, $\cap$-irréductible et P-isotypique. Il est donc contenu dans P, d'après la propriété 2, d'où $a \in P$.

(β) Réciproquement, tout idéal à gauche P-fermé et P-tertiaire est P-isotypique. En effet, soit $Q = Q_1 \cap \ldots \cap Q_m$ une décomposition réduite en $\cap$-irréductibles, comme plus haut. On sait que les Q_i sont P-tertiaires (théorie des idéaux tertiaires [2]). Démontrons qu'ils sont P-fermés. On a par exemple $Q = Q_1 \cap X$, avec $X \not\supseteq Q$. Soit $ab \in Q_1$, $b \notin Q_1$; Q_1 étant un idéal à gauche $\cap$-irréductible, on a $(Q_1 + Kb) \cap X \not\supseteq Q$, et il existe $q_1 + \lambda b = x \notin Q$, $q_1 \in Q_1$, $x \in X$. Si l'on avait $a \notin P$, la condition de Ore appliquée à a et λ donnerait $s\lambda = ta$, $s \notin P$; d'où $sx = sq_1 + tab \in Q_1 \cap X = Q$, avec $x \notin Q$, $s \notin P$, ce qui est impossible, puisque Q est P-fermé. Nous sommes donc ramenés au cas d'un idéal à gauche $\cap$-irréductible Q_i, P-tertiaire et P-fermé. Or on a, dans ce cas, $P = Q_i \mathbin{\dot{.}} Y$, Y étant un idéal à gauche non contenu dans P, puisque P est un résiduel à gauche propre premier de Q_i . Il en résulte $P = \bigcap_{y \in Y, y \notin Q_i} Q_i \therefore y$; d'autre part, Q_i étant P-fermé, on a $Q_i \therefore y \subseteq P$. Par suite $P = Q_i \therefore y$, $y \notin P$, $y \in K$. Dès lors

$$E(K/Q_i) = E((Q_i + Ky)/Q_i) \simeq E(K/(Q_i \therefore y)) = E(K/P) \quad .$$

L'idéal Q_i est donc P-isotypique. L'idéal Q l'est aussi comme intersection finie d'idéaux à gauche P-isotypiques ([2], p. 104, propriété 10.10).

Le théorème est démontré, mais on peut revenir sur la signification explicite des conditions (1) et (2), en démontrant qu'elles équivalent à (1') et (2').

Supposons (1) et (2). Soit $b \notin Q$. Comme Q est P-tertiaire, il existe $\lambda b \notin Q$ tel que $P = Q \therefore K\lambda b$ (1). La condition (1) entraîne alors $P = Q \therefore \lambda b$.

Inversement, supposons (1') et (2'). Soit $P' = Q \therefore Y$ un résiduel à gauche propre "essentiel" de Q (cf. note (1)). On a $P'Y \subseteq Q$, $Y \not\subseteq Q$, d'où $P' \subseteq P$, d'après (1'). De plus, si $y \in Y$, $y \notin Q$, on a $P = Q \therefore \lambda y$, d'après (2'), avec $\lambda y \notin Q$ ($\lambda y \in Q \Longrightarrow P = K$) , d'où $P\lambda y = PK\lambda y \subseteq Q$, et, comme $P' = Q \therefore K\lambda y$, $P \subseteq P'$. Q admet alors un seul résiduel à gauche propre essentiel, qui est P . Il en résulte que Q est P-tertiaire.

PROPRIÉTÉ 3. - Si K possède un anneau de fractions par rapport à $S = K - P$, et si Q est P-isotypique, l'idéal à gauche $Q \therefore P$ est P-fermé.

En effet, soit $ab \in Q \therefore P$, $a \notin P$. Considérons $p \in P$. On a $sp = \lambda a$, avec $\lambda \in P$, $s \notin P$, d'où $spb = \lambda ab \in Q$, ce qui implique $pb \in Q$. Ainsi, on a démontré $Pb \subseteq Q$, donc $b \in Q \therefore P$, ce qui prouve que $Q \therefore P$ est P-fermé.

Il serait intéressant de montrer que $Q \therefore P$ est P-tertiaire. Il en résulterait que $Q \therefore P$ est P-isotypique. Mais cela n'est pas le cas en général, comme l'indique la propriété suivante :

PROPRIÉTÉ 4. - Si l'on suppose vérifiée la condition :

$$Q \text{ est P-isotypique} \Longrightarrow Q \therefore P \text{ est P-isotypique} ,$$

alors on a aussi

$$Q \text{ est P-isotypique} \Longrightarrow Q \text{ est P-primaire} .$$

---

(1) En effet, P est le seul résiduel à gauche "essentiel" de Q au sens de [2] (p. 67 et 70), et celui-ci peut être pris sous la forme $P = Q \therefore Y$, avec $Y \subset Kb$. On prend alors $\lambda b = y \in Y$, avec $y \notin Q$. Rappelons que $P = Q \therefore X$ est essentiel si, pour tout $Y \subset X$, $Y \not\subseteq Q$, on a $P = Q \therefore Y$.

En effet, considérons la suite croissante d'idéaux à gauche :

$$Q \subset Q \mathbin{.^{\bullet}} P \subset Q \mathbin{.^{\bullet}} P^2 \subset \dots \subset Q \mathbin{.^{\bullet}} P^n = Q \mathbin{.^{\bullet}} P^{n+1} \quad .$$

Les idéaux successifs $Q \mathbin{.^{\bullet}} P^i$ sont donc P-isotypiques, par hypothèse. En posant $Q \mathbin{.^{\bullet}} P^n = Q'$, on a donc $Q' \mathbin{.^{\bullet}} P = Q'$, ce qui est impossible pour $Q' \neq K$. D'où $Q' = K$ et $P^n \subseteq Q$. L'idéal Q est bien P-primaire.

Il faut donc se contenter de la notion d'idéal à gauche P-fermé. C'est elle d'ailleurs qui correspond aux idéaux à gauche de l'anneau de fractions, et nous allons l'étudier maintenant.

2. Etude des idéaux à gauche P-fermés.

Rappelons la définition 1. Q est P-fermé, si

$$ab \in Q \ , \quad b \notin Q \implies a \in P \quad .$$

PROPRIÉTÉ 5. - L'intersection d'une famille quelconque d'idéaux à gauche P-fermés est un idéal à gauche P-fermé.

La démonstration est immédiate, et ne fait pas intervenir l'existence de l'anneau de fractions.

DÉFINITION 2. - On appelle fermeture $\overline{X}$ de l'idéal à gauche X , le plus petit idéal à gauche P-fermé contenant X .

$\overline{X}$ est donc l'intersection de tous les idéaux à gauche P-fermés contenant X . En présence d'un anneau de fractions, $\overline{X}$ est caractérisé par la propriété suivante :

PROPRIÉTÉ 6. - La fermeture de l'idéal à gauche X est l'ensemble des éléments $x \in K$, pour lesquels il existe $s \notin P$ avec $sx \in X$.

Cet ensemble X' est un idéal à gauche, car

$$sx \in X \ , \quad s'x' \in X \implies \sigma(x - x') \in X \quad ,$$

avec $\sigma = s_1\, s = s_1'\, s' \notin P$, d'où $x - x' \in X'$. De plus, si $\lambda \in K$ et $s_1\, \lambda = k's$, $s_1 \notin P$, on a $s_1\, \lambda x = k'sx \in X$, d'où $\lambda x \in X'$.

Pour qu'un idéal à gauche X soit P-fermé, il faut et il suffit qu'il soit égal à sa fermeture.

PROPRIÉTÉ 7. - Si X est P-fermé, et si $X = X_1 \cap \dots \cap X_m$ est sa décomposition réduite en idéaux à gauche X_i , $\cap$-irréductibles, les composantes X_i sont P-fermées.

La démonstration a été faite dans celle du théorème 1, partie (β).

PROPRIÉTÉ 8. - Si X est P-fermé, et $a \in K$, l'idéal à gauche $X \therefore a$ est P-fermé.

En effet, $uv \in X \therefore a$, $v \notin X \therefore a \implies uva \in X$, $va \notin X \implies u \in P$.

PROPRIÉTÉ 9. - Si X est $\cap$-irréductible et P-fermé, et si P' est son idéal premier associé, P' est P-fermé (donc $P' \subseteq P$).

En effet, $P' = X \therefore Y = \bigcap_{y \notin X} X \therefore y$ est l'intersection d'idéaux à gauche P-fermés propres (propriété 8), donc est P-fermé (propriété 5).

Dans le cas commutatif, X est P-fermé propre si, et seulement si, X est l'intersection d'idéaux à gauche $\cap$-irréductibles $\subseteq P$. Dans le cas non commutatif, cette condition est encore nécessaire ; il serait intéressant de voir si, avec la propriété 9, elle est aussi suffisante (problème ouvert).

PROPRIÉTÉ 10. - Si X est un idéal à gauche P-fermé, l'idéal à gauche $X \therefore P$ est P-fermé.

Même démonstration que pour la propriété 3.

3. Etude de l'anneau de fractions K_S .

C'est un sous-anneau du corps des quotients K_0 de K ; le couple (s , a) , qui définit $\xi = s^{-1} a \in K_S$, définit aussi (s^{-1} , a) dans le corps K_0 , par l'application $s^{-1} a \longmapsto s^{-1} a$. Cette application est définie, car $s^{-1} a = s'^{-1} a'$ équivaut à $\sigma s = \sigma' s' \notin P$, $\sigma a = \sigma a'$, et cette relation définit la même fraction dans K_0 . On a un homomorphisme, car

$$\frac{a}{s} \times \frac{a'}{s'} = \frac{ta'}{\sigma s} , \qquad \sigma a = ts' , \quad \sigma \notin P ,$$

ce qui est aussi la définition du produit dans K_0 . De même pour l'addition :

$$\frac{a}{s} + \frac{a'}{s'} = \frac{\sigma a + \sigma' a'}{\sigma s} , \qquad \sigma s = \sigma' s' .$$

Enfin c'est une injection, puisque $\frac{a}{s} = 0$ dans K_0 entraîne $a = 0$ et $\frac{a}{s} = 0$ dans K_S .

Les raisonnements suivants sont classiques.

L'application $I \longmapsto I' = \{s^{-1} x \mid x \in I\}$ définit une extension $I' = e(I)$ de l'idéal à gauche I de K . I' est un idéal à gauche de K_S , car

$$\frac{x}{s} - \frac{x'}{s'} = \frac{\sigma x - \sigma' x'}{\sigma s} \in I' \qquad \text{et} \qquad \frac{a}{s}\cdot\frac{x'}{s'} = \frac{tx'}{\sigma s} \in I' , \qquad \sigma a = tx' .$$

L'application $J' \longmapsto J' \cap K = J$ définit la <u>restriction</u> de l'idéal à gauche J' de K_S, qui est un idéal à gauche J de K, soit $r(J')$.

On a $er(J') = J'$, car soit $\xi \in J'$, d'où $\xi = s^{-1} a$, $a = s\xi \in J' \cap K = r(J')$, puis $s^{-1} a \in er(J')$ et $J' \subseteq er(J')$. L'inclusion opposée est immédiate, car

$$a \in r(J') = J' \cap K \implies s^{-1} a \in J' ,$$

et $s^{-1} a$ est l'élément général de $er(J')$. Il en résulte que l'application $J' \longmapsto r(J')$ est croissante et injective, car

$$r(J') = r(J'') \implies er(J') = er(J'') = J' = J'' .$$

<u>Pour qu'un idéal à gauche de</u> K <u>soit un idéal restriction</u> $r(J')$, <u>il faut et il suffit qu'il soit</u> P-<u>fermé</u>.

$r(J')$ est P-fermé, car

$$ab \in r(J') = J' \cap K , \quad a \notin P \implies b = a^{-1} ab \in J' \cap K = r(J') .$$

Inversement, si J est P-fermé, on a $J = re(J)$. En effet, soit $x \in re(J)$, ou $s^{-1} a = x \in K \cap e(J)$, avec $a \in J$. On en déduit $a = sx \in J$, $s \notin P$, d'où $x \in J$, puisque J est fermé. Ainsi $re(J) \subseteq J$. Comme l'inclusion opposée est toujours vraie, la propriété est démontrée.

Il en résulte aussitôt que <u>la fermeture</u> $\overline{X}$ <u>de</u> X <u>est égale à</u> $re(X)$, car $re(X)$ est un fermé contenant X, et, si un fermé Y contient X, on a $e(Y) \supseteq e(X)$ et $re(Y) = Y \supset re(X)$. De plus, il y a une correspondance biunivoque croissante entre les idéaux à gauche de K_S et les idéaux à gauche P-fermés de K.

<u>Le treillis des idéaux à gauche de</u> K_S <u>est isomorphe au treillis des idéaux à gauche</u> P-<u>fermés de</u> K.

L'idéal $e(P) = \{s^{-1} p\}$ est bilatère. En effet, $s^{-1} ps'^{-1} a' = s^{-1} \sigma^{-1} aa'$, avec $\sigma^{-1} a = ps'^{-1}$, ou $as' = \sigma p$. On en déduit $a \in P$, et $aa' \in P$, d'où $s^{-1} is'^{-1} a' \in e(P)$.

$e(P)$ <u>est complètement premier</u>.

En effet, $s^{-1} is'^{-1} a' = s^{-1} \sigma^{-1} aa'$, $as' = \sigma i$. Le produit est dans $e(P)$, donc $aa' \in re(P) = P$. On a donc, ou bien $a' \in P$, et $s'^{-1} a' \in e(P)$, ou bien $a \in P$, mais alors $i \in P$ et $s^{-1} i \in e(P)$.

$e(P)$ <u>est un idéal maximum</u> (complètement premier).

En effet, $\xi \notin e(P) \Longrightarrow \xi = s^{-1} a$, $a \notin P$, et ξ est inversible avec $\xi^{-1} = a^{-1} s = \xi' \in K_S$.

THÉORÈME 2. – L'anneau de fractions K_S de A par rapport à $K - P$ est un anneau local noethérien à gauche intègre, dont l'idéal maximum est l'idéal $e(P)$ complètement premier.

Les idéaux premiers (resp. complètement premiers) de K_S correspondent biunivoquement aux idéaux bilatères premiers (resp. complètement premiers) fermés à gauche et à droite de K .

Le fait que l'anneau soit local d'idéal maximum $e(P)$ complètement premier a été démontré. Il est noethérien à gauche, car une chaîne d'idéaux à gauche de K_S correspond biunivoquement à une chaîne d'idéaux à gauche P-fermés de K .

Soit $\mathfrak{P}$ un idéal premier bilatère de K_S . Considérons $r(\mathfrak{P}) = \mathfrak{P} \cap K = p$. Pour établir que p est premier dans K , nous prenons $aKb \subseteq p$, avec $b \notin p$. L'anneau $K_S/\mathfrak{P}$ étant premier, et noethérien, tout idéal bilatère non nul est essentiel, et contient un élément régulier. Il en est ainsi de l'idéal bilatère (b) engendré par b , et il existe donc un élément de la forme

$$\sum_i s_i^{-1} \lambda_i \, b s_i'^{-1} \mu_i = u \in K_S \quad ,$$

qui est régulier modulo $\mathfrak{P}$. En prenant un dénominateur commun pour les fractions $\frac{1}{s_i}$, et en multipliant à gauche par ce dénominateur, on obtiendra

$$\sum_i \lambda_i' \, b s_i'^{-1} \mu_i = v \quad \text{régulier} \quad \text{mod } \mathfrak{P} \quad ,$$

d'où, en multipliant par a à gauche, et en vertu de $aKb \subseteq p$, on obtient

$$av \in \mathfrak{P} \, , \quad v \text{ régulier } \text{mod } \mathfrak{P} \Longrightarrow a \in \mathfrak{P} \quad .$$

Donc, si $\mathfrak{P}$ est premier, $r(\mathfrak{P}) = p$ est premier et P-fermé des deux côtés. Réciproquement, si p est P-fermé des deux côtés et premier dans K , $e(p)$ est bilatère premier (démonstration facile).

Enfin, si $\mathfrak{P}$ est complètement premier, $r(\mathfrak{P}) = p$ est complètement premier et fermé des deux côtés (immédiat) ; la réciproque se démontre comme pour $e(P)$.

Le théorème 2 est démontré.

Nous allons maintenant étudier les idéaux à gauche $e(P)$-isotypiques de K_S . Nous pouvons appliquer les résultats du théorème 1, en remarquant que la situation du début se reproduit, puisque K_S est un anneau noethérien à gauche intègre, $e(P)$ un idéal complètement premier de K_S , tandis que K_S est son propre anneau de fractions par rapport à la partie multiplicative $K_S - e(P)$. En remarquant de plus que tout idéal à gauche de K_S est $e(P)$-fermé

$$(\alpha\beta \in J' \ , \quad \alpha \notin e(P) \implies \beta = \alpha^{-1}\alpha\beta \in J') \ ,$$

le théorème 1 donne le résultat suivant :

THÉORÈME 3. - Pour qu'un idéal à gauche Q' de K_S soit $e(P)$-isotypique, il faut et il suffit qu'il soit $e(P)$-tertiaire.

Ainsi, le passage de l'anneau K à son localisé K_S possède entre autres pour effet d'éliminer la différence entre les idéaux $e(P)$-tertiaires et les idéaux $e(P)$-isotypiques.

De même, en explicitant par la condition (2') du théorème 1, on obtient :

THÉORÈME 3'. - Pour qu'un idéal à gauche Q' de K_S soit $e(P)$-isotypique, il faut et il suffit qu'il vérifie la condition :

(3') $\forall\, b \notin Q'$, $\exists\, \lambda \in K_S$ tel que $Q' \therefore \lambda b = e(P)$.

Cette condition permet de comparer les idéaux $e(P)$-isotypiques de K_S aux idéaux P-isotypiques de K , par le théorème suivant :

THÉORÈME 4. - Les idéaux à gauche $e(P)$-isotypiques de K_S correspondent biunivoquement aux idéaux à gauche P-isotypiques de K par l'application

$$Q \longmapsto Q' = e(Q) \ .$$

Supposons d'abord Q P-isotypique dans K . Q étant P-fermé, on a $e(Q) \cap K = Q$. Démontrons que $Q' = e(Q)$ vérifie la condition (3'). Soit $\xi = s^{-1}b \notin e(Q)$, donc $b \notin Q$. Il existe (théorème 1) $\lambda \in K$ tel que $P = Q \therefore \lambda b$. On a donc, pour tout $p \in P$, $p\lambda b \in Q$ et $\sigma^{-1}p\lambda b = s^{-1}p\lambda s\xi \in e(Q)$, c'est-à-dire $e(P) \subseteq e(Q) \therefore \lambda s\xi$. De plus, $\lambda s\xi = \lambda b \notin e(Q)$, car $\lambda b \notin Q$ (si $Q \neq P$, i. e. $e(Q) \neq e(P)$). Il en résulte $e(Q) \therefore \lambda s\xi \subseteq e(P)$ et $e(P) = e(Q) \therefore \lambda s\xi$, ce qui prouve (3').

Réciproquement, supposons Q' $e(P)$-isotypique dans K_S . Démontrons que $Q = Q' \cap K$ est P-isotypique dans K . Comme Q est P-fermé, il suffit de vérifier la condition (2') du théorème 1. Soit $b \notin Q$; on a donc $b \notin Q'$ et $e(P) = Q' \therefore \lambda' b$. On a donc, pour tout $p \in P$, $p\lambda' b \in Q'$, et, en posant $\lambda' = \sigma^{-1}u$, $p\sigma^{-1}ub \in Q'$. Si l'on définit $p' \in P$ par $p\sigma^{-1} = s'^{-1}p'$, il vient $p'ub \in Q'$, donc $p'ub \in Q$, et p' est arbitraire dans P . On a donc $P \subseteq Q \therefore ub$, d'où l'égalité $P = Q \therefore ub$, puisque $ub \notin Q$ et que Q est P-fermé.

4. Exemples.

1° K est l'anneau de Birkhoff-Witt, défini par le corps commutatif F par $F(x , y)$, avec la relation

$$xy - yx = x \quad .$$

K est un anneau intègre noethérien à gauche (et à droite).

$$P = (y) = Kx + Ky$$

est l'idéal bilatère engendré par y . C'est un idéal complètement premier.

Le lecteur pourra vérifier que la condition de Ore ne peut pas être satisfaite pour les deux éléments

$$a = x \in K \ , \qquad y - 1 = k \in S = K - P \quad .$$

Donc, dans cet exemple, l'anneau K ne possède pas d'anneau de fractions à gauche par rapport à $S = K - P$.

2° K est encore l'anneau de Birkhoff-Witt, mais $P = (x) = Kx$ est l'idéal bilatère, complètement premier, engendré par x .

Tout élément $a \in K$ peut s'écrire de façon unique sous la forme

$$a = u_0(y) + u_1(y)x + \dots + u_p(y)x^p \ , \qquad u_i(y) \in F(y) \quad .$$

Si l'on remarque que $xy = (y + 1)x$, d'où

$$xu(y) = u(y + 1)x \quad ,$$

l'anneau de Birkhoff est un cas particulier du suivant : $A = F[y]$ est un anneau commutatif intègre noethérien, $\sigma : u(y) \longmapsto u(y + 1)$ est un homomorphisme injectif (2) de l'anneau A sur lui-même, qui conserve l'élément 1 . On considère l'anneau $A[x]$, où la multiplication de x par $a \in A$ est définie par

$$xa = \sigma(a)x \quad .$$

Alors cet anneau $K = A[x]$ est intègre et noethérien à gauche. L'idéal bilatère $P = (x) = Kx$ est complètement premier.

Un élément $a \in K$ se met, d'une façon unique, sous la forme

$$a = u_0 + u_1 x + \dots + u_p x^p \ , \qquad u_i \in A \quad .$$

---

(2) Ici, σ est un isomorphisme, mais dans d'autres cas, par exemple : $u(y) \longmapsto u(y^2)$, on a seulement un homomorphisme injectif, et cela suffit (cf. [1], p. 180).

Les éléments $k \notin P$ sont ceux pour lesquels $u_0 \neq 0$.

Le lecteur pourra établir, par un calcul qui n'est pas trivial, que la condition de Ore $a'k = sa$ est toujours vérifiée, en prenant, pour $a' \in K$ et $s \in K - P$, des polynômes en x de degré convenable, lorsque $a \in K$ et $k \notin P$ sont donnés.

Donc, dans cet exemple 2, l'anneau K possède un anneau de fractions à gauche par rapport à $S = K - P$.

5. Une condition nécessaire et suffisante pour l'existence de l'anneau de fractions à gauche de K par rapport à S = K - P .

Parmi les propriétés trouvées, celles qui font intervenir l'existence de l'anneau de fractions à gauche de K par rapport à $S = K - P$ sont autant de conditions nécessaires, par exemple la propriété du théorème 1 : Tout idéal à gauche P-isotypique est P-fermé. Il y aurait intérêt à en trouver d'autres, par exemple celles qui font intervenir l'enveloppe injective $E(K/P)$, ou le coeur de ce K-module, et, surtout, à relever des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de l'anneau de fractions à gauche. Je me contenterai ici d'en donner une seule :

THÉORÈME 5. - Pour que l'anneau K possède un anneau de fractions à gauche par rapport à $K - P$, il faut et il suffit que l'on ait la propriété 6 :

La fermeture de tout idéal à gauche X est l'ensemble des éléments $x \in K$ pour lesquels il existe $s \notin P$ avec $sx \in X$.

En effet, la fermeture d'un idéal à gauche $X \notin P$ ne peut être que K , puisqu'un fermé différent de K est $\subseteq P$. Soient alors $a \in K$ et $k \notin P$. La fermeture de $X = Kk$ est égale à K . Si elle est donnée par la propriété 6, on a donc, pour $a \in \overline{X}$, un élément $s \notin P$ avec $sa \in X$, donc $sa = a'k$, ce qui est la condition (2) de Ore.

BIBLIOGRAPHIE

[1] LESIEUR (L.) et CROISOT (R.). - Sur les anneaux premiers noethériens à gauche, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 3e série, t. 76, 1959, p. 161-183.

[2] LESIEUR (L.) et CROISOT (R.). - Algèbre noethérienne non commutative. - Paris, Gauthier-Villars, 1963 (Mémorial des Sciences mathématiques, 154).

[3] LESIEUR (L.) et CROISOT (R.). - Coeur d'un module, J. Math. pures et appl., t. 42, 1963, p. 367-407.

[4] LESIEUR (L.). - Sur les éléments réguliers dans un anneau noethérien à gauche, Séminaire d'Algèbre non commutative, Orsay, 1971.

(Texte reçu le 23 février 1971)

Léonce LESIEUR
112 bis rue Houdan
92 - SCEAUX