Mahmoud Djabali

Anneaux de fractions artiniens

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 20, nº 1 (1966-1967), exp. nº 7, p. 1-8

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1966-1967__20_1_A6_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
20e année, 1966/67, n° 7

9 janvier 1967

ANNEAUX DE FRACTIONS ARTINIENS

par Mahmoud DJABALI

Nous nous proposons d'exposer quelques résultats contenus dans un article de L. SMALL [3]. L'auteur y donnait une condition nécessaire et suffisante pour qu'un anneau noethérien possède un anneau de fractions artinien. Il étudiait ensuite le cas d'un anneau quelconque qui possède un anneau de fractions artinien. Mais alors certains de ses résultats étaient faux. Un rectificatif a paru depuis [4].

Dans la suite, nous parlerons d'anneaux noethériens ou artiniens sans préciser "à gauche". De même, le terme idéal sans autre précision voudra dire idéal "à gauche".

I

Rappelons quelques définitions.

DÉFINITION 1.1. - Un anneau A' est dit anneau de fractions (à gauche) partiel d'un anneau A, si A' contient A et si tout élément de A' s'écrit sous la forme $b^{-1} a$, avec b et a appartenant à A.

On dit aussi que A est un ordre dans A'.

DÉFINITION 1.2. - Un anneau A' est dit anneau de fractions total de A, si A est un ordre dans A' et si tout élément régulier de A est inversible dans A'.

En général, on écrit alors $A' = F(A)$.

On fait intervenir le plus souvent des anneaux de fractions dans les conditions suivantes. Soit S un système multiplicatif d'éléments réguliers de A. On cherche à plonger A dans un anneau de fractions A' dont les éléments s'écrivent $b^{-1} a$, $b \in S$, $a \in A$, et dans lequel tout élément de S est inversible. Pour cela, il faut et il suffit que la condition suivante soit vérifiée.

<u>Condition du multiple commun</u>. - Pour tout couple b , a, $b \in S$, $a \in A$, il existe un couple b' , a', $b' \in S$, $a' \in A$, tel que

On posera alors $A' = A_S$. Réciproquement, si A' est un anneau de fractions de A , on pourra écrire A' sous la forme $A' = A_S$. Il suffira d'appeler S l'ensemble des éléments de A inversibles dans A' .

DÉFINITION 1.3. - On dira qu'un anneau A est un anneau de Goldie si :

(a) Le A-module à gauche ${}_A A$ est de dimension finie (1) ;

(b) Les annulateurs à gauche des éléments de A vérifient la condition maximale.

En particulier, un anneau noethérien est un anneau de Goldie.

THÉORÈME 1.1 (GOLDIE). - Pour qu'un anneau possède un anneau de fractions total semi-simple, il faut et il suffit que ce soit un anneau de Goldie semi-premier [1].

II

LEMME 2.1. - Soit A' un anneau de fractions partiel de A . Si A' possède un anneau de fractions total artinien $F(A')$, alors A possède un anneau de fractions total $F(A)$, et on a

$$F(A) = F(A') \quad .$$

Montrons d'abord que A est un ordre dans $F(A')$. Tout élément de $F(A')$ s'écrit sous la forme $y^{-1} x$, avec y et x appartenant à A' . On peut écrire :

$$y = b^{-1} a \ , \qquad x = c^{-1} d \ ,$$

avec a , b , c et d appartenant à A . Mais $a = by$ est le produit de deux éléments inversibles de $F(A')$. Donc a est inversible, et on a

$$y^{-1} = a^{-1} b \quad .$$

On peut écrire :

$$y^{-1} x = a^{-1} bc^{-1} d \quad .$$

Or on peut mettre bc^{-1} sous la forme $c'^{-1} b'$, avec c' et $b' \in A$. En définitive :

$$y^{-1} x = a^{-1} c'^{-1} b'd = (c'a)^{-1} (b'd) \quad .$$

---

(1) On rappelle qu'un module est de dimension finie s'il n'existe pas de somme directe d'une infinité de sous-modules non nuls.

Soit maintenant b un élément régulier de A. Montrons qu'il est inversible dans $F(A')$. Pour cela, $F(A')$ étant artinien, il est bien connu qu'il suffit que l'annulateur à gauche de b dans $F(A')$ soit nul. Or si $(c^{-1} d)b = 0$, $db = 0$, et comme $d \in A$, on en déduit que $d = 0$.

COROLLAIRE. - Si A possède un anneau de fractions artinien A', A' est un anneau de fractions total de A.

LEMME 2.2. - Si un anneau A possède un anneau de fractions total semi-simple, alors A est semi-premier (voir [1] et théorème 1.1).

Dans la suite, nous appellerons, pour simplifier, radical d'un anneau noethérien son idéal nilpotent maximum.

PROPOSITION 2.1. - Soit A un anneau noethérien. Si A' est un anneau de fractions de A :

1° A' est un anneau noethérien.

2° Soit R (resp. R') le radical de A (resp. A'). Alors $R = R' \cap A$, et pour tout entier p, $R'^p = A'.R^p$.

Pour établir le premier point, on utilise le fait bien connu que si I' est un idéal de A', $I = I' \cap A$ est un idéal de A et

$$I' = A'.I \quad .$$

Soit donc R' le radical de A'. $R' \cap A$ est un idéal nilpotent de A, et donc $R' \cap A \subset R$.

Il reste à montrer que $R \subset R'$. Considérons alors l'anneau A'/R', et soit Φ l'application canonique de A' sur A'/R'. On remarque que tout élément de A'/R' s'écrit sous la forme $[\Phi(b)]^{-1} \Phi(a)$, avec $\Phi(b)$ et $\Phi(a)$ appartenant à $\Phi(A)$. C'est donc que A'/R' est un anneau de fractions de $\Phi(A)$. Mais A'/R' est un anneau noethérien semi-premier. Il possède un anneau de fractions total semi-simple $F(A'/R')$ (théorème 1.1). D'après le lemme (2.1), $\Phi(A)$ admet $F(A'/R')$ comme anneau de fractions total. Donc, d'après le lemme (2.2), $\Phi(A)$ est semi-premier. R étant un idéal nilpotent de A, $\Phi(R)$ devrait être un idéal nilpotent de $\Phi(A)$. Donc $\Phi(R) = 0$, et on a bien $R \subset R'$.

Alors si $R = R' \cap A$, $R' = A'.R$. Considérons par exemple $R'^2 = R'A'.R$. Comme R' est un idéal bilatère, $R'A' = R'$. Donc $R'^2 = R'R = A'R^2$. On verrait, plus généralement, que

$$R'^p = A'R^p \quad (^2) .$$

Dans la suite, nous appellerons φ l'application canonique de A sur A/R .

PROPOSITION 2.2. - <u>Soit</u> A <u>un anneau noethérien, et soit</u> $A' = A_S$. <u>Les éléments de</u> $\varphi(S)$ <u>sont réguliers dans</u> A/R .

Il suffira de montrer que si $b \in S$,

$$b\lambda \in R \implies \lambda \in R \quad \text{et} \quad \lambda b \in R \implies \lambda \in R .$$

Supposons, par exemple, que $b\lambda = \beta$, $\beta \in R$. Alors $\lambda = b^{-1} \beta \in A'R = R'$. Donc $\lambda \in R' \cap A = R$.

La démonstration est analogue si $\lambda b \in R$: on remarquera que R' est un idéal bilatère.

THÉORÈME 2.1. - <u>Soit</u> A <u>un anneau noethérien. Soit</u> $A' = A_S$. <u>On peut former l'anneau de fractions</u> $(A/R)_{\varphi(S)}$, <u>et cet anneau est isomorphe à</u> A'/R' .

Il est immédiat que A/R vérifie la propriété du multiple commun par rapport à $\varphi(S)$. L'isomorphisme cherché est le suivant :

$$[\Phi(b)]^{-1} \Phi(a) \to [\varphi(b)]^{-1} \varphi(a) .$$

III

Soient A un anneau noethérien, et R son radical.

DÉFINITION 3.1. - On dira que A vérifie la condition de régularité, si tout élément régulier modulo R est régulier dans A .

Nous nous proposons de montrer que la condition nécessaire et suffisante pour que A possède un anneau de fractions total artinien est qu'il vérifie la condition de régularité.

THÉORÈME 3.1. - <u>Si</u> A <u>possède un anneau de fractions total artinien, il vérifie la condition de régularité</u>.

(^{2}) On n'a pas en général $R^p = R'^p \cap A$.

Soit B l'ensemble des éléments réguliers de A . L'anneau $F(A) = A_B$ est artinien. Le théorème (2.1) montre que l'anneau $(A/R)_{\varphi(B)}$ est isomorphe à $F(A)/F(A)R$. Supposons que $\varphi(b)$ soit régulier dans A/R . On verra, comme dans la démonstration du lemme (2.1), que $\varphi(b)$ est inversible dans $(A/R)_{\varphi(B)}$. Plaçons-nous alors dans l'anneau $F(A)/F(A).R$. $\Phi(b)$ y est inversible. Donc il existe $b' \in F(A)$ tel que

$$\Phi(b')\ \Phi(b) = \Phi(b)\ \Phi(b') = \Phi(1) \quad .$$

Par exemple, on a $b'b = 1 + \beta$, $\beta \in F(A).R$. Mais β est nilpotent, et donc $1 + \beta$ est inversible. On voit que b est inversible à gauche dans $F(A)$. Pour les mêmes raisons, b est inversible à droite, et donc en définitive inversible tout court. b est donc régulier dans $F(A)$, et a fortiori dans A .

Etudions maintenant la réciproque. Soit A un anneau noethérien qui vérifie la condition de régularité. Posons :

$$S = \{b \ , \ \varphi(b) \text{ régulier dans } A/R\} \quad .$$

Alors S est un système multiplicatif d'éléments réguliers de A . Nous allons montrer que A vérifie la condition du multiple commun par rapport à S .

LEMME 3.1. - Considérons l'idéal bilatère $T_1 = R \cap \mathrm{Ann}_d(R)$. Soient $a \in T_1$, et b tel que $\mathrm{Ann}_g(b) = 0$. Alors il existe un élément $b' \in S$ tel que $b'a \in Ab$.

Montrons d'abord que $\varphi(Ab \because a)$ est essentiel dans A/R , c'est-à-dire qu'il a une intersection non nulle avec tout idéal non nul de A/R . Cela revient à dire que si I est un idéal de A tel que $I \not\subset R$, alors

$$Ab \because a \cap I \not\subset R \quad .$$

Si $Ia = 0$, alors $Ab \because a \supset I$. Supposons $Ia \neq 0$. Comme $\mathrm{Ann}_g(b) = 0$, et que ${}_A A$ est de dimension finie, Ab est essentiel dans A (voir par exemple [2]). Donc $Ia \cap Ab \neq 0$. Il existe $i \in I$ tel que $ia = a'b \neq 0$. Mais comme $Ra = 0$, $i \notin R$.

Mais on sait que dans un anneau de Goldie semi-premier, tout idéal essentiel contient un élément régulier (voir [1]). Donc $Ab \because a$ contient un élément dont l'image par φ est un élément régulier de A/R , c'est-à-dire un élément de S .

PROPOSITION 3.1. - Soit $b \in S$. Pour tout $a \in R$, l'idéal $Ab \because a$ contient un élément de S .

Le résultat est vrai si $a \in T_1$, d'après le lemme précédent. Considérons la suite croissante des idéaux bilatères $T_k = R \cap \mathrm{Ann}_d(R^k)$. Puisque R est nilpotent, tout élément de R appartient à un T_k . Raisonnons par récurrence sur k , et supposons la propriété vraie pour tout élément de T_k . Soit donc $a \in T_{k+1}$. Considérons l'anneau-quotient $A_k = A/T_k$. C'est un anneau noethérien dont le radical R_k est égal à R/T_k . Pour tout $a \in A$, posons $a_k = a + T_k$. La suite du raisonnement repose sur les lemmes suivants dont la démonstration n'offre aucune difficulté.

LEMME 3.2. - Si $b \in S$, $\mathrm{Ann}_g(b_k) = 0$.

LEMME 3.3. - $T_{k+1}/T_k = R_k \cap \mathrm{Ann}_d(R_k)$.

Mais alors nous nous retrouvons dans une situation analogue à celle du lemme 3.1. Il existe donc un élément c_k , avec c_k régulier modulo R_k , tel que :

$$c_k \in A_k\, b_k \,\dot{\cdot}\, a_k \quad .$$

On peut écrire $ca = c'b + a$, avec $a_1 \in T_k$.

Mais remarquons maintenant que A_k/R_k est isomorphe à A/R , l'isomorphisme faisant correspondre à la classe d'équivalence de c_k , $c_k + R_k$, la classe d'équivalence de c , $c + R$. Si c_k est régulier modulo R_k , c est régulier modulo R , et donc $c \in S$.

D'après l'hypothèse de récurrence, il existe $c' \in S$ tel que $c'a_1 \in Ab$. Donc, en posant $b' = c'c$, $b' \in S$, et on voit que $b'a \in Ab$.

PROPOSITION 3.2. - Soient $b \in S$, et $a \in A$. Alors $Ab \,\dot{\cdot}\, a$ contient un élément de S .

Le résultat est établi si $a \in R$. Si $a \notin R$, puisque A/R possède un anneau de fractions total (théorème 1.1), il existe $c \in S$ tel que

$$\varphi(c)\ \varphi(a) = \varphi(a')\ \varphi(b) \quad ,$$

soit

$$ca = a'b + a_1 \ , \qquad a_1 \in R \quad .$$

Alors il existe $c' \in S$ tel que $c'a_1 \in Ab$. En posant $c'c = b'$,

$$b'a \in Ab \qquad \text{avec } b' \in S \quad .$$

THÉORÈME 3.2. - Si un anneau noethérien vérifie la condition de régularité, il possède un anneau de fractions total artinien.

Nous venons de voir que nous pouvons former l'anneau $A' = A_S$. Montrons que A_S est artinien. Le théorème 2.1 nous montre que A'/R' est isomorphe à $(A/R)_{\varphi(S)}$. Mais par construction, $\varphi(S)$ est l'ensemble de tous les éléments réguliers de A/R. Donc $(A/R)_{\varphi(S)}$ est un anneau de fractions total de l'anneau de Goldie semi-premier A/R. C'est donc un anneau semi-simple. A'/R' est semi-simple, et d'autre part, pour tout entier p, R'^p/R'^{p+1} est un A'/R' module semi-simple, donc un A' module semi-simple et de plus de type fini puisque A' est noethérien. Alors il n'y a aucune difficulté à voir que A' contient une suite de Jordan-Hölder (cf. la démonstration qui montre qu'un anneau artinien unitaire est noethérien).

A' est un anneau artinien. Le corollaire du lemme 2.1 montre alors que A' est un anneau de fractions total pour A.

On peut se demander quels sont les anneaux noethériens qui satisfont à la condition de régularité. L. SMALL donne une réponse pour les anneaux commutatifs (voir [3]).

THÉORÈME 3.3. - Un anneau noethérien commutatif vérifie la condition de régularité si, et seulement si, les idéaux premiers associés à 0 sont minimaux.

IV

Disons quelques mots des anneaux qui possèdent un anneau de fractions artinien.

DÉFINITION 4.1. - On dira qu'un anneau A est un T-anneau de Goldie si :

1° Il possède un idéal nilpotent maximum R ;

2° Si on pose $T_k = R \cap \mathrm{Ann}_d(R^k)$, pour tout entier k, l'anneau $A_k = A/T_k$ est un anneau de Goldie.

L. SMALL est en mesure de donner le résultat suivant (voir [3] et [4]).

THÉORÈME 4.1. - Pour qu'un anneau A possède un anneau de fractions total artinien, il faut et il suffit que ce soit un T-anneau de Goldie.

BIBLIOGRAPHIE

[1] GOLDIE (A. W.). - Semi-prime rings with maximum conditions, Proc. London math. Soc., t. 10, 1960, p. 201-220.

[2] LESIEUR (L.) et CROISOT (R.). - Sur les anneaux premiers noethériens à gauche, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 3e série, t. 76, 1959, p. 161-183.

[3] SMALL (L.). - Orders in artinian rings, J. of Algebra, t. 4, 1966, p. 13-41.

[4] SMALL (L.). - Correction and addendum to "Orders in artinian rings", J. of Algebra, t. 4, 1966, p. 505-507.