

SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

GUY RENAULT

Anneaux réduits non commutatifs

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 20, n° 1 (1966-1967), exp. n° 1,
p. 1-9

http://www.numdam.org/item?id=SD_1966-1967__20_1_A1_0

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1966-1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ANNEAUX RÉDUITS NON COMMUTATIFS

par Guy RENAULT

On dit qu'un anneau A est réduit s'il ne contient pas d'éléments nilpotents non nuls. Dans [3], L. LESIEUR a posé les deux problèmes suivants :

PROBLÈME 1. - Si un anneau primitif est réduit, est-ce un anneau intègre ?

PROBLÈME 2. - Si un anneau premier est réduit, est-ce un anneau intègre ?

C. FAITH et Y. UTUMI ont montré [2] que la réponse est affirmative dans le cas d'un anneau premier noethérien à gauche.

Nous montrerons que cette propriété est vraie dans le cas général, et nous nous intéresserons ensuite plus spécialement aux enveloppes injectives des anneaux réduits.

1. Anneaux premiers intègres.

LEMME 1.1. - Soient x et y deux éléments non nuls d'un anneau A , tels que $xy = 0$; pour tout élément $a \in A$, yax est un élément nilpotent.

En effet :

$$(yax)^2 = yax yax = 0 .$$

PROPOSITION 1.1. - Dans un anneau réduit, l'annulateur à gauche (resp. à droite) est un idéal bilatère.

Soit x un élément de A . $ux = 0 \iff xu = 0$. En effet :

$$ux = 0 \implies (xu)^2 = 0 \implies xu = 0 ,$$

$$xu = 0 \implies (ux)^2 = 0 \implies ux = 0 .$$

Montrons que l'annulateur à gauche de x est un idéal bilatère. Soit $a \in A$; si $ux = 0$, il faut prouver que $uax = 0$.

D'après ce qui précède, on a les implications suivantes :

$$ux = 0 \implies xu = 0 \implies xua = 0 \implies uax = 0 .$$

THÉOREME 1.1. - Pour qu'un anneau premier soit intègre, il faut et il suffit qu'il soit réduit.

Si x est un élément non nul d'un anneau réduit A , d'après la proposition 1.1, $\text{Ann}(x)$ est un idéal bilatère, et on a

$$\text{Ann}(x).Ax = (0) \ ;$$

si, de plus, A est premier, cela entraîne $\text{Ann}(x) = 0$, et A est intègre.

2. Anneaux à idéal singulier nul.

Rappelons que, dans un anneau A , l'idéal singulier est l'idéal, ensemble des éléments x de A , tel que $\text{Ann}(x)$ soit essentiel dans A .

PROPOSITION 2.1. - Un anneau réduit est à idéal singulier nul.

La proposition résultera du lemme plus précis suivant :

LEMME 2.1. - Si x est un élément d'un anneau réduit A , on a :

$$Ax \cap \text{Ann}(x) = (0) \ .$$

Soit $y \in Ax \cap \text{Ann}(x)$. $y = ux$ et $y.x = 0$; d'après le lemme 1.1, $xy = 0$, ce qui entraîne

$$(ux)^2 = 0 \quad \text{et} \quad y = 0 \ .$$

La réciproque de la proposition 2.1 est fausse. On sait, en effet, qu'un anneau noethérien à gauche, sans idéaux nilpotents non nuls, est à idéal singulier nul; en particulier, un anneau premier noethérien à gauche, non intègre, n'est pas réduit (théorème 1.1), on peut même donner la précision suivante.

PROPRIÉTÉ 2.1. - Si x est un diviseur de zéro dans un anneau premier A , il existe un élément nilpotent non nul appartenant à l'idéal Ax .

Par hypothèse, il existe u élément non nul de A tel que $ux = 0$. A étant premier, $\text{Ann}(Ax) = 0$; il existe donc $b \in A$ tel que

$$ubx \neq 0 \quad \text{et} \quad (ubx)^2 = 0 \ .$$

PROPRIÉTÉ 2.2. - Un anneau commutatif, à idéal singulier nul, est réduit.

Sinon il existe un élément non nul x de A tel que $x \in \text{Ann}(x)$; $\text{Ann}(x)$ est un sous-module complément dans A , il existe donc un idéal B non nul avec $B \cap \text{Ann}(x) = 0$; en particulier, $Bx = 0$ et $B \subset \text{Ann}(x)$, ce qui est impossible.

3. Anneaux réduits noethériens à gauche.

LEMME 3.1. - Si x est un élément d'un anneau réduit A , alors

$$\text{Ann}(x) = \text{Ann}(Ax) .$$

C'est une conséquence facile du lemme 1.1.

Rappelons ([4]) que si M est un A -module, un idéal bilatère premier \mathfrak{P} est dit associé à M , s'il existe un élément x de M , $x \neq 0$, tel que \mathfrak{P} soit l'annulateur de tout sous-module non nul de Ax .

COROLLAIRE. - Les idéaux bilatères premiers, associés à un anneau réduit A , sont complètement premiers.

Soit \mathfrak{P} un tel idéal ; il existe $x \in A$, $x \neq 0$, tel que \mathfrak{P} soit l'annulateur de tout sous-module non nul de Ax . D'après le lemme 3.1, cela revient à dire que, quel que soit $a \in A$, avec $ax \neq 0$, on a

$$\text{Ann}(ax) = \mathfrak{P} .$$

\mathfrak{P} est complètement premier, en effet :

$$ab \in \mathfrak{P}, \quad b \notin \mathfrak{P} \implies abx = 0, \quad bx \neq 0 ;$$

$$\text{Ann}(bx) = \mathfrak{P} \quad \text{et} \quad a \in \mathfrak{P} .$$

PROPOSITION 3.1. - Dans un anneau A noethérien à gauche réduit, on a :

$$(0) = \bigcap_{i=1}^n \mathfrak{P}_i$$

où les \mathfrak{P}_i sont les idéaux complètement premiers associés à A . $\bigcup_{i=1}^n \mathfrak{P}_i$ est l'ensemble des diviseurs de zéro.

La première partie de la proposition résulte de la décomposition noethérienne de (0) et du corollaire précédent ; d'autre part, le lemme 3.1 prouve que les \mathfrak{P}_i sont les éléments maximaux de l'ensemble des annulateurs à gauche des éléments non nuls x de A .

PROPOSITION 3.2. - Pour qu'un idéal à gauche d'un anneau noethérien réduit soit essentiel, il faut et il suffit qu'il contienne un élément non diviseur de zéro.

Pour qu'un idéal à gauche I soit essentiel, il faut et il suffit que

$$I \not\subset \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{P}_i$$

où les \mathfrak{P}_i sont les idéaux bilatères premiers associés à A . La propriété suivante est classique :

Si un idéal I est contenu dans une réunion finie d'idéaux bilatères premiers, alors I est contenu dans l'un d'eux et

$$I \subset \mathfrak{P}_i \implies I \text{ non essentiel ,}$$

car les \mathfrak{P}_i sont des sous-modules compléments maximaux. La proposition 3.1 montre donc que I essentiel entraîne que I contient un élément non diviseur de zéro.

On en déduit très facilement que A admet un anneau total de fractions ; la théorie de A. W. GOLDIE se trouve donc très simplifiée dans ce cas.

4. Applications aux enveloppes injectives.

LEMME 4.1. - Soit E un A -module injectif, dont le sous-module singulier est nul ; pour qu'il n'existe pas d'endomorphismes nilpotents non nuls de E , il faut et il suffit que, pour tout endomorphisme f de E et tout sous-module injectif E_1 , on ait

$$f(E_1) \subset E_1 .$$

Si f est un endomorphisme non nul de E , on sait que $\ker f$ est un sous-module injectif de E , on a donc

$$E = \ker f \oplus F ,$$

où F est un sous-module injectif non nul. Si $f(F) \subset F$, f^2 est alors non nul, ce qui montre que la condition du lemme est suffisante.

Supposons maintenant qu'il existe un endomorphisme f de E et un sous-module injectif E_1 de E tels que $f(E_1) \not\subset E_1$. $\ker f \cap E_1$ est alors un sous-module injectif différent de E_1 . On appellera K un supplémentaire de $\ker f \cap E_1$ dans E_1 (K peut éventuellement être égal à E_1). Il existe une décomposition de E du type suivant :

$$E = \ker f \oplus G \oplus K \quad \text{avec } f(K) \not\subset K .$$

Si p désigne la projection canonique de E sur K , $g = f \circ p$ est telle que $g(K) \not\subset K$ et

$$\ker g = \ker f \oplus G .$$

Soit q la projection canonique de E sur $\ker g$; $h = q \circ g$ est un endomorphisme non nul, et on a $h^2 = 0$.

Si A est un anneau à idéal singulier nul, on sait que son enveloppe injective B est un anneau régulier injectif [1] ; nous allons appliquer le lemme à cette situation.

THÉOREME 4.1. - Soit A un anneau réduit ; les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) L'enveloppe injective B de A est un anneau réduit,
- (ii) Les sous-modules complémentés dans A sont des idéaux bilatères,
- (iii) Si x et y sont deux éléments non nuls de A ,

$$Ax \cap Ay = (0) \implies xy = yx = 0 \text{ .}$$

D'après la proposition 2.1, l'idéal singulier de A est nul, et l'enveloppe injective B de A est un anneau régulier injectif.

(i) \implies (ii) . - D'après le lemme 4.1, les sous-modules injectifs de B sont des idéaux bilatères. Si X est un sous-module complémenté dans A , $X = E_1 \cap A$ où E_1 est un sous-module injectif de B [4], qui est stable, en particulier, par multiplication à droite par les éléments de A : si $a \in A$,

$$Xa \subset E_1 a \cap A \subset E_1 \cap A = X \text{ .}$$

(ii) \implies (i) . - Soit $x \in B$ tel que $x^2 = 0$; si $x \neq 0$, il existe $\alpha \in A$ avec $\alpha x \in A - \{0\}$. Nous aurons besoin du résultat suivant :

LEMME 4.2. - Soit A un anneau à idéal singulier nul, d'enveloppe injective B ; si J est un idéal bilatère de A , et si $E(J)$ désigne une enveloppe injective de J contenue dans B , on a :

$$E(J).x \subset E(J) \quad \text{pour tout élément } x \text{ de } A \text{ .}$$

Soit x un élément de A ; l'homomorphisme g , qui à $j \in J$ fait correspondre jx , élément de J , se prolonge en un endomorphisme f de $E(J)$ qui est la restriction à $E(j)$ d'un endomorphisme f' de B . $f' - g$ est nulle sur J , donc sur $E(J)$, car A est un anneau à idéal singulier nul, par suite $f = g$ et $E(J)x \subset E(J)$.

Revenons à notre démonstration : Bx est un A -module injectif ; d'après le lemme 4.2, $x\alpha \in Bx$, $x\alpha = bx$ avec $b \in B$, d'où $(\alpha x)^2 = 0$ avec $\alpha x \in A - \{0\}$, ce qui est impossible.

(ii) \implies (iii). - Soient x et y deux éléments de A avec $Ax \cap Ay = (0)$; si X est un complément relatif de Ay contenant Ax , on a :

$$XAy \subset X \cap Ay = (0) ,$$

en particulier, $xy = 0$.

(iii) \implies (ii) . - Si X est un complément relatif d'un sous-module non nul Y de A , comme A est réduit,

$$\text{Ann}(Y) \cap Y = (0) ; X \cap Y = (0) \implies XY = 0 , \text{ et } X \subset \text{Ann}(Y) ;$$

finalement, $X = \text{Ann}(Y)$ est un idéal bilatère.

Remarque. - Si A est un anneau réduit, les idempotents de A appartiennent au centre ; en effet, si $x \in A$, les éléments $(1 - e)xe$, $ex(1 - e)$ sont nuls, et $xe = ex = exe$; on en déduit facilement que si A est régulier, alors tout idéal de A est bilatère.

THÉOREME 4.2. - Soit A un anneau réduit vérifiant la condition suivante :

Si x et y sont deux éléments de A , la relation $Ax \cap Ay = (0)$ entraîne $xy = 0$.

Si B est l'anneau régulier, enveloppe injective de A en tant que A -module à gauche, B est également l'enveloppe injective de A en tant que A -module à droite.

LEMME 4.3. - Soit B un anneau régulier réduit, injectif à gauche, alors B est injectif à droite.

Si C est une enveloppe injective de B en tant que A -module à droite, C est, d'après le théorème 4.1, un anneau régulier réduit.

Soit x , un élément non nul de C . L'ensemble des éléments α de B , tels que $x\alpha \in B$, est un idéal essentiel à droite dans B , contenant $\text{Ann}(x) \cap B$, il existe donc un idempotent $e \in B$, $e \notin \text{Ann}(x)$, tel que $xe \in B - \{0\}$, on a vu ci-dessus que $ex = xe$, et par suite, $Bx \cap B \neq (0)$: C est extension essentielle de B en tant que B -module à gauche, et $C = B$.

Appliquons ce résultat à la situation décrite par les hypothèses du théorème 4.2: B est donc un anneau injectif à droite contenant A ; si C est une enveloppe injective à droite de A contenue dans B , C est un A -module injectif à gauche, et $C = B$, d'où le résultat.

COROLLAIRE. - Si un anneau A réduit vérifie la condition suivante :

$$Ax \cap Ay = (0) \implies xy = 0 ,$$

alors

$$xA \cap yA = (0) \implies xy = 0 .$$

Remarques.

1° Si B est un anneau extension essentielle d'un anneau réduit A , cela n'entraîne pas que B soit un anneau réduit : en effet, si A est un anneau intègre d'enveloppe injective B , d'après le théorème 4.1, pour que B soit réduit, il faut et il suffit que B soit un corps, ce serait d'ailleurs le corps des fractions de A . D'où, l'enveloppe injective d'un anneau intègre n'admettant pas de corps des fractions contient des éléments nilpotents non nuls.

2° Un anneau régulier injectif à gauche n'est pas nécessairement injectif à droite comme le montre la propriété suivante : Soit A un anneau intègre non co-irréductible d'enveloppe injective à gauche B ; si x est un élément non inversible de $B - A$, alors $xA \cap A = (0)$.

Si $b = xa$, avec b et $a \in A - \{0\}$,

$$\text{Ann}(x) \cap A \neq (0) \implies \exists c \in \text{Ann}(x) \cap A, \text{ et } cb = cxa = 0 ,$$

ce qui est impossible.

LEMME 4.4. - Soit A un anneau réduit ; si x et y sont deux éléments non nuls de A , tels que les idéaux Ax et Ay sont co-irréductibles, la relation $Ax \cap Ay = (0)$ entraîne $xy = 0$.

Supposons $xy \neq 0$, donc $yx \neq 0$, non nuls. $\text{Ann}(x)$ est un sous-module complément maximal, et $Ax \oplus \text{Ann}(x)$ est un idéal essentiel dans A ; on a :

$$\text{Ann}(xy) = \text{Ann}(x) = \text{Ann}(y) .$$

Il existe $a \in A$, avec $ay \neq 0$, tel que $ay = bx + u$, où $u \in \text{Ann}(x)$; on en déduit $xay = xbx$, la relation $Ax \cap Ay = (0)$ entraîne

$$xbx = 0 \quad \text{et} \quad x \in \text{Ann}(bx) = \text{Ann}(x) ,$$

ce qui est impossible.

THÉOREME 4.3. - Soit A un anneau réduit extension essentielle d'une somme directe de sous-modules co-irréductibles ; alors la relation $Ax \cap Ay = (0)$ entraîne $xy = yx = 0$.

On supposera x et y non nuls ; par hypothèse, Ax est extension essentielle de

$$X = \bigoplus_{i \in I} Ae_i ,$$

où les Ae_i sont des modules co-irréductibles, Ay est extension essentielle de

$$Y = \bigoplus_{j \in J} Af_j ,$$

où les Af_j sont des sous-modules co-irréductibles, et on a $X \cap Y = (0)$. Si $y \in Y$, d'après le lemme 4.4, l'application $f_y : u \mapsto uy$ annule X , donc l'extension maximale essentielle de X (car l'idéal singulier de A est nul), et f_y annule donc Ax , d'où $xy = 0$.

COROLLAIRE. - Si A est un anneau réduit n'admettant pas de somme directe infinie d'idéaux à gauche, son enveloppe injective B est un produit fini de corps.

On sait, de plus, que B est l'anneau total des fractions de A (théorème de Goldie).

5. Anneaux réguliers réduits.

On sait, d'après un théorème de Kaplansky, que si A est un anneau commutatif régulier, tout A -module simple est injectif, cette propriété caractérise d'ailleurs les anneaux commutatifs réguliers. Nous allons étendre ce résultat.

THÉORÈME 5.1. - Si A est un anneau réduit régulier, tout A -module simple est injectif.

Soient Λ un idéal essentiel de A , et f une application non nulle de Λ dans A/\mathfrak{P} où \mathfrak{P} est un idéal maximal (bilatère nécessairement). Si $x \in \Lambda$,

$$\text{Ann}(x).f(x) = 0 \text{ et } f(x) \neq 0 \implies \text{Ann}(x) \subset \mathfrak{P} ,$$

ce qui est équivalent à $x \notin \mathfrak{P}$, donc

$$\ker f \supset \Lambda \cap \mathfrak{P} .$$

Or $\Lambda \cap \mathfrak{P}$ est un sous-module maximal de Λ et $\ker f = \Lambda \cap \mathfrak{P}$. Soit $\lambda \in \Lambda$ tel que $f(\lambda) \neq 0$, $\lambda = \lambda a \lambda$ avec $a \lambda = e \in \Lambda$ et $f(e) \neq 0$. Posons $f(e) = x_0$, si g est l'application de A dans A/\mathfrak{P} définie par $g(y) = yx_0$ pour tout $y \in A$, $g - f$ est nulle sur $\Lambda \cap \mathfrak{P} + A\lambda = \Lambda$, et g prolonge f .

PROPOSITION 5.1. - Soit $(K_i)_{i \in I}$ un ensemble de corps ; l'anneau produit $B = \prod_i K_i$ est un anneau régulier réduit injectif.

Les idéaux $K_i \times \{0\}$ sont des B -modules simples donc injectifs (théorème 5.1), et tout produit de modules injectifs est un module injectif.

Remarque. - L'enveloppe injective d'un anneau régulier commutatif A est un anneau commutatif régulier injectif ; en effet, A se plonge dans l'anneau $B = \prod_p A/\mathfrak{p}$, où \mathfrak{p} décrit les idéaux maximaux de A , et B est injectif ; l'enveloppe injective de A est un sous- A -module de B .

THÉORÈME 5.2. - Si A est un anneau réduit, extension essentielle d'une somme directe d'idéaux co-irréductibles, son enveloppe injective est un produit de corps.

L'enveloppe injective B de A est un anneau régulier injectif réduit (théorème 4.2) qui est extension essentielle de son socle ; le résultat sera la conséquence du lemme suivant :

LEMME 5.1. - Un anneau B régulier, réduit et injectif, qui est extension essentielle de son socle, est un produit de corps.

(0) est en effet intersection, sans éléments superflus, d'idéaux maximaux bilatères $(\mathfrak{p}_i)_{i \in I}$, et B se plonge dans l'anneau $C = \prod_{i \in I} B/\mathfrak{p}_i$, qui est un B -module injectif (théorème 5.1), extension essentielle de son socle $\bigoplus_{i \in I} B/\mathfrak{p}_i$ qui est le socle de B , on en déduit que C est extension essentielle de B , et $C = B$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] GABRIEL (Pierre). - Des catégories abéliennes, Bull. Soc. math. France, t. 90, 1962, p. 323-448 (Thèse Sc. math. Paris, 1961).
- [2] FAITH (Carl) and UTUMI (Yuzo). - On noetherian prime rings, Trans. Amer. math. Soc., t. 114, 1965, p. 53-60.
- [3] LESIEUR (Léonce). - Sur les anneaux tels que $x^n = x$, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et Théorie des nombres, 19e année, 1965/66, n° 13, 8 p.
- [4] RENAULT (Guy). - Sous-modules complémentés dans un module, Bull. Soc. math. France, Mémoire 9, 1967, 79 p. (Thèse Sc. math. Orsay, 1966).