Guy Renault

Anneaux réduits non commutatifs

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 20, nº 1 (1966-1967), exp. nº 1, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1966-1967__20_1_A1_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
20e année, 1966/67, n° 1

14 novembre 1966

ANNEAUX RÉDUITS NON COMMUTATIFS

par Guy RENAULT

On dit qu'un anneau A est réduit s'il ne contient pas d'éléments nilpotents non nuls. Dans [3], L. LESIEUR a posé les deux problèmes suivants :

PROBLÈME 1. - Si un anneau primitif est réduit, est-ce un anneau intègre ?

PROBLÈME 2. - Si un anneau premier est réduit, est-ce un anneau intègre ?

C. FAITH et Y. UTUMI ont montré [2] que la réponse est affirmative dans le cas d'un anneau premier noethérien à gauche.

Nous montrerons que cette propriété est vraie dans le cas général, et nous nous intéresserons ensuite plus spécialement aux enveloppes injectives des anneaux réduits.

1. Anneaux premiers intègres.

LEMME 1.1. - *Soient x et y deux éléments non nuls d'un anneau A, tels que $xy = 0$; pour tout élément $a \in A$, yax est un élément nilpotent.*

En effet :

$$(yax)^2 = yax\,yax = 0 \quad .$$

PROPOSITION 1.1. - *Dans un anneau réduit, l'annulateur à gauche (resp. à droite) est un idéal bilatère.*

Soit x un élément de A. $ux = 0 \iff xu = 0$. En effet :

$$ux = 0 \implies (xu)^2 = 0 \implies xu = 0 \quad ,$$

$$xu = 0 \implies (ux)^2 = 0 \implies ux = 0 \quad .$$

Montrons que l'annulateur à gauche de x est un idéal bilatère. Soit $a \in A$; si $ux = 0$, il faut prouver que $uax = 0$.

D'après ce qui précède, on a les implications suivantes :

$$ux = 0 \implies xu = 0 \implies xua = 0 \implies uax = 0 \quad .$$

THÉORÈME 1.1. - Pour qu'un anneau premier soit intègre, il faut et il suffit qu'il soit réduit.

Si x est un élément non nul d'un anneau réduit A, d'après la proposition 1.1, $\mathrm{Ann}(x)$ est un idéal bilatère, et on a

$$\mathrm{Ann}(x).Ax = (0) \quad ;$$

si, de plus, A est premier, cela entraîne $\mathrm{Ann}(x) = 0$, et A est intègre.

2. Anneaux à idéal singulier nul.

Rappelons que, dans un anneau A, l'idéal singulier est l'idéal, ensemble des éléments x de A, tel que $\mathrm{Ann}(x)$ soit essentiel dans A.

PROPOSITION 2.1. - Un anneau réduit est à idéal singulier nul.

La proposition résultera du lemme plus précis suivant :

LEMME 2.1. - Si x est un élément d'un anneau réduit A, on a :

$$Ax \cap \mathrm{Ann}(x) = (0) \quad .$$

Soit $y \in Ax \cap \mathrm{Ann}(x)$. $y = ux$ et $y.x = 0$; d'après le lemme 1.1, $xy = 0$, ce qui entraîne

$$(ux)^2 = 0 \qquad \text{et} \qquad y = 0 \quad .$$

La réciproque de la proposition 2.1 est fausse. On sait, en effet, qu'un anneau noethérien à gauche, sans idéaux nilpotents non nuls, est à idéal singulier nul ; en particulier, un anneau premier noethérien à gauche, non intègre, n'est pas réduit (théorème 1.1), on peut même donner la précision suivante.

PROPRIÉTÉ 2.1. - Si x est un diviseur de zéro dans un anneau premier A, il existe un élément nilpotent non nul appartenant à l'idéal Ax.

Par hypothèse, il existe u élément non nul de A tel que $ux = 0$. A étant premier, $\mathrm{Ann}(Ax) = 0$; il existe donc $b \in A$ tel que

$$ubx \neq 0 \qquad \text{et} \qquad (ubx)^2 = 0 \quad .$$

PROPRIÉTÉ 2.2. - Un anneau commutatif, à idéal singulier nul, est réduit.

Sinon il existe un élément non nul x de A tel que $x \in \mathrm{Ann}(x)$; $\mathrm{Ann}(x)$ est un sous-module complément dans A, il existe donc un idéal B non nul avec $B \cap \mathrm{Ann}(x) = 0$; en particulier, $Bx = 0$ et $B \subset \mathrm{Ann}(x)$, ce qui est impossible.

3. Anneaux réduits noethériens à gauche.

LEMME 3.1. - Si x est un élément d'un anneau réduit A, alors

$$\mathrm{Ann}(x) = \mathrm{Ann}(Ax) \quad .$$

C'est une conséquence facile du lemme 1.1.

Rappelons ([4]) que si M est un A-module, un idéal bilatère premier $\mathfrak{P}$ est dit associé à M, s'il existe un élément x de M, $x \neq 0$, tel que $\mathfrak{P}$ soit l'annulateur de tout sous-module non nul de Ax.

COROLLAIRE. - Les idéaux bilatères premiers, associés à un anneau réduit A, sont complètement premiers.

Soit $\mathfrak{P}$ un tel idéal ; il existe $x \in A$, $x \neq 0$, tel que $\mathfrak{P}$ soit l'annulateur de tout sous-module non nul de Ax. D'après le lemme 3.1, cela revient à dire que, quel que soit $a \in A$, avec $ax \neq 0$, on a

$$\mathrm{Ann}(ax) = \mathfrak{P} \quad .$$

$\mathfrak{P}$ est complètement premier, en effet :

$$ab \in \mathfrak{P} \;,\quad b \notin \mathfrak{P} \implies abx = 0 \;,\quad bx \neq 0 \quad ;$$

$$\mathrm{Ann}(bx) = \mathfrak{P} \qquad \text{et} \qquad a \in \mathfrak{P} \quad .$$

PROPOSITION 3.1. - Dans un anneau A noethérien à gauche réduit, on a :

$$(0) = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{P}_i$$

où les $\mathfrak{P}_i$ sont les idéaux complètement premiers associés à A. $\bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{P}_i$ est l'ensemble des diviseurs de zéro.

La première partie de la proposition résulte de la décomposition noethérienne de (0) et du corollaire précédent ; d'autre part, le lemme 3.1 prouve que les $\mathfrak{P}_i$ sont les éléments maximaux de l'ensemble des annulateurs à gauche des éléments non nuls x de A.

PROPOSITION 3.2. - Pour qu'un idéal à gauche d'un anneau noethérien réduit soit essentiel, il faut et il suffit qu'il contienne un élément non diviseur de zéro.

Pour qu'un idéal à gauche I soit essentiel, il faut et il suffit que

$$I \not\subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{P}_i$$

où les $\mathcal{P}_i$ sont les idéaux bilatères premiers associés à A. La propriété suivante est classique :

Si un idéal I est contenu dans une réunion finie d'idéaux bilatères premiers, alors I est contenu dans l'un d'eux et

$$I \subset \mathcal{P}_i \implies I \text{ non essentiel} ,$$

car les $\mathcal{P}_i$ sont des sous-modules compléments maximaux. La proposition 3.1 montre donc que I essentiel entraîne que I contient un élément non diviseur de zéro.

On en déduit très facilement que A admet un anneau total de fractions ; la théorie de A. W. GOLDIE se trouve donc très simplifiée dans ce cas.

4. Applications aux enveloppes injectives.

LEMME 4.1. - *Soit E un A-module injectif, dont le sous-module singulier est nul ; pour qu'il n'existe pas d'endomorphismes nilpotents non nuls de E, il faut et il suffit que, pour tout endomorphisme f de E et tout sous-module injectif E_1, on ait*

$$f(E_1) \subset E_1 .$$

Si f est un endomorphisme non nul de E, on sait que $\ker f$ est un sous-module injectif de E, on a donc

$$E = \ker f \oplus F ,$$

où F est un sous-module injectif non nul. Si $f(F) \subset F$, f^2 est alors non nul, ce qui montre que la condition du lemme est suffisante.

Supposons maintenant qu'il existe un endomorphisme f de E et un sous-module injectif E_1 de E tels que $f(E_1) \not\subset E_1$. $\ker f \cap E_1$ est alors un sous-module injectif différent de E_1. On appellera K un supplémentaire de $\ker f \cap E_1$ dans E_1 (K peut éventuellement être égal à E_1). Il existe une décomposition de E du type suivant :

$$E = \ker f \oplus G \oplus K \qquad \text{avec} \quad f(K) \not\subset K .$$

Si p désigne la projection canonique de E sur K, $g = f \circ p$ est telle que $g(K) \not\subset K$ et

$$\ker g = \ker f \oplus G .$$

Soit q la projection canonique de E sur $\ker g$; $h = q \circ g$ est un endomorphisme non nul, et on a $h^2 = 0$.

Si A est un anneau à idéal singulier nul, on sait que son enveloppe injective B est un anneau régulier injectif [1] ; nous allons appliquer le lemme à cette situation.

THÉORÈME 4.1. - *Soit* A *un anneau réduit ; les conditions suivantes sont équivalentes* :

(i) *L'enveloppe injective* B *de* A *est un anneau réduit,*

(ii) *Les sous-modules compléments dans* A *sont des idéaux bilatères,*

(iii) *Si* x *et* y *sont deux éléments non nuls de* A ,

$$Ax \cap Ay = (0) \implies xy = yx = 0 \quad .$$

D'après la proposition 2.1, l'idéal singulier de A est nul, et l'enveloppe injective B de A est un anneau régulier injectif.

(i) $\implies$ (ii) . - D'après le lemme 4.1, les sous-modules injectifs de B sont des idéaux bilatères. Si X est un sous-module complément dans A , $X = E_1 \cap A$ où E_1 est un sous-module injectif de B [4], qui est stable, en particulier, par multiplication à droite par les éléments de A : si $a \in A$,

$$Xa \subset E_1 a \cap A \subset E_1 \cap A = X \quad .$$

(ii) $\implies$ (i) . - Soit $x \in B$ tel que $x^2 = 0$; si $x \neq 0$, il existe $\alpha \in A$ avec $\alpha x \in A - \{0\}$. Nous aurons besoin du résultat suivant :

LEMME 4.2. - *Soit* A *un anneau à idéal singulier nul, d'enveloppe injective* B ; *si* J *est un idéal bilatère de* A , *et si* $E(J)$ *désigne une enveloppe injective de* J *contenue dans* B , *on a* :

$$E(J).x \subset E(J) \qquad \textit{pour tout élément } x \textit{ de } A \ .$$

Soit x un élément de A ; l'homomorphisme g , qui à $j \in J$ fait correspondre jx , élément de J , se prolonge en un endomorphisme f de $E(J)$ qui est la restriction à $E(j)$ d'un endomorphisme f' de B . $f' - g$ est nulle sur J , donc sur $E(J)$, car A est un anneau à idéal singulier nul, par suite $f = g$ et $E(J)x \subset E(J)$.

Revenons à notre démonstration : Bx est un A-module injectif ; d'après le lemme 4.2, $x\alpha \in Bx$, $x\alpha = bx$ avec $b \in B$, d'où $(\alpha x)^2 = 0$ avec $\alpha x \in A - \{0\}$, ce qui est impossible.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii). - Soient x et y deux éléments de A avec $Ax \cap Ay = (0)$; si X est un complément relatif de Ay contenant Ax, on a :

$$XAy \subset X \cap Ay = (0) \quad ,$$

en particulier, $xy = 0$.

(iii) $\Longrightarrow$ (ii). - Si X est un complément relatif d'un sous-module non nul Y de A, comme A est réduit,

$$\mathrm{Ann}(Y) \cap Y = (0) \ ; \quad X \cap Y = (0) \implies XY = 0 \ , \text{ et } \ X \subset \mathrm{Ann}(Y) \ ;$$

finalement, $X = \mathrm{Ann}(Y)$ est un idéal bilatère.

Remarque. - Si A est un anneau réduit, les idempotents de A appartiennent au centre ; en effet, si $x \in A$, les éléments $(1 - e)xe$, $ex(1 - e)$ sont nuls, et $xe = ex = exe$; on en déduit facilement que si A est régulier, alors tout idéal de A est bilatère.

THÉORÈME 4.2. - *Soit* A *un anneau réduit vérifiant la condition suivante* :

Si x *et* y *sont deux éléments de* A, *la relation* $Ax \cap Ay = (0)$ *entraîne* $xy = 0$.

Si B *est l'anneau régulier, enveloppe injective de* A *en tant que* A-*module à gauche,* B *est également l'enveloppe injective de* A *en tant que* A-*module à droite.*

LEMME 4.3. - *Soit* B *un anneau régulier réduit, injectif à gauche, alors* B *est injectif à droite.*

Si C est une enveloppe injective de B en tant que A-module à droite, C est, d'après le théorème 4.1, un anneau régulier réduit.

Soit x, un élément non nul de C. L'ensemble des éléments α de B, tels que $x\alpha \in B$, est un idéal essentiel à droite dans B, contenant $\mathrm{Ann}(x) \cap B$, il existe donc un idempotent $e \in B$, $e \notin \mathrm{Ann}(x)$, tel que $xe \in B - \{0\}$, on a vu ci-dessus que $ex = xe$, et par suite, $Bx \cap B \neq (0)$: C est extension essentielle de B en tant que B-module à gauche, et $C = B$.

Appliquons ce résultat à la situation décrite par les hypothèses du théorème 4.2: B est donc un anneau injectif à droite contenant A ; si C est une enveloppe injective à droite de A contenue dans B, C est un A-module injectif à gauche, et $C = B$, d'où le résultat.

COROLLAIRE. - Si un anneau A réduit vérifie la condition suivante :

$$Ax \cap Ay = (0) \implies xy = 0 \quad ,$$

alors

$$xA \cap yA = (0) \implies xy = 0 \quad .$$

Remarques.

1° Si B est un anneau extension essentielle d'un anneau réduit A, cela n'entraîne pas que B soit un anneau réduit : en effet, si A est un anneau intègre d'enveloppe injective B, d'après le théorème 4.1, pour que B soit réduit, il faut et il suffit que B soit un corps, ce serait d'ailleurs le corps des fractions de A. D'où, l'enveloppe injective d'un anneau intègre n'admettant pas de corps des fractions contient des éléments nilpotents non nuls.

2° Un anneau régulier injectif à gauche n'est pas nécessairement injectif à droite comme le montre la propriété suivante : Soit A un anneau intègre non co-irréductible d'enveloppe injective à gauche B ; si x est un élément non inversible de $B - A$, alors $xA \cap A = (0)$.

Si $b = xa$, avec b et $a \in A - \{0\}$,

$$\mathrm{Ann}(x) \cap A \neq (0) \implies \exists\, c \in \mathrm{Ann}(x) \cap A \text{ , et } cb = cxa = 0 \quad ,$$

ce qui est impossible.

LEMME 4.4. - Soit A un anneau réduit ; si x et y sont deux éléments non nuls de A, tels que les idéaux Ax et Ay sont co-irréductibles, la relation $Ax \cap Ay = (0)$ entraîne $xy = 0$.

Supposons xy, donc yx, non nuls. $\mathrm{Ann}(x)$ est un sous-module complément maximal, et $Ax \oplus \mathrm{Ann}(x)$ est un idéal essentiel dans A ; on a :

$$\mathrm{Ann}(xy) = \mathrm{Ann}(x) = \mathrm{Ann}(y) \quad .$$

Il existe $a \in A$, avec $ay \neq 0$, tel que $ay = bx + u$, où $u \in \mathrm{Ann}(x)$; on en déduit $xay = xbx$, la relation $Ax \cap Ay = (0)$ entraîne

$$xbx = 0 \qquad \text{et} \qquad x \in \mathrm{Ann}(bx) = \mathrm{Ann}(x) \quad ,$$

ce qui est impossible.

THÉORÈME 4.3. - Soit A un anneau réduit extension essentielle d'une somme directe de sous-modules co-irréductibles ; alors la relation $Ax \cap Ay = (0)$ entraîne $xy = yx = 0$.

On supposera x et y non nuls ; par hypothèse, Ax est extension essentielle de

$$X = \bigoplus_{i \in I} Ae_i \quad ,$$

où les Ae_i sont des modules co-irréductibles, Ay est extension essentielle de

$$Y = \bigoplus_{j \in J} Af_j \quad ,$$

où les Af_j sont des sous-modules co-irréductibles, et on a $X \cap Y = (0)$. Si $y \in Y$, d'après le lemme 4.4, l'application $f_y : u \longmapsto uy$ annule X , donc l'extension maximale essentielle de X (car l'idéal singulier de A est nul), et f_y annule donc Ax , d'où $xy = 0$.

COROLLAIRE. - *Si* A *est un anneau réduit n'admettant pas de somme directe infinie d'idéaux à gauche, son enveloppe injective* B *est un produit fini de corps.*

On sait, de plus, que B est l'anneau total des fractions de A (théorème de Goldie).

5. Anneaux réguliers réduits.

On sait, d'après un théorème de Kaplansky, que si A est un anneau commutatif régulier, tout A-module simple est injectif, cette propriété caractérise d'ailleurs les anneaux commutatifs réguliers. Nous allons étendre ce résultat.

THÉORÈME 5.1. - *Si* A *est un anneau réduit régulier, tout* A-*module simple est injectif.*

Soient Λ un idéal essentiel de A , et f une application non nulle de Λ dans $A/\wp$ où $\wp$ est un idéal maximal (bilatère nécessairement). Si $x \in \Lambda$,

$$\mathrm{Ann}(x).f(x) = 0 \quad \text{et} \quad f(x) \neq 0 \implies \mathrm{Ann}(x) \subset \wp \quad ,$$

ce qui est équivalent à $x \notin \wp$, donc

$$\ker f \supset \Lambda \cap \wp \quad .$$

Or $\Lambda \cap \wp$ est un sous-module maximal de Λ et $\ker f = \Lambda \cap \wp$. Soit $\lambda \in \Lambda$ tel que $f(\lambda) \neq 0$, $\lambda = \lambda a \lambda$ avec $a\lambda = e \in \Lambda$ et $f(e) \neq 0$. Posons $f(e) = x_0$, si g est l'application de A dans $A/\wp$ définie par $g(y) = yx_0$ pour tout $y \in A$, $g - f$ est nulle sur $\Lambda \cap \wp + A\lambda = \Lambda$, et g prolonge f .

PROPOSITION 5.1. - *Soit* $(K_i)_{i \in I}$ *un ensemble de corps ; l'anneau produit* $B = \prod_i K_i$ *est un anneau régulier réduit injectif.*

Les idéaux $K_i \times \{0\}$ sont des B-modules simples donc injectifs (théorème 5.1), et tout produit de modules injectifs est un module injectif.

Remarque. - L'enveloppe injective d'un anneau régulier commutatif A est un anneau commutatif régulier injectif ; en effet, A se plonge dans l'anneau $B = \prod_{p} A/\mathfrak{P}$, où $\mathfrak{P}$ décrit les idéaux maximaux de A, et B est injectif ; l'enveloppe injective de A est un sous-A-module de B.

THÉORÈME 5.2. - *Si A est un anneau réduit, extension essentielle d'une somme directe d'idéaux co-irréductibles, son enveloppe injective est un produit de corps.*

L'enveloppe injective B de A est un anneau régulier injectif réduit (théorème 4.2) qui est extension essentielle de son socle ; le résultat sera la conséquence du lemme suivant :

LEMME 5.1. - *Un anneau B régulier, réduit et injectif, qui est extension essentielle de son socle, est un produit de corps.*

(0) est en effet intersection, sans éléments superflus, d'idéaux maximaux bilatères $(\mathfrak{P}_i)_{i\in I}$, et B se plonge dans l'anneau. $C = \prod_{i\in I} B/\mathfrak{P}_i$, qui est un B-module injectif (théorème 5.1), extension essentielle de son socle $\bigoplus_{i\in I} B/\mathfrak{P}_i$ qui est le socle de B, on en déduit que C est extension essentielle de B, et $C = B$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] GABRIEL (Pierre). - Des catégories abéliennes, Bull. Soc. math. France, t. 90, 1962, p. 323-448 (Thèse Sc. math. Paris, 1961).

[2] FAITH (Carl) and UTUMI (Yuzo). - On noetherian prime rings, Trans. Amer. math. Soc., t. 114, 1965, p. 53-60.

[3] LESIEUR (Léonce). - Sur les anneaux tels que $x^n = x$, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et Théorie des nombres, 19e année, 1965/66, n° 13, 8 p.

[4] RENAULT (Guy). - Sous-modules compléments dans un module, Bull. Soc. math. France, Mémoire 9, 1967, 79 p. (Thèse Sc. math. Orsay, 1966).