Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Claude Guillevin

Sur les groupoïdes quasi-résidués

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 23, nº 1 (1969-1970), exp. nº 6, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1969-1970__23_1_A5_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
23e année, 1969/70, n° 6, 11 p.

5 janvier 1970

SUR LES GROUPOÏDES QUASI-RÉSIDUÉS

par Claude GUILLEVIN

C'est à la recherche des images homomorphes d'un demi-groupe ordonné qu'ont été consacrés à un certain nombre de travaux sur la résiduation (voir par exemple [1], [7], [8], [9]) puis, plus récemment, sur la quasi-résiduation (voir [5] et [6]).

Rappelons que dans un groupoïde ordonné G, on appelle quasi-résiduel à droite (resp. à gauche) de a par b, où a et b sont des éléments de G, l'ensemble, éventuellement vide, noté $\langle a \,.\!\cdot\, b\rangle$ (resp. $\langle a \,\cdot\!.\, b\rangle$), des éléments z de G vérifiant la relation $bz \leqslant a$ (resp. $zb \leqslant a$). Un groupoïde ordonné G est dit quasi-résidué d'un côté (resp. des deux côtés, et alors G est dit quasi-résidué), si tous les quasi-résiduels de ce côté (resp. des deux côtés) définis dans G sont des ensembles non vides. D'autre part, dans tout groupoïde ordonné G, on peut définir l'équivalence "zig-zag" R, équivalence qui est compatible avec la multiplication dans G : il s'ensuit que G/R est homomorphe à G (cf. [1], p. I.3).

Je me propose de montrer ici comment j'ai mené la recherche de la forme générale des groupoïdes quasi-résidués, dans le cas où l'équivalence R est compatible avec la quasi-résiduation (ce qui n'a pas lieu en général, contrairement au cas de la résiduation et à des cas plus généraux que celui-ci, comme nous le verrons plus loin).

Tout d'abord, après une étude des groupoïdes quasi-résidués d'un seul côté, j'établis la résultat suivant :

THÉORÈME 1. - Si G est un groupoïde quasi-résidué :

1° G/R est un Q-groupoïde homomorphe à G ;

2° Pour que G/R soit un quasi-groupe homomorphe à G, il faut et il suffit que l'une des deux conditions équivalentes suivantes soit vérifiée :

(a) L'équivalence R est simplifiable pour la multiplication ;

(b) l'équivalence R est compatible avec la quasi-résiduation ;

3° Pour que G/R soit un groupe homomorphe à G, il faut et il suffit que G vérifie la condition (A) :

$$(\mathrm{A}) \qquad (\forall\, x\,,\, y\,,\, z \in G) \quad x(yz) \equiv (xy)z \quad (R)\,.$$

Je dirai, par ailleurs, qu'un groupoïde quasi-résidué est :

(α) quasi-filtrant inférieurement (resp. supérieurement) si tous les quasi-résiduels dans ce groupoïde sont des ensembles ordonnés filtrants inférieurement (resp. supérieurement) ; quasi-filtrant s'il est à la fois quasi-filtrant inférieurement et quasi-filtrant supérieurement ;

(β) quasi-$\vee$-inductif (resp. quasi-$\wedge$-inductif) si tous les quasi-résiduels dans ce groupoïde vérifient la propriété suivante :

"Toute chaîne croissante (resp. décroissante) d'éléments d'un même quasi-résiduel admet un majorant (resp. un minorant) dans ce quasi-résiduel".

Il apparaît alors qu'un groupoïde est résidué si, et seulement si, il est à la fois quasi-filtrant supérieurement et quasi-$\vee$-inductif. La compatibilité de l'équivalence R avec la résiduation dans un groupoïde résidué ([1], p. I.3) résulte du résultat suivant :

LEMME 1. - Si un groupoïde quasi-résidué est quasi-filtrant supérieurement (ou inférieurement), alors l'équivalence R est compatible avec la quasi-résiduation.

I. Première partie

Désignons dans cette première partie par G un groupoïde quasi-résidué où l'équivalence R est compatible avec la quasi-résiduation.

THÉORÈME 2. - Si une classe A de G/R contient un élément a, vérifiant la relation

$$(\forall\ a' \in A) \quad a^{\leqslant} \cap a'^{\leqslant} = \emptyset ,$$

alors toute classe de G/R est un ensemble filtrant inférieurement.

Ce résultat se déduit immédiatement des remarques successives suivantes :

$(\forall\ B \in G/R)$ $(\exists\ C \in G/R)$ $B = AC$, et C est unique puisque G/R est un quasi-groupe ;

$(\forall\ b \in B)$ $(\exists\ c \in C)$ $ac \leqslant b$;

$(\forall\ b' \in B)$ $(\exists\ a' \in A)$ $a'c \leqslant b'$.

COROLLAIRE 1. - Si une classe A de G/R possède l'une quelconque des deux propriétés suivantes :

(a) A est un ensemble filtrant inférieurement ;

(b) A possède un élément maximum ;

alors toute classe de G/R est un ensemble filtrant inférieurement.

Nous pouvons même apporter la précision suivante :

THÉORÈME 3. - <u>Si une classe de</u> G/R <u>admet un élément minimum, il en est de même de toute classe de</u> G/R .

En effet, A désignant une telle classe modulo R d'éléments minimums $\underset{\sim}{a}$, nous pouvons écrire : $(\forall\ B \in G/R)\ (\exists\ C \in G/R\ ,\ C\ \text{unique})\ B = AC$. Soient alors $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne descendante quelconque dans B , et c un élément arbitraire de C : $\underset{\sim}{a}$ appartient à tout quasi-résiduel de la forme $\langle b_n \cdot\!\!\cdot\, c\rangle$, et $\underset{\sim}{a}c$ minore donc la chaîne des b_n dans B . On en en déduit donc que, dans l'hypothèse considérée, toute chaîne décroissante d'éléments d'une classe arbitraire modulo R est minorée dans cette classe : par application de l'axiome de Zorn, cette classe arbitraire admet un élément minimal qui en est l'élément minimum d'après le corollaire 1 .

LEMME 2. - <u>Si une classe de</u> G/R <u>n'est pas un ensemble filtrant inférieurement, elle contient au moins deux éléments ayant un majorant commun et n'admettant aucun minorant commun. Il en est alors de même de toute classe de</u> G/R .

Compte tenu du résultat ci-dessus, j'établis la condition suivante :

THÉORÈME 4. - <u>Pour qu'une classe de</u> G/R <u>soit un ensemble filtrant inférieurement (et il en est alors de même de toute classe de</u> G/R), <u>il faut et suffit que</u> G <u>soit quasi-filtrant inférieurement.</u>

La nécessité de cette condition est claire. Supposons maintenant qu'une classe A modulo R ne soit pas un ensemble filtrant inférieurement. D'après le lemme 3, il existe a , a' et α dans A vérifiant les relations

$$\alpha \in a^{\geqslant} \cap a'^{\geqslant} \quad \text{et} \quad a^{\leqslant} \cap a'^{\leqslant} = \emptyset \ .$$

Pour tout élément z de G , a et a' appartiennent au quasi-résiduel $\langle \alpha z \cdot\!\!\cdot\, z\rangle$ et G n'est donc pas quasi-filtrant inférieurement : La condition énoncée est donc bien suffisante.

THÉORÈME 5. - <u>Si le groupoïde quasi-résidué</u> G <u>est quasi-filtrant inférieurement, alors</u> :

1° <u>Ou bien chaque classe de</u> G/R <u>admet un élément minimum (et</u> G <u>sera dit du type</u> I) ;

2° <u>Ou bien chaque classe de</u> G/R <u>est un ensemble filtrant inférieurement et</u> G <u>n'admet aucun élément minimal (et</u> G <u>sera dit du type</u> II).

<u>Remarque</u>. - On montre également que, <u>pour que toute classe de</u> G/R <u>soit un inf-demi-treillis, il faut et il suffit que tout quasi-résiduel dans</u> G <u>soit ordonné en inf-demi-treillis</u>.

II. Deuxième partie

Nous désignerons maintenant par G un groupoïde quasi-filtrant supérieurement (où l'équivalence R est compatible avec la quasi-résiduation d'après le lemme 1). Etablissons tout d'abord le lemme suivant :

LEMME 3. - Si deux éléments de G admettent un minorant commun, ils admettent un majorant commun.

Soient a et a' deux tels éléments, et α un minorant de a et a' : a , a' et α appartiennent donc à une même classe A modulo R . Pour tout élément c_1 de G , il existe $c_2 \in \langle \alpha c_1 \,.^{\cdot}\, a' \rangle$ vérifiant les relations :

$$c_2 \equiv c_1 \quad (R) \quad \text{et} \quad \alpha c_2 \leqslant a' c_2 \leqslant \alpha c_1 \ .$$

G étant quasi-filtrant supérieurement, il existe un majorant, soit c , de c_1 et de c_2 dans le quasi-résiduel $\langle \alpha c_1 \,.^{\cdot}\, \alpha \rangle$ et vérifiant la relation :

$$\alpha c_2 \leqslant a' c_2 \leqslant \alpha c_1 = \alpha c \ .$$

On en déduit, par isotonie,

$$a \in \langle ac \,^{\cdot}.\, c_2 \rangle \quad \text{et} \quad a' \in \langle ac \,^{\cdot}.\, c_2 \rangle \quad ;$$

d'où le résultat.

Ce lemme nous permet d'établir le théorème suivant :

THÉORÈME 6. - Toute classe de G/R est un ensemble filtrant supérieurement.

a et a' désignant deux éléments quelconques d'une classe arbitraire A modulo R , considérons une chaîne "zig-zag" finie $(a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ telle que $a_0 = a \nparallel a_1 \nparallel \dots \nparallel a_n = a'$ (avec $a_i \in A$, $\forall\, i = 0 , 1 , \dots , n$, évidemment) .

Désignons par $\alpha_0 , \dots , \alpha_p$, les éléments maximaux successifs de cette chaîne ; ils vérifient donc les relations :

$$\alpha_0 \parallel \alpha_1 \parallel \dots \parallel \alpha_p \quad \text{et} \quad (\forall\, i = 0 , \dots , p-1) \quad \alpha_i^{\leqslant} \cap \alpha_{i+1}^{\leqslant} \neq \emptyset \ .$$

Compte tenu du lemme 3, on a : $\alpha_0^{\geqslant} \cap \alpha_1^{\geqslant} \neq \emptyset$; soit $\alpha'_0 \in \alpha_0^{\geqslant} \cap \alpha_1^{\geqslant}$. La relation $\alpha_1^{\leqslant} \cap \alpha_2^{\leqslant} \neq \emptyset$ implique alors $\alpha_0'^{\leqslant} \cap \alpha_2^{\leqslant} \neq \emptyset$, et donc $\alpha_0'^{\geqslant} \cap \alpha_2^{\geqslant} \neq \emptyset$. Soit $\alpha'_1 \in \alpha_0'^{\geqslant} \cap \alpha_2^{\geqslant}$; on a $\alpha_1'^{\leqslant} \cap \alpha_3^{\leqslant} \neq \emptyset$, et donc $\alpha_1'^{\geqslant} \cap \alpha_3^{\geqslant} \neq \emptyset$, ... Au bout d'un nombre fini d'opérations (exactement p), on aboutit à la relation

$$\bigcap_{i=0}^{p} \alpha_i^{\geqslant} \neq \emptyset \quad \text{d'où} \quad a^{\geqslant} \cap a'^{\geqslant} \neq \emptyset \ .$$

Conséquence. - Toute classe modulo R d'un groupoïde résidué est un ensemble filtrant supérieurement,

car un tel groupoïde est en particulier quasi-filtrant supérieurement.

Remarque. - Un groupoïde quasi-résidué, où l'équivalence R est compatible avec la quasi-résiduation, peut être tel que toutes les classes modulo R soient des ensembles filtrants supérieurement sans être quasi-filtrant supérieurement.

THÉORÈME 7. - Si tout quasi-résiduel d'un groupoïde quasi-résidué G est ordonné en sup-demi-treillis, il en est de même de toute classe de G/R .

Montrons tout d'abord que la borne supérieure de deux éléments d'un quasi-résiduel, cette borne supérieure étant définie dans ce quasi-résiduel, est aussi la borne supérieure de ces deux éléments dans la classe modulo R incluant ce quasi-résiduel.

Pour ce faire, montrons en premier lieu que, s'il existe a , b , b' , z_1 et z_2 dans G , vérifiant les relations :

$$z_1 \in \langle a \,.\!\cdot\, b\rangle \cap \langle a \,.\!\cdot\, b'\rangle \quad \text{et} \quad z_2 \in \langle a \,.\!\cdot\, b\rangle \cap \langle a \,.\!\cdot\, b'\rangle ,$$

la borne supérieure $z = (z_1 \vee z_2)_{\langle a.\cdot b\rangle}$ de z_1 et z_2 dans le quasi-résiduel $\langle a \,.\!\cdot\, b\rangle$ est égale à la borne supérieure $z' = (z_1 \vee z_2)_{\langle a.\cdot b'\rangle}$ de ces deux mêmes éléments dans le quasi-résiduel $\langle a \,.\!\cdot\, b'\rangle$. On a évidemment $b \equiv b' \ (R)$; G étant en particulier quasi-filtrant supérieurement, b et b' admettent un majorant commun β , z et z' un majorant commun y , a et βy un majorant commun α . Posant :

$$u = (z_1 \vee z_2)_{\langle \alpha.\cdot b\rangle} \quad \text{et} \quad u' = (z_1 \vee z_2)_{\langle \alpha.\cdot b'\rangle} ,$$

on a, a priori, $u \leqslant z$ et $u' \leqslant z'$. Par isotonie, on déduit la relation $bu \leqslant bz \leqslant a$ et donc $u = z$; on a de même $z' = u'$. Posant maintenant $v = (z_1 \vee z_2)_{\langle \alpha.\cdot \beta\rangle}$, on a, a priori, $z = u \leqslant v$ et $z' = u' \leqslant v$. Par isotonie, on a, par exemple, $\beta z \leqslant \beta v \leqslant \alpha$. On en déduit que z majore z_1 et z_2 dans le quasi-résiduel $\langle \alpha \,.\!\cdot\, \beta\rangle$, et donc finalement $v = z$; de même, on a $v = z'$, et donc $z = z'$.

En second lieu, désignant toujours par z la borne supérieure dans le quasi-résiduel $\langle a \,.\!\cdot\, b\rangle$ de deux éléments z_1 et z_2 de ce quasi-résiduel, considérons un majorant z' de z_1 et z_2 dans leur classe modulo R (l'existence de z' étant assurée par le fait que G est quasi-filtrant supérieurement). Il existe b', $b' \equiv b \ (R)$, tel que $b'z_1 \leqslant b'z' \leqslant a$ et $b'z_2 \leqslant b'z' \leqslant a$ (i. e. $b' \in \langle a \,.\!\cdot\, z'\rangle$ - D'après la démonstration ci-dessus, on a $z \leqslant z'$ et z est bien la borne supérieure de z_1 et de z_2 dans leur classe modulo R . Ceci achève la démonstration du premier point considéré.

Considérons maintenant deux éléments quelconques a et a' d'une même classe arbitraire A modulo R , et désignons par α un majorant commun de a et a' . C désignant la classe (unique) de G/R vérifiant la relation A = AC , pour tout élément c du quasi-résiduel $\langle \alpha \mathbin{.\!\cdot} \alpha \rangle$ ($\subseteq$ C) , on a : $ac \leqslant \alpha$ et $a'c \leqslant \alpha$. a et a' admettent une borne supérieure dans le quasi-résiduel $\langle \alpha \mathbin{\cdot\!.} c \rangle$ qui est leur borne supérieure dans A d'après le premier point. Ceci achève la démonstration du théorème.

Enfin j'énoncerai, sans démonstration, les deux résultats suivants :

PROPOSITION 1. - Si toutes les classes modulo R d'un groupoïde quasi-filtrant supérieurement sont des sup-demi-treillis, il en est de même des quasi-résiduels.

THÉORÈME 8. - Pour que toute classe A modulo R d'un groupoïde G quasi-filtrant supérieurement soit un ensemble ordonné en sup-demi-treillis vérifiant la condition :

$$(\forall\, c \in G)\ (\forall\, a\ ,\ a' \in A)\quad (a \vee a')c = ac \vee a'c \quad \text{et} \quad c(a \vee a') = ca \vee ca'\ ,$$

il faut et il suffit que tout quasi-résiduel de G soit ordonné en sup-demi-treillis.

En remarquant toutefois que la condition imposée au groupoïde d'être quasi-filtrant supérieurement est indispensable, compte tenu du fait que toutes les classes modulo R d'un groupoïde quasi-résidué (où l'équivalence R est compatible avec la quasi-résiduation) peuvent être des ensembles ordonnés en sup-demi-treillis, sans qu'il en soit de même pour les quasi-résiduels.

III. Troisième partie

Je désignerai ici par G un groupoïde quasi-$\vee$-inductif où l'équivalence R est compatible avec la quasi-résiduation. Notons en effet que tous les quasi-résiduels d'un groupoïde quasi-résidué peuvent être des ensembles inductifs sans que l'équivalence R soit compatible avec la quasi-résiduation.

THÉORÈME 9. - Si une classe de G/R est un ensemble inductif, il en est de même de toute classe de G/R .

Si $(a_n)_{n \in \underset{\sim}{N}}$ désigne une chaîne ascendante non majorée d'une classe A de G/R , C une classe quelconque de G/R , et B la classe (unique) modulo R vérifiant la relation C = BA , pour tout élément b de B , la chaîne croissante $(ba_n)_{n \in \underset{\sim}{N}}$ ne peut être majorée dans C . Sinon il existerait un élément c de la classe C vérifiant la relation :

$$(\forall\, n \in \underset{\sim}{N})\quad a_n \in \langle c \mathbin{.\!\cdot} b \rangle\ ,$$

et la chaîne $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ serait majorée dans ce quasi-résiduel, donc dans A .

COROLLAIRE 2. - Si G est un groupoïde quasi-$\vee$-inductif où l'équivalence R est compatible avec la quasi-résiduation,

1° ou bien toutes les classes de G/R sont des ensembles inductifs ;
2° ou bien aucune classe de G/R n'est un ensemble inductif.

COROLLAIRE 3. - Si une classe de G/R admet un élément maximum, toute classe de G/R est un ensemble inductif (et admet donc au moins un élément maximal) et filtrant inférieurement. Et donc, si G admet de plus un élément minimal, G est quasi-filtrant inférieurement du type I.

Remarquons que l'existence d'un élément maximal, non maximum, dans une classe de G/R n'implique pas que les classes de G/R soient des ensembles inductifs.

J'énoncerai, sans démonstration, les conditions suivantes suffisantes pour qu'il en soit ainsi :

PROPOSITION 2. - Si l'une quelconques des conditions suivantes est vérifiée :

1° G est quasi-filtrant inférieurement du type I,
2° L'ensemble $R(G)$ des quasi-résiduels de G est tel que toute chaîne décroissante d'éléments de $R(G)$ a une intersection non vide dans $P(G)$ (en particulier, si $R(G)$ est artinien),

alors toute classe de G/R est un ensemble inductif.

Remarque. - Notons que G peut être quasi-filtrant inférieurement du type II sans que les classes de G/R soient des ensembles inductifs.

IV. Quatrième partie

Je dirai qu'un ensemble ordonné E est $\wedge$-inductif s'il satisfait à la condition suivante : "Toute chaîne descendante d'éléments de E est minorée dans E ". Par ailleurs, notons que tous les quasi-résiduels d'un groupoïde quasi-résidué peuvent être des ensembles $\wedge$-inductifs sans que l'équivalence R soit compatible avec la quasi-résiduation.

Je désignerai ici par G un groupoïde quasi-résidué où l'équivalence R est compatible avec la quasi-résiduation. On obtient aisément le résultat suivant :

THÉORÈME 10. - Une condition nécessaire et suffisante pour que toutes les classes de G/R soient des ensembles $\wedge$-inductifs est que G soit quasi-$\wedge$-inductif.

COROLLAIRE 4. - Pour qu'un groupoïde quasi-résidué soit quasi-filtrant inférieurement du type I, il faut et il suffit qu'il soit à la fois quasi-filtrant inférieurement et quasi-$\wedge$-inductif.

J'énoncerai également, sans démonstration, les résultats suivants :

PROPOSITION 3. - Si l'ensemble $R(G)$ des quasi-résiduels de G satisfait à la condition suivante : "Toute chaîne décroissante d'éléments de $R(G)$ a une intersection non vide dans $P(G)$ ", alors G est quasi-$\wedge$-inductif.

COROLLAIRE 5. - Si $R(G)$ est artinien, G est quasi-$\wedge$-inductif. Si de plus G est quasi-$\vee$-inductif, toutes les classes de G/R sont des ensembles à la fois $\wedge$-inductifs et inductifs.

Remarque. - On montre également que, pour que toutes les classes de G/R soient des ensembles artiniens, il faut et il suffit qu'il en soit de même pour les quasi-résiduels de G .

V. Cinquième partie

J'énoncerai maintenant les résultats concernant la forme générale des groupoïdes quasi-filtrants inférieurement des types I et II, chacun de ces types étant décomposé en quatre sous-types de la manière suivante :

(A) Groupoïde quasi-filtrant inférieurement du type I.

C'est donc un groupoïde à la fois quasi-filtrant inférieurement et quasi-$\wedge$-inductif.

Type I.1 : Groupoïde résidué du type I.

THÉORÈME 11. - Si G est un groupoïde résidué du type I, toute classe de G/R est un ensemble filtrant, et admet un élément maximum et un élément minimum.

G étant résidué (i. e. quasi-filtrant supérieurement et quasi-$\vee$-inductif), toute classe de G/R est un ensemble filtrant avec élément minimum (théorèmes 5 et 6), et inductif (proposition 2).

Type I.2 : Groupoïde quasi-filtrant inférieurement du type I, quasi-filtrant, mais non quasi-$\vee$-inductif.

THÉORÈME 12. - Si G est un groupoïde du type I.2, toutes les classes de G/R sont des ensembles filtrants et possèdent un élément minimum (tout ou partie des classes de G/R pouvant être ou non des ensembles inductifs, i. e. admettre ou non un élément maximum).

Type I.3 : Groupoïde quasi-filtrant inférieurement du type I, quasi-$\vee$-inductif, mais non quasi-filtrant supérieurement.

THÉORÈME 13. - Si G est un groupoïde du type I.3, toutes les classes de G/R sont des ensembles inductifs et admettent un élément minimum (tout ou partie des classes de G/R pouvant être, ou non, des ensembles filtrants, i. e. admettre ou non un élément maximum).

Type I.4 : Groupoïde quasi-filtrant inférieurement du type I, non quasi-$\vee$-inductif, ni quasi-filtrant supérieurement.

THÉORÈME 14. - Si G est un groupoïde du type I.4, toutes les classes de G/R admettent un élément minimum (tout ou partie des classes de G/R pouvant être ou non des ensembles inductifs ou filtrants et, en particulier, admettre ou non un élément maximum).

(B) Groupoïde quasi-filtrant inférieurement du type II.

C'est donc un groupoïde quasi-filtrant inférieurement, non quasi-$\wedge$-inductif.

Type II.1 : Groupoïde résidué quasi-filtrant inférieurement du type II.

THÉORÈME 15. - Si G est un groupoïde résidué du type II.1, toutes les classes de G/R sont des ensembles filtrants (sans élément minimum) et,

1° ou bien toute classe de G/R est un ensemble inductif et admet donc un élément maximum ;

2° ou bien aucune classe de G/R n'est un ensemble inductif, et n'admet donc ni d'élémont maximum, ni d'élément minimum (i. e. G n'admet aucun élément minimal et aucun élément maximàl).

Type II.2 : Groupoïde quasi-filtrant non quasi-$\wedge$-inductif ni quasi-$\vee$-inductif.

THÉORÈME 16. - Si G est un groupoïde du type II.2, toutes les classes de G/R sont des ensembles filtrants, tout ou partie des classes de G/R pouvant admettre ou non un élément maximum (i. e. être ou non des ensembles inductifs), G n'admettant aucun élément minimal.

Type II.3 : Groupoïde quasi-résidué du type II, quasi-$\vee$-inductif, non quasi-filtrant supérieurement.

THÉORÈME 17. - Si G est un groupoïde du type II.3, toutes les classes de G/R sont des ensembles filtrants **inférieurement** (sans élément minimal) et :

1° ou bien toutes les classes de G/R sont des ensembles inductifs, tout ou partie des classes pouvant être ou non des ensembles filtrants (i. e. admettre ou non un élément maximum),

2° ou bien aucune classe de G/R n'est un ensemble inductif, tout ou partie des classes de G/R pouvant être ou non des ensembles filtrants.

Type II.4 : Groupoïde quasi-résidué du type II, ni quasi-$\vee$-inductif, ni quasi-filtrant supérieurement.

THÉORÈME 18. - Si G est un groupoïde du type II.4, toutes les classes de G/R sont des ensembles filtrants inférieurement sans élément minimal (tout ou partie des classes de G/R pouvant être ou non des ensembles filtrants ou inductifs, et, en particulier, admettre ou non un élément maximum).

VI. Sixième partie

Pour illustrer l'étude précédente, étudions le cas d'un demi-groupe quasi-résidué D. Notons tout d'abord que, dans D, l'équivalence R est compatible avec la quasi-résiduation, puisqu'un tel groupoïde vérifie la condition (A) du théorème 1.

D'autre part, le lemme 2 nous permet d'énoncer le résultat suivant :

THÉORÈME 19. - Tout demi-groupe quasi-résidué D est quasi-filtrant inférieurement.

Supposons qu'une classe A de D/R ne soit pas un ensemble filtrant inférieurement. Compte tenu du lemme 2, il existe a, a' et α dans A vérifiant les relations :

$$a < \alpha \ , \quad a' < \alpha \quad \text{et} \quad a^{\leqslant} \cap a'^{\leqslant} = \emptyset \ .$$

D'autre part, D étant quasi-résidué, il existe y et z dans D vérifiant les relations $\alpha z \leqslant a$ et $y\alpha \leqslant a'$. On en déduit aussitôt que $y\alpha z$ minore à la fois a et a', ce qui établit la contradiction cherchée.

Remarque. - On vérifie immédiatement, en se reportant à la démonstration ci-dessus, que tout groupoïde quasi-résidué G, vérifiant la relation :

$$(\forall\, x\, ,\, y\, ,\, z \in G) \quad x(yz) \ \text{et} \ (xy)z \ \text{admettent un minorant commun,}$$

est quasi-filtrant inférieurement.

De ce qui précède résulte aussitôt :

THÉORÈME 20. - Si D est un demi-groupe résidué, toutes les classes de D/R sont des ensembles filtrants, et alors :

- ou bien toute classe admet un élément maximum et un élément minimum,
- ou bien toute classe admet un élément maximum, D n'admettant aucun élément

minimal,

- ou bien D n'admet pas d'élément maximal, ni d'élément minimal,

Résultat qui précise l'énoncé donné par BLYTH ([1], th. 1.7, p. I.14) concernant les mêmes structures.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BLYTH (T. S.). - Contribution à la théorie de la résiduation dans les structures algébriques ordonnées (Thèse Sc. math. Paris, 1963).

[2] DUBREIL (P.). - Algèbre, 3e édition. - Paris, Gauthier-Villars, 1963 (Cahiers scientifiques, 20).

[3] DUBREIL-JACOTIN (M.-L.), LESIEUR (L.) et CROISOT (R.). - Leçons sur la théorie des treillis, des stuctures algébriques ordonnées et des treillis géométriques. - Paris, Gauthier-Villars, 1953 (Cahiers scientifiques, 21).

[4] DUBREIL (P.) et DUBREIL-JACOTIN (M.-L.). - Leçons d'algèbre moderne, 1re édition. - Paris, Dunod, 1961 (Collection universitaire de Mathématiques, 6).

[5] DUBREIL-JACOTIN (M.-L.). - Sur les images homomorphes d'un demi-groupe ordonné, Bull. Soc. math. France, t. 92, 1964, p. 101-115.

[6] FUCHS (L.). - On group homomorphic images of partially ordered semigroups, Acta Scient. Math. Szeged, t. 25, 1964, p. 139-142.

[7] MAURY (G.). - La condition "intégralement clos" dans quelques structures algébriques, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., t. 78, 1961, p. 31-100 (Thèse Sc. math. Paris, 1960).

[8] MOLINARO (I.). - Demi-groupes résidutifs, J. Math. pures et appl., 9e série, t. 39, 1960, p. 319-356 (Thèse Sc. math. Paris, 1956).

[9] QUERRÉ (J.). - Contribution à la théorie des structures ordonnées et des systèmes d'idéaux (Thèse Sc. math. Paris, 1963).

(Texte reçu le 16 novembre 1970)

Claude GUILLEVIN
13 avenue Georges Clémenceau
29 N - BREST