Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Gérard Lallement

Demi-groupes et anneaux d'endomorphismes d'un espace vectoriel

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 18, nº 2 (1964-1965), exp. nº 28, p. 1-20

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1964-1965__18_2_A8_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
18e année, 1964/65, n° 28

DEMI-GROUPES ET ANNEAUX D'ENDOMORPHISMES D'UN ESPACE VECTORIEL (1)

par Gérard LALLEMENT

(d'après L. M. GLUSKIN [4])

Les résultats de GLUSKIN présentés dans cet exposé figurent dans [4] (sur le même sujet, voir aussi [5]). Ils mettent en évidence le rôle de l'idéal minimal (2) du demi-groupe multiplicatif de certains anneaux d'endomorphismes d'un espace vectoriel. Les propriétés de ces idéaux minimaux sont utilisées pour caractériser diverses classes d'anneaux, comme par exemple les anneaux simples (3) ayant un idéal minimal d'un côté.

Les seuls points nouveaux par rapport à l'article de GLUSKIN sont constitués par une présentation différente du théorème 1.6 concernant la structure des demi-groupes 0-simples avec un idéal minimal d'un côté, et l'addition d'un théorème sur la caractérisation des anneaux dont le demi-groupe multiplicatif est complètement 0-simple (théorème 4.3).

Nous utiliserons des résultats qui figurent dans [2] (paragraphes 2.5, 2.7, 3.1, 3.2) sur les idéaux minimaux, les demi-groupes complètement 0-simples et leur représentation comme demi-groupes de matrices de Rees. De façon générale, pour les notions non explicitement définies, c'est la terminologie de [2] qui est employée.

1. Demi-groupes et anneaux avec un idéal d'un côté minimal.

DÉFINITION 1.1. - *Un demi-groupe (un anneau) est dit sans idéaux nilpotents, si pour tout idéal bilatère* $I \neq (0)$ *et pour tout entier* n : $I^n = (0) \implies I = (0)$.

Un demi-groupe D (un anneau) sans idéaux nilpotents ne contient pas d'idéaux $I \neq (0)$ à droite ou à gauche tels que $I^n = (0)$. En effet, si pour un idéal à

---

(1) Ces exposés ont été faits au Groupe d'études d'Algèbre dirigé par P. DUBREIL.

(2) Les demi-groupes considérés sont supposés avoir un zéro. Un idéal à droite (à gauche, bilatère) M est dit minimal si $M \neq (0)$ et s'il ne contient pas d'autres idéaux à droite (à gauche, bilatère) que (0) et lui-même. Un idéal minimal est appelé 0-minimal dans [2].

(3) Un anneau A est dit simple s'il est sans idéaux bilatères propres et si $A^n \neq (0)$ pour tout entier n .

gauche L de D et un entier n, $L^n = (0)$, alors $(LD)^n \subseteq L^n D = (0)$. Or LD est un idéal bilatère, donc $LD = (0)$. L'ensemble $I = \{a \in D \; ; \; aD = (0)\}$ est un idéal bilatère de D de carré nul, donc $L \subseteq I = (0)$.

LEMME 1.2. - <u>Soit</u> D <u>un demi-groupe (un anneau) sans idéaux nilpotents.</u> L <u>est un idéal à gauche minimal si, et seulement si,</u> $Da = L$ <u>pour tout</u> $a \in L \setminus 0$.

Si L est un idéal à gauche minimal et $a \in L \setminus 0$, $Da \subseteq L$. Donc $Da = (0)$ ou $Da = L$. Or $Da \neq (0)$, sinon $\{0 , a\}$ serait un idéal à gauche $\neq (0)$ de carré nul. Réciproquement, supposons que $Da = L$ pour tout $a \in L \setminus 0$. Soit $L' \neq (0)$ un idéal à gauche de D tel que $L' \subseteq L$. Pour $a \in L' \setminus 0$, $L = Da \subseteq L'$; donc $L = L'$.

LEMME 1.3. - <u>Soit</u> D <u>un demi-groupe sans idéaux nilpotents, avec un idéal à gauche minimal</u> L.

1° $K = LD$ <u>est réunion d'idéaux à gauche minimaux de</u> D ;

2° <u>Si</u> L_1 <u>et</u> L_2 <u>sont des idéaux à gauche minimaux de</u> D <u>contenus dans</u> K, <u>alors</u> $L_1 L_2 = L_2$;

3° K <u>est</u> 0-<u>simple</u>.

<u>Démonstration.</u>

1° Soit $a \in K \setminus 0$. Il existe $c \in D$ tel que $a \in Lc \neq (0)$. D'après le lemme 2.32 de [2] (p. 69), Lc est un idéal à gauche minimal de D. K est donc la réunion des idéaux à gauche minimaux obtenus de cette façon lorsque a parcourt $K \setminus 0$.

2° $LL_1 \subseteq L_1$, donc $LL_1 = (0)$ ou L_1, car L_1 est minimal. Or $LL_1 = (0)$ implique $L(DL_1) = (LD)L_1 = (0)$. Comme $L_1 \subseteq K = LD$, on en déduit $L_1^2 = (0)$, ce qui n'est pas. Donc $LL_1 = L_1$. De même $L_1 L = L$ (si $L_1 L = (0)$, alors $L_1 LD = (0)$ et $L_1^2 = (0)$) ; ce qui précède vaut aussi pour L_2 : $LL_2 = L_2$ et $L_2 L = L$. Il en résulte :

$$L_1 L_2 = L_1(LL_2) = (L_1 L)L_2 = LL_2 = L_2 .$$

3° Soit $a \in K \setminus 0$. D'après 1°, $a \in L'$ idéal à gauche minimal de D contenu dans K. D'après le lemme 1.2, $L' = Da$. On en déduit :

$$KaK = LDaLD = LL'LD = LD = K \qquad \text{(on utilise 2°)} .$$

D'après le lemme 2.28 de [2], $KaK = K$ pour tout $a \in K \setminus 0$ entraîne que K est 0-simple.

DÉFINITION 1.4. - Une 0-bande rectangulaire [8] est un demi-groupe complètement 0-simple dont tous les sous-groupes n'ont qu'un élément.

D'après le théorème de Rees ([2], paragraphe 3.2), un demi-groupe D est une 0-bande rectangulaire si et seulement si $D \simeq \mathfrak{M}^0(\{e\} ; I , \Lambda ; P)$.

LEMME 1.5. - Pour un demi-groupe D quelconque, il y a équivalence entre :

1° D a pour image homomorphe un demi-groupe complètement 0-simple ;

2° D a pour image homomorphe une 0-bande rectangulaire ;

3° D contient un idéal bilatère W vérifiant :

$$aDb \subseteq W \implies a \text{ ou } b \in W \quad \text{et} \quad abc \in W \implies ab \in W \text{ ou } bc \in W$$

(un idéal vérifiant ces deux propriétés est dit "matriciel").

2° entraîne 1° par définition d'une 0-bande rectangulaire. 1° entraîne 3° résulte du fait que dans un homomorphisme d'un demi-groupe sur un demi-groupe complètement 0-simple, l'image inverse de 0 est un idéal bilatère W ayant les propriétés indiquées (il suffit en fait de vérifier que l'idéal (0) d'un demi-groupe régulier de matrices de Rees a ces propriétés). 3° entraîne 2° se démontre en utilisant la relation ρ définie par $(a , b) \in \rho \iff \{axa \in W \iff bxb \in W\}$. On vérifie que ρ est une congruence et que D/ρ est une 0-bande rectangulaire (cf. [8]).

Si un demi-groupe D a un zéro matriciel, toute congruence ρ sur D, ayant le zéro comme classe, définit sur D une décomposition en classes dite décomposition 0-matricielle. Les classes d'une telle décomposition peuvent s'indexer doublement (comme les éléments de D/ρ auxquels elles correspondent). La décomposition 0-matricielle maximale correspond à la congruence $\mathfrak{M}$ définie par :

$$\mathfrak{M} = \mathcal{R} \cap \mathcal{L} \quad \text{avec} \quad (a , b) \in \mathcal{L}$$
$$\iff \text{ou bien } a = 0 \text{ et } b = 0 \text{, ou bien il existe } a_1 , \dots , a_n \in D$$

tels que $Da\setminus 0 \between Da_1\setminus 0 \between \dots \between Da_n\setminus 0 \between Db\setminus 0$ [$\between$ signifie "coupe"] (pour $\mathcal{R}$, définition symétrique de la précédente).

THÉORÈME 1.6. - Un demi-groupe D est 0-simple, et a un idéal à gauche minimal, si et seulement si D admet une décomposition 0-matricielle dont les classes $C_{i\lambda}$ vérifient :

(1) $$C_{i\lambda} . a_{j\mu} = 0 \text{ ou } C_{i\mu} \quad \text{pour tout} \quad a_{j\mu} \in C_{j\mu} .$$

Si la décomposition 0-matricielle est maximale, les classes $C_{i\lambda}$ qui sont des

<u>sous-demi-groupes sont, soit toutes simples à gauche sans idempotents, soit toutes des groupes, et dans ce dernier cas</u> D <u>est complètement</u> 0-<u>simple</u>.

<u>Démonstration</u>. - Supposons que D soit 0-simple avec un idéal à gauche minimal. D'après le lemme 1.3, D est réunion de ses idéaux à gauche minimaux et, pour a et b non nuls, Da et Db sont des idéaux à gauche minimaux (lemme 1.2). D'après 2° du lemme 1.3, $DaDb = Db \neq (0)$; donc $aDb \neq (0)$. Si ab et bc sont non nuls, on a $Dab = Db \neq (0)$ et $Dbc = Dc \neq (0)$, donc $Dabc = Dbc = Dc \neq (0)$ et $abc \neq 0$. Dans D , (0) est donc un idéal matriciel. D'après le lemme 1.5, on peut considérer les décompositions 0-matricielles de D . Soit $\mathcal{M} = \mathcal{R} \cap \mathcal{L}$ celle qui est maximale. Si $(a , b) \in \mathcal{L}$, alors $Da = Db$; en effet, pour a et b non nuls,

$$Da\backslash 0 \between Da_1\backslash 0 \quad \text{entraîne} \quad Da = Da_1$$

par suite de la minimalité des idéaux principaux à gauche non nuls ; de même,

$$Da_1 = Da_2 , \ldots , Da_{n-1} = Da_n , Da_n = Db ; \quad \text{d'où} \quad Da = Db .$$

Il en résulte que si L_λ est une $\mathcal{L}$-classe ($\lambda \in \Lambda$ ensemble d'indices),

$$L_\lambda \cup (0) = L_\lambda^0$$

est un idéal à gauche minimal : si $a \in L_\lambda$ et $x \in D$, ou bien $xa = 0$, ou bien $Dxa = Da$, et $xa \in L_\lambda$; si $L' \subseteq L_\lambda^0$ (L' est idéal à gauche $\neq (0)$) pour $a \in L'\backslash 0$ et $b \in L_\lambda$, on a $b \in Dc$ où c est un élément non nul d'un idéal à gauche minimal contenant b (lemme 1.2) ;

$$Da = Db = Dc , \quad \text{donc} \quad b \in Da \subseteq L' \quad \text{et} \quad L' = L_\lambda^0 .$$

Désignons par R_i les $\mathcal{R}$-classes ($i \in I$ ensemble d'indices). $C_{i\lambda} = R_i \cap L_\lambda$ sont alors les $\mathcal{M}$-classes. Supposons que

$$C_{i\lambda} . a_{j\mu} \neq 0 \qquad (a_{j\mu} \in C_{j\mu}) .$$

D'une part,

$$C_{i\lambda}\, a_{j\mu} = (R_i \cap L_\lambda)\, a_{j\mu} ;$$

D'autre part,

$$C_{i\mu} = R_i \cap L_\mu = R_i \cap L_\lambda\, a_{j\mu} ,$$

car $L_\mu^0 = L_\lambda^0\, a_{j\mu}$ (lemme 1.3, 2°) ; enfin $(R_i \cap L_\lambda)\, a_{j\mu} = R_i \cap L_\lambda\, a_{j\mu}$ (propriétés des $\mathcal{R}$-classes). On en déduit $C_{i\lambda}\, a_{j\mu} = C_{i\mu}$.

Réciproquement, supposons que D admette une décomposition 0-matricielle dont les classes vérifient (1). D est 0-simple : en effet, soient $a \in C_{i\lambda}$, $b \in C_{j\mu}$

deux éléments non nuls de D . Il existe $\varkappa \in \Lambda$ tel que $C_{j\varkappa}\, C_{i\lambda} \neq 0$. D'après (1), il en résulte $C_{j\varkappa}\, a = C_{j\lambda}$. De même, il existe $k \in I$ tel que $C_{j\lambda}\, C_{k\mu} \neq 0$, d'où $C_{j\lambda} \cdot C_{k\mu} = C_{j\mu}$ (d'après (1)). Donc $C_{j\varkappa}\, a\, C_{k\mu} = C_{j\mu}$ et $b \in DaD$. D'après le lemme 2.28 de [2], il en résulte que D est 0-simple. On vérifie enfin sans difficulté que L_λ^0 est un idéal à gauche minimal.

Si l'une des classes d'une décomposition 0-matricielle de D contient un idempotent $e \neq 0$, e est primitif, car si $ef = fe = f \neq 0$, alors $Df = Dfe \subseteq De$. Comme De est minimal, $Df = De$ et $ef = e$; d'où $e = f$; D est donc complètement 0-simple ([2], paragraphe 2.7). Dans le cas contraire, si une classe $C_{i\lambda}$ est un sous-demi-groupe : $C_{i\lambda}\, a_{i\lambda} = C_{i\lambda}$, et $C_{i\lambda}$ est simple à gauche sans idempotents.

Soit A un anneau. Désignons par $\mathfrak{D}A$ le demi-groupe multiplicatif de A et, pour tout sous-demi-groupe S de $\mathfrak{D}A$, par $\mathfrak{B}(S)$ le sous-anneau de A engendré par S ; si S est un idéal bilatère (à droite, à gauche) de $\mathfrak{D}A$, il est évident que $\mathfrak{B}(S)$ est un idéal bilatère (à droite, à gauche) de A .

LEMME 1.7. - *Un anneau A sans idéaux nilpotents contient un idéal à gauche minimal si et seulement si $\mathfrak{D}A$ contient un idéal à gauche minimal ; de plus, les idéaux à gauche minimaux de A et $\mathfrak{D}A$ coïncident.*

$\mathfrak{D}A$ est sans idéaux nilpotents ; en effet, si $I \neq (0)$ est un idéal de $\mathfrak{D}A$ tel que $I^n = (0)$, $\mathfrak{B}(I) \neq (0)$ et $(\mathfrak{B}(I))^n = (0)$, ce qui est impossible. L est un idéal à gauche minimal de A si et seulement si $Aa = L$ pour tout $a \in L\setminus 0$. C'est une condition nécessaire et suffisante pour que L soit un idéal à gauche minimal de $\mathfrak{D}A$ (lemme 1.2).

THÉORÈME 1.8. - *Soient A un anneau sans idéaux nilpotents, et L un idéal à gauche minimal de A . Alors $K = LA$ est un idéal bilatère complètement 0-simple de $\mathfrak{D}A$. Si $C_{i\lambda}$ est une $\mathcal{H}$-classe de Green de K , $C_{i\lambda} \cup 0 = C_{i\lambda}^0$ est un sous-anneau de A (en particulier si $C_{i\lambda}$ est un groupe, $C_{i\lambda}^0$ est un sous-corps de A).*

Démonstration. - L , qui est un idéal à gauche minimal de $\mathfrak{D}A$ (lemme 1.7), est aussi un idéal à gauche minimal de K : si L' est un idéal de K contenu dans L et si $L' \neq (0)$, alors $L = A\ell'$ pour tout $\ell' \in L'\setminus 0$ (lemme 1.2) ;

$$L = L^2 = L.A\ell' \subseteq L' , \qquad \text{d'où } L = L' .$$

D'après le lemme 1.3, K est 0-simple avec un idéal à gauche minimal. Il a la structure décrite au théorème 1.6. Soit $C_{i\lambda}$ une classe sous-demi-groupe de la décomposition matricielle maximale de K ; $C_{i\lambda}\, a = C_{i\lambda}$ pour tout $a \in C_{i\lambda}$. Montrons que $C_{i\lambda}$ est simplifiable à droite. Supposons qu'il existe $x_1, x_2, a \in C_{i\lambda}$, tels que $x_1 a = x_2 a$ avec $x_1 \neq x_2$. $C_{i\lambda}$ est contenu dans l'idéal à gauche minimal de A (ou de $\mathfrak{M}A$ d'après le lemme 1.7), L_λ^0. Donc $A(x_1 - x_2) = L_\lambda^0$, d'après le lemme 1.2. Comme $(x_1 - x_2)a = 0$, $L_\lambda^0\, a = 0$; mais $(0) \neq C_{i\lambda}\, a = C_{i\lambda} \subsetneq L_\lambda^0\, a$. C'est une contradiction, et $C_{i\lambda}$ est simplifiable à droite. $C_{i\lambda}$ contient un idempotent, car il existe $x \in C_{i\lambda}$ tel que $xa = a$, et $x^2 a = xa$ implique $x^2 = x$. D'après le théorème 1.6, K est complètement 0-simple et $C_{i\lambda}^0 = R_i^0 \cap L_\lambda^0$ (R_i^0 est l'idéal à droite minimal correspondant à la $\mathcal{R}$-classe R_i). D'après le lemme 1.7 (et son symétrique pour les idéaux à droite), $\mathfrak{P}(L_\lambda^0) = L_\lambda^0$ et $\mathfrak{P}(R_i^0) = R_i^0$. Il en résulte que

$$\mathfrak{P}(C_{i\lambda}^0) = \mathfrak{P}(R_i^0 \cap L_\lambda^0) \subseteq \mathfrak{P}(R_i^0) \cap \mathfrak{P}(L_\lambda^0) = R_i^0 \cap L_\lambda^0 = C_{i\lambda}^0 \quad ,$$

et $C_{i\lambda}^0 = \mathfrak{P}(C_{i\lambda}^0)$ est un sous-anneau de A.

COROLLAIRE 1.9. - <u>Pour un anneau</u> A <u>sans idéaux nilpotents, il y a équivalence entre</u> :

1° A <u>a un idéal à gauche minimal</u> ;

2° A <u>a un idéal à droite minimal</u> ;

3° $\mathfrak{M}A$ <u>a un idéal bilatère complètement</u> 0-<u>simple (donc minimal dans</u> $\mathfrak{M}A$).

Le fait que 1° ou 2° entraîne 3° résulte du théorème 1.8. 3° entraîne 1° ou 2° est une conséquence du lemme 1.7 et du résultat suivant, dû à RICH (voir [2], exercice 6, p. 83) : si K est un idéal complètement 0-simple d'un demi-groupe D, K est un idéal minimal de D contenant un idéal à droite minimal de D et un idéal à gauche minimal de D.

2. <u>Endomorphismes de rang</u> $\leqslant 1$ <u>d'un espace vectoriel. Anneaux engendrés.</u>

Soient $A = (F, A)$ un espace vectoriel à gauche sur un corps F, A^* le dual de A, et $P(F, A)$ l'anneau des endomorphismes de A. On désigne par (F, A, A^*) le sous-demi-groupe de $\mathfrak{M}P(F, A)$ (demi-groupe multiplicatif de $P(F, A)$) formé des endomorphismes de rang 1 et 0.

THÉORÈME 2.1. - (F, A, A^*) <u>est un demi-groupe complètement</u> 0-<u>simple, isomorphe au demi-groupe de matrices de Rees</u> $\mathfrak{M}^0(\mathfrak{M}(F\setminus 0) ; I_A, \Lambda_A ; [e_\lambda f_i])$ <u>où</u> :

Λ_A <u>est un ensemble d'indices repérant les sous-espaces</u> A_λ <u>de dimension</u> 1 <u>de</u> A,

I_Λ est un ensemble d'indices repérant les sous-espaces A^*_i de dimension 1 de A^* ,

$e_\lambda\ f_i$ est le transformé d'un élément $e_\lambda \in A_\lambda$ par la forme $f_i \in A^*_i$ [4].

Démonstration. - Soit a_1 un endomorphisme de A dans A_1 ($1 \in \Lambda$). Pour tout $x \in A$, $xa_1 = (xf)e_1$, où $f \in A^*$. Soient λ et μ deux indices quelconques de Λ ; on définit $a_{\mu\lambda} \in (F , A , A^*)$ par $e_\mu\ a_{\mu\lambda} = e_\lambda$ et $e_{\mu'}\ a_{\mu\lambda} = 0$ pour $\mu' \neq \mu$.

Pour tout endomorphisme a de A dans A_λ , $aa_{\lambda 1}$ est un endomorphisme de A dans A_1 . Il existe donc une forme $f \in A^*$ telle que $xaa_{\lambda 1} = (xf)e_1$, pour tout $x \in A$. Comme $aa_{\lambda 1}\ a_{1\lambda} = a$, on en déduit :

$$xa = xaa_{\lambda 1}\ a_{1\lambda} = (xf)e_1\ a_{1\lambda} = (xf)e_\lambda \quad .$$

Mais $f = f_i\,\alpha$ ($i \in I_\Lambda$, $\alpha \in F$) ; donc, pour tout $x \in A$,

$$xa = (xf_i)\alpha e_\lambda \quad .$$

A chaque $a \in (F , A , A^*)$, on associe le triple $a\varphi = (\alpha ; i , \lambda)$ tel que : $\forall\ x \in A$, $xa = (xf_i)\alpha e_\lambda$. On vérifie sans difficulté que φ est une bijection. Si $b\varphi = (\beta ; j , \mu)$, alors pour tout $x \in A$,

$$x(ab) = (xa)b = [(xf_i)\alpha e_\lambda]b = [[(xf_i)\alpha e_\lambda]f_j]\beta e_\mu = (xf_i)\alpha\ (e_\lambda\ f_j)\beta\ e_\mu$$

et

$$(ab)\varphi = (\alpha(e_\lambda\ f_j)\beta ; i , \mu) = (a\varphi)(b\varphi) \quad ;$$

φ est donc un isomorphisme de (F , A , A^*) sur $\mathcal{M}^0(\mathfrak{G}(F\setminus 0) ; I_\Lambda , \Lambda_A ; [e_\lambda\ f_i])$.

DÉFINITION 2.2. - Un sous-espace B^* de A^* est un t-sous-espace de A^* si :

$$\forall\ x \in A ,\quad x \neq 0 ,\quad \exists\ f \in B^* : \qquad xf = 1 \quad .$$

LEMME 2.3. - Si B^* est un t-sous-espace de A^* , et si $x_1 , x_2 , \ldots , x_n$ sont linéairement indépendants dans A , alors il existe une forme $f \in B^*$ telle que

$$x_1\ f = 1 \ ; \quad x_2\ f = \ldots = x_n\ f = 0 \quad .$$

La démonstration se fait par récurrence sur n . Supposons qu'il existe $f_1 \in B^*$ tel que $x_1\ f_1 = 1$, $x_2\ f_1 = x_{n-1}\ f_1 = 0$ et que $x_n\ f_1 = \alpha \neq 0$. Il existe $f_2 \in B^*$ tel que $(x_1 - \alpha^{-1}\ x_n)f_2 = 1$, $x_2\ f_2 = \ldots = x_{n-1}\ f_2 = 0$. En posant

---

[4] e_λ (resp. f_i) est choisi comme base de A_λ (resp. A^*_i).

$f = f_2 - f_1\,\alpha^{-1}(x_n\,f_2)$, on obtient

$$x_1\ f = 1 + \alpha^{-1}(x_n\,f_2) - \alpha^{-1}(x_n\,f_2) = 1$$

$$x_2\ f = \dots = x_{n-1}\ f = 0$$

et

$$x_n\ f = x_n\,f_2 - (x_n\,f_1)\alpha^{-1}(x_n\,f_2) = 0\ .$$

LEMME 2.4. - A^* <u>est sans</u> t-<u>sous-espace propre si, et seulement si,</u> A <u>est de dimension finie</u>.

Soit e_ν une base de A (ν parcourt un ensemble N de cardinal quelconque). Dans A^* , considérons le <u>sous-espace</u> B^* de base f_ν ($\nu \in N$) où $e_\nu\,f_\nu = 1$ et $e_\mu\,f_\nu = 0$ pour $\mu \neq \nu$. B^* est un t-sous-espace de A^* et $\dim B^* = \dim A$.

Si A^* est sans t-sous-espace propre $A^* = B^*$, d'où $\dim A^* = \dim A$, ce qui entraîne que A est de dimension finie (cf. [1], § 7, n° 5, démonstration du théorème 6, p. 157). Réciproquement, si A est de dimension finie, $\dim A = \dim A^*$ ([1], § 7, n° 5, théorème 4), donc $\dim B^* = \dim A^*$, d'où $B^* = A^*$; pour un t-sous-espace quelconque C^* de A^* , on a $B^* \subseteq C^*$ d'après le lemme 2.3, par conséquent $C^* = A^*$.

Nous nous proposons d'étudier certains idéaux à droite de $(F\ ,\ A\ ,\ A^*)$ [5].

<u>Notations</u>. - Pour un sous-ensemble I de I_A , on note $R(I)$ l'idéal à droite $\mathcal{M}^0(\mathfrak{M}(F\setminus 0)\ ;\ I\ ,\ \Lambda_A\ ;\ [e_\lambda\,f_i])$. IF désigne l'ensemble des formes $f_i\,\alpha$, où $i \in I$ et $\alpha \in F$, et où $A^*(I)$ désigne le sous-espace de A^* engendré par IF (ou encore par les formes f_i , $i \in I$).

LEMME 2.5. - <u>Soit</u> $R(I)$ <u>un idéal à droite de</u> $(F\ ,\ A\ ,\ A^*)$. <u>Il y a équivalence entre</u> :

1° $R(I)$ <u>est complètement</u> 0-<u>simple</u> ;

2° $R(I)$ <u>est transitif</u> ($\forall\ x \in A\ ,\ x \neq 0\ ,\ \forall\ y \in A\ ,\ \exists\ a \in R(I)\ :\ xa = y$);

3° $A^*(I)$ <u>est un</u> t-<u>sous-espace</u>.

---

[5] Pour un demi-groupe complètement 0-simple $\mathcal{M}^0(G\ ;\ I\ ,\ \Lambda\ ;\ P)$, les idéaux à droite sont de la forme $\mathcal{M}^0(G\ ;\ I'\ ,\ \Lambda\ ,\ P')$ avec $I' \subseteq I$ et P' déduite de P en supprimant les colonnes de P relatives aux indices $i \in I\setminus I'$. Pour qu'un idéal à droite soit complètement 0-simple, il faut et il suffit que la matrice P' correspondante soit inversible.

Démonstration.

$1° \Longrightarrow 2°$. Soient $x = \alpha e_\lambda \neq 0$ et $y = \beta e_\mu$. Comme $R(I)$ est complètement 0-simple, il existe $i \in I$ tel que $p_{\lambda i} \neq 0$ ($p_{\lambda i} = e_\lambda f_i$) ; par suite,

$$a = (p_{\lambda i}^{-1} \alpha^{-1} \beta ; i , \mu) \in R(I) \quad \text{et} \quad xa = xf_i p_{\lambda i}^{-1} \alpha^{-1} \beta e_\mu = \alpha p_{\lambda i} p_{\lambda i}^{-1} \alpha^{-1} \beta e_\mu = y \ .$$

$2° \Longrightarrow 3°$. Soit $x = \alpha e_\lambda \in A \setminus 0$; il existe $a \in R(I)$ tel que $xa = e_\lambda$; en posant $a = (\gamma ; i , \lambda)$, on obtient :

$$xa = xf_i \gamma e_\lambda = e_\lambda \qquad \text{et} \qquad xf_i \gamma = 1 \ .$$

$3° \Longrightarrow 1°$. Supposons qu'il existe $\lambda \in \Lambda_A$ tel que, pour tout $i \in I$, $e_\lambda f_i = 0$; alors, pour tout $f \in A^*(I)$, $e_\lambda f = 0$, ce qui contredit l'hypothèse ; donc, $\forall \lambda \in \Lambda_A$, $\exists i \in I$ tel que $e_\lambda f_i \neq 0$; la matrice de $R(I)$ est donc inversible.

THÉORÈME 2.6. - Tout sous-demi-groupe transitif S est un idéal à droite, dans (F , A , A^*).

En effet, soit $(\alpha ; i , \lambda) \in S$ ((F , A , A^*) est identifié au demi-groupe de matrices de Rees) ; pour tout $\beta \in F$ et $\mu \in \Lambda$, il existe $s \in S$ tel que $(\alpha e_\lambda)s = \beta e_\mu$; donc $(\alpha ; i , \lambda)s = (\beta ; i , \mu) \in S$. La $\mathcal{R}$-classe de Green de $(\alpha ; i , \lambda)$ est donc contenue dans S qui est ainsi réunion de $\mathcal{R}$-classes (y compris 0). S est donc un idéal à droite.

Nous montrerons dans la suite que dans l'anneau des endomorphismes de rang fini, désigné par $P_0(F , A)$, les idéaux à droite qui en sont des sous-anneaux simples sont engendrés par certains idéaux à droite vérifiant les conditions du lemme 2.5. Tout d'abord notons que :

LEMME 2.7. - $P_0(F , A) = \mathfrak{P}(F , A , A^*)$.

Il suffit de montrer $P_0(F , A) \subseteq \mathfrak{P}(F , A , A^*)$. Soient $c \in P_0(F , A)$ et h_r ($r = 1 , \ldots , n$) une base de Ac. Pour tout r : $h_r = \alpha_r e_{\lambda_r}$. Pour $x \in A$, on a :

$$xc = \sum_{r=1}^{n} \beta_r h_r \ .$$

En utilisant les endomorphismes $a_{\lambda_r \lambda_r}$ définis dans la démonstration du théorème 2.1, on obtient : $xca_{\lambda_r \lambda_r} = \beta_r h_r$. Par conséquent,

$$xc = \sum_{r=1}^{n} xca_{\lambda_r \lambda_r} \qquad \text{et} \qquad c = \sum_{r=1}^{n} ca_{\lambda_r \lambda_r} \in \mathfrak{P}(F , A , A^*) \ .$$

DÉFINITION 2.8. - Un idéal à droite $R(I)$ de (F, A, A^*) est dit IF-idéal à droite si $IF = A^*(I)$ (c'est-à-dire si le sous-espace engendré par les formes f_i ($i \in I$) coïncide avec l'ensemble des formes $f_i\,\alpha$ ($i \in I$, $\alpha \in F$)).

LEMME 2.9. - Soit $\mathfrak{P}R(I)$ l'anneau engendré par un IF-idéal à droite $R(I)$ de (F, A, A^*). Tout élément non nul c de $\mathfrak{P}R(I)$ est de la forme :

$$c = \sum_{r=1}^{n} (\alpha_r \,;\, i_r \,,\, \lambda_r) \quad ,$$

avec $\alpha_r \in F\backslash 0$ et $i_r \in I$, et où les e_{λ_r} ($r = 1, 2, \ldots, n$) sont linéairement indépendants.

Il suffit de démontrer que les e_{λ_r} peuvent être pris linéairement indépendants. Supposons que, pour un indice r,

$$e_{\lambda_r} = \sum_{r<k} \beta_k\, e_{\lambda_k} \quad .$$

Alors, pour tout $x \in A$,

$$x(\alpha_r ; i_r , \lambda_r) = (xf_{i_r})\alpha_r e_{\lambda_r} = \sum_{r<k} (xf_{i_r})\alpha_r \beta_k e_{\lambda_k} = x \sum_{r<k} (\alpha_r \beta_k ; i_r , \lambda_k) \quad ,$$

soit

$$(\alpha_n \,;\, i_r \,,\, \lambda_r) = \sum_{r<k} (\alpha_r\, \beta_k \,;\, i_r \,,\, \lambda_k) \quad .$$

En répétant cette transformation pour des r croissants, on obtient c sous la forme $\sum_{r=1}^{n} (\alpha_r \,;\, i_r \,,\, \lambda_r)$ où les e_{λ_r} distincts sont linéairement indépendants. Il peut encore arriver que $\lambda_r = \lambda_k$ pour $r \neq k$. On a alors :

$$x[(\alpha_r ; i_r , \lambda_r) + (\alpha_k ; i_k , \lambda_k)] = x[f_{i_r}\alpha_r + f_{i_k}\alpha_k]e_{\lambda_r} \qquad \text{pour tout } x \in A \quad .$$

Comme $R(I)$ est un IF-idéal à droite,

$$f_{i_r}\,\alpha_r + f_{i_k}\,\alpha_k = f_i\,\alpha \qquad \text{avec } i \in I$$

et

$$(\alpha_r \,;\, i_r \,,\, \lambda_r) + (\alpha_k \,;\, i_k \,,\, \lambda_k) = (\alpha \,;\, i \,,\, \lambda_r) \quad .$$

D'après le lemme 2.5 et la définition 2.8, un IF-idéal à droite de (F, A, A^*) est transitif si et seulement si $IF = A^*(I)$ est un t-sous-espace de A^*. En posant $A_1^* = A^*(I) = IF$, nous notons (F, A, A_1^*) un tel IF-idéal à droite transitif. D'après le lemme 2.4, dans le cas d'un espace vectoriel de dimension finie, le seul idéal à droite transitif de (F, A, A^*) est (F, A, A^*).

LEMME 2.10. - <u>Soit</u> $\mathfrak{P}(F , A , A_1^*)$ <u>le sous-anneau engendré par un</u> IF-<u>idéal à droite transitif de</u> (F , A , A^*) . <u>Tout idéal à droite non nul de</u> $\mathfrak{P}(F , A , A_1^*)$ <u>est de la forme</u> $\mathfrak{P}R(I')$, <u>où</u> $I'F = A^*(I') \subseteq A_1^*$.

Soit $C \neq (0)$ un idéal à droite de $\mathfrak{P}(F , A , A_1^*)$ et $c \in C\setminus 0$. D'après le lemme 2.9, $c = \sum_{r=1}^{n} (\alpha_r ; i_r , \lambda_r)$ avec les e_{λ_r} $(r = 1 , 2 , \dots , n)$ linéairement indépendants. D'après le lemme 2.3, il existe une forme $f_i \in A_1^*$ telle que $e_{\lambda_r} f_i = 1$ et $e_{\lambda_s} f_i = 0$ pour $s \neq r$. L'endomorphisme

$$c.(1 ; i , \lambda_r) = (\alpha_r ; i_r ; \lambda_r)$$

est un élément non nul de $C \cap (F , A , A_1^*)$, qui est ainsi un idéal à droite non nul de (F , A , A_1^*) . Dans ces conditions, $C \cap (F , A , A_1^*) = R(I'')$ avec $I''F \subseteq A_1^*$. Il est évident que $\mathfrak{P}R(I'') = C$ (d'après ce qui précède, tout $c \in C\setminus 0$ est une somme finie d'éléments de $R(I'')$), mais on n'a pas nécessairement $I''F = A^*(I'')$. Soit alors I' l'ensemble des indices $i \in I_A$ tels que $f_i \in A^*(I'')$. Dans ces conditions, $I'F = A^*(I')$; en effet, toute forme de $A^*(I')$ est du type $\sum f_k \beta_k$ avec $k \in I'$: $f_k \in A^*(I'')$, donc

$$\sum f_k \beta_k \in A^*(I'') \qquad \text{et} \qquad \sum f_k \beta_k = f_i \alpha \quad \text{avec} \quad i \in I' \ .$$

Il reste donc à vérifier que $\mathfrak{P}R(I'') = \mathfrak{P}R(I')$. Tout d'abord $I'' \subseteq I'$, ce qui implique $R(I'') \subseteq R(I')$, d'où $\mathfrak{P}R(I'') \subseteq \mathfrak{P}R(I')$.

Pour $i \in I'$: $f_i = \sum_{r=1}^{m} f_{j_r} \gamma_r$ avec $j_r \in I''$ et $\gamma_r \in F$. Par conséquent, pour tout $x \in A$ et pour tout $(\alpha ; i , \lambda) \in R(I')$,

$$x(\alpha ; i , \lambda) = (xf_i)\alpha e_\lambda = x\Big(\sum_{r=1}^{m} f_{j_r} \gamma_r \alpha\Big)e_\lambda = x \sum_{r=1}^{m} (\gamma_r \alpha ; j_r , \lambda) \quad \text{avec} \quad j_r \in I'' \ .$$

Il en résulte que $(\alpha ; i , \lambda) \in \mathfrak{P}R(I'')$; donc $R(I') \subseteq \mathfrak{P}R(I'')$, ce qui achève de démontrer que $\mathfrak{P}R(I') = \mathfrak{P}R(I'') = C$.

THÉORÈME 2.11. - <u>Dans l'anneau</u> $P_0(F , A)$, <u>un idéal à droite</u> P <u>est un sous-anneau simple si et seulement si</u> $P = \mathfrak{P}(F , A , A_1^*)$ (c'est-à-dire si P est engendré par un IF-idéal à droite transitif de (F , A , A^*)).

1° $\mathfrak{P}(F , A , A_1^*)$ est un sous-anneau simple : d'après le lemme 2.10, si C est un idéal bilatère non nul de $\mathfrak{P}(F , A , A_1^*)$,

$$C = \mathfrak{P}R(I_2) \qquad \text{avec} \quad A_2^* = I_2 F = A^*(I_2) \subseteq A_1^* \ .$$

$C \cap (F , A , A_1^*)$ est un idéal bilatère <u>non nul</u> du demi-groupe complètement 0-

simple (F , A , A_1^*) , donc

$$C \cap (F , A , A_1^*) = (F , A , A_1^*) \quad \text{et} \quad \mathfrak{P}(F , A , A_1^*) \subseteq C \ .$$

2° Soit P un idéal à droite de $P_0(F , A) = \mathfrak{P}(F , A , A^*)$ qui est un sous-anneau simple. $P = \mathfrak{P}R(I)$ avec $IF = A^*(I) = A_1^* \subseteq A^*$ (lemme 2.10). Si A_1^* n'était pas un t-sous-espace, $R(I)$ ne serait pas complètement 0-simple (lemme 2.5); il existerait un $\lambda_0 \in \Lambda$ tel que $e_{\lambda_0} f_i = 0$ pour tout $i \in I$, et l'ensemble des $(\alpha ; i , \lambda_0)$ $(\alpha \in F , \ i \in I)$ serait un idéal bilatère propre de $\mathfrak{P}R(I)$, ce qui est impossible. Donc $P = \mathfrak{P}(F , A , A_1^*)$.

Le théorème suivant a un caractère descriptif en ce qui concerne les sous-anneaux P de $P(F , A)$ tels que $\mathbb{D}P$ ait (F , A , A_1^*) comme idéal bilatère.

Notations. - A_1^* désignant un t-sous-espace de A^* , notons $P(F , A , A_1^*)$ l'ensemble des endomorphismes $c \in P(F , A)$ tels que $c^*A_1^* \subseteq A_1^*$, où c^* est l'endomorphisme de A^* transposé de c (cf. [1], § 2, n° 5, p. 65) : c^* est tel que

$$\forall \ x \in A , \quad \forall \ f \in A^* , \qquad (xc)f = x(c^*f) \ .$$

$P(F , A , A_1^*)$ est un sous-anneau de $P(F , A)$, et :

THÉORÈME 2.12. - $P(F , A , A_1^*)$ est la réunion de tous les sous-anneaux P de $P(F , A)$ tels que (F , A , A_1^*) soit idéal bilatère de $\mathbb{D}P$.

Pour tout $k \in (F , A , A_1^*)$, $c \in P(F , A)$, $x \in A$, on a, avec $k = (\alpha ; i , \lambda)$:

$$xck = [(xc)f_i]\alpha e_\lambda = [x(c^*f_i)\alpha]e_\lambda \ .$$

Donc $c \in P(F , A , A_1^*)$ si, et seulement si, $ck \in (F , A , A_1^*)$. On démontre de même que $c \in P(F , A , A_1^*)$ si, et seulement si, $kc \in (F , A , A_1^*)$, d'où le théorème.

3. Isomorphismes d'anneaux et de demi-groupes d'applications linéaires.

Dans ce paragraphe, nous donnons sans démonstrations les résultats les plus significatifs concernant les isomorphismes.

Soient $A = (F , A)$ et $B = (H , B)$ deux espaces vectoriels sur les corps F et H respectivement : une bijection a_ρ de A sur B est dite semi-linéaire s'il existe un isomorphisme ρ du corps F sur H tel que

$$\forall \, x \in A , \ \forall \, y \in A , \ \forall \, \lambda \in F \qquad (x+y)a_\rho = xa_\rho + ya_\rho \quad \text{et} \quad (\lambda x)a_\rho = \lambda\rho . xa_\rho$$

(voir [1], § 1, n° 13, p. 51). Dans la suite, nous supprimons l'indice ρ . Si a

est une bijection semi-linéaire de A sur B , l'application φ_a de $P(F , A)$ sur $P(H , A)$, définie par $p\varphi_a = a^{-1}$ pa pour tout $p \in P(F , A)$, est un isomorphisme. Il est dit induit par a .

THÉORÈME 3.1. - Soient $A = (F , A)$, $B = (H , B)$ deux espaces vectoriels sur F et H , A_1^* un t-sous-espace de A^* , et $I \subseteq I_B$ (pour la définition de I_B voir théorème 2.1). Les demi-groupes

$$K_1 = (F , A , A_1^*) \quad \text{et} \quad K_2 = \mathfrak{M}^0(\mathfrak{D}(H\setminus 0) ; I , \Lambda_B ; [e_\lambda f_i])$$

sont isomorphes si, et seulement si, il existe une bijection semi-linéaire a de A sur B telle que $A_1^* a^* = IH$ (a^* est la transposée de a ; voir [1], p. 67). Tout isomorphisme de K_1 sur $K_2 = (H , B , B_1^*)$ est induit par a $(A_1^* a^* = IH = B_1^*)$. De plus, $\varphi_a = \varphi_b$ si, et seulement si, $b = \lambda a$.

COROLLAIRE 3.2. - (F , A , A^*) et (H , B , B^*) sont isomorphes si, et seulement si, A et B le sont.

Tout isomorphisme de (F , A , A^*) sur (H , B , B^*) est induit par une bijection semi-linéaire de A sur B .

D'autres conséquences se déduisent du théorème 3.1 en considérant les automorphismes. Le lemme suivant est aussi une conséquence directe du théorème 3.1.

LEMME 3.3. - (F , A , A^*) n'est isomorphe à aucun idéal à droite propre de (H , B , B^*) .

THÉORÈME 3.4. - Soient $A = (F , A)$ et $B = (H , B)$ deux espaces vectoriels sur F et H respectivement, S_A et S_B deux sous-demi-groupes de $\mathfrak{MP}(F , A)$ et $\mathfrak{MP}(H , B)$ ayant respectivement $K_1 = (F , A , A_1^*)$ et $K_2 = (H , B , B_1^*)$ comme idéal bilatère. Tout isomorphisme φ de S_A sur S_B est induit par une bijection semi-linéaire de A sur B , et $K_1 \varphi = K_2$.

Il résulte en particulier de ce théorème que tout isomorphisme de S_A sur S_B peut être prolongé avec unicité en un isomorphisme de $\mathfrak{MP}(F , A)$ sur $\mathfrak{MP}(H , B)$.

4. Caractérisation de certaines classes d'anneaux.

THÉORÈME 4.1. - Soit P un anneau ayant les propriétés suivantes :

(a) P est sans idéaux nilpotents,

(b) P a un idéal à droite minimal A , et $K = PA$,

(c) $0 \cdot A = \{x ; x \in A , xA = 0\} = 0$.

Alors :

1° A est un espace vectoriel sur un corps F ;

2° Il existe un isomorphisme θ de P dans un anneau $P(F, A, A_1^*)$ (cf. théorème 2.12) ;

3° $K\theta = (F, A, A_1^*)$ et $(\mathfrak{P}K)\theta = \mathfrak{P}(F, A, A_1^*)$.

Démonstration.

1° D'après le dual du théorème 1.8, $K = PA$ est un idéal complètement 0-simple de $\mathfrak{D}P$. A est un idéal à droite minimal de K , et $A = R_i^0$ ($R_i^0 = R_i \cup (0)$ où R_i est une $\mathcal{R}$-classe de Green). Il existe λ tel que $G_{i\lambda}^0 = R_i^0 \cap L_\lambda^0$ soit un corps. En posant $F = G_{i\lambda}^0$, on a $FA = A$. Comme par ailleurs A est un groupe additif, il en résulte que A est un espace vectoriel à gauche sur F .

2° Les formules suivantes :

$$\forall\, x \in A\ ,\quad \forall\, y \in A\ ,\quad \forall\, a \in P\ ,\quad \forall\, b \in P\ ,\quad \forall\, \alpha \in F$$

(1) $$(x + y)a = xa + ya \qquad \text{et} \qquad (\alpha x)a = \alpha(xa)$$

(2) $$x(a + b) = xa + xb \qquad \text{et} \qquad (xa)b = x(ab)$$

montrent que l'application θ qui, à $a \in P$, fait correspondre l'endomorphisme $(x \longrightarrow xa)$ noté $a\theta$, est un homomorphisme de P dans $P(F, A)$. Si $a\theta = b\theta$, alors pour tout $x \in A$, $xa = xb$ et $x(a - b) = 0$; donc $A(a - b) = 0$, et d'après l'hypothèse (c), $a - b = 0$: θ est aussi une injection.

3° Montrons d'abord que $K\theta \subseteq (F, A, A^*)$. Soit $(\alpha\, ;\, j, \mu) \in K$.

$$A\{(\alpha\, ;\, j, \mu)\theta\} = A(\alpha\, ;\, j, \mu) = G_{i\mu}^0 = F(\alpha\, ;\, i, \mu)\, ; \qquad (A = R_i^0 \ \text{et}\ G_{i\lambda}^0 = F)\ .$$

Comme $F(\alpha\, ;\, i, \mu)$ est un sous-espace de A de dimension 1 , $K\theta \subseteq (F, A, A^*)$. $K\theta$ est transitif : en effet, si $x = (\alpha\, ;\, i, \lambda_1) \neq 0$ et $y = (\beta\, ;\, i, \lambda_2)$ sont deux éléments de A , il existe $j \in I$ tel que $p_{\lambda_1 j} \neq 0$; en prenant

$$a = (p_{\lambda_1 j}^{-1}\, \alpha^{-1}\, \beta\, ;\, j, \lambda_2) \in K\ ,$$

on a

$$x(a\theta) = xa = (\alpha\, ;\, i, \lambda_1)(p_{\lambda_1 j}^{-1}\, \alpha^{-1}\, \beta\, ;\, j, \lambda_2) = (\beta\, ;\, i, \lambda_2) = y\ .$$

D'après le théorème 2.6, $K\theta$ est un idéal à droite de (F, A, A^*) . Il en résulte que l'anneau $(\mathfrak{P}K)\theta = \mathfrak{P}(K\theta)$ est un idéal à droite de $P_0(F, A)$; d'après le lemme 2.10 et le lemme 2.5, $(\mathfrak{P}K)\theta = \mathfrak{P}(F, A, A_1^*)$ où A_1^* est un t-sous-espace de A . Donc,

$$K\theta \subseteq (\mathfrak{P}K)\theta \cap (F , A , A^*) = (F , A , A_1^*) .$$

$K\theta$ est un idéal bilatère non nul du demi-groupe complètement 0-simple (F , A , A_1^*), donc $K\theta = (F , A , A_1^*)$. D'après le théorème 2.12, $P\theta \subseteq P(F , A , A_1^*)$.

THÉORÈME 4.2. - Soit P un anneau tel que $\mathfrak{M}P$ contienne un idéal bilatère complètement 0-simple K , contenu dans tout idéal bilatère non nul de P (ou bien, ce qui est équivalent, dont l'intersection avec tout idéal bilatère non nul de P n'est pas réduite à zéro). Alors il existe un isomorphisme θ de l'anneau P dans un anneau $P(F , A , A_1^*)$ tel que

$$K\theta = (F , A , A_1^*) \qquad \text{et} \qquad (\mathfrak{P}K)\theta = \mathfrak{P}(F , A , A_1^*) .$$

Démonstration. - Il suffit de vérifier que les conditions (a), (b), (c) du théorème 4.1 sont remplies. Soit I un idéal bilatère non nul de P ; $K \subseteq I$ et $K^n = K$ impliquent $I^n \neq (0)$ pour tout entier n ; donc P est sans idéaux nilpotents. Soit A un idéal à droite minimal de K . K étant un idéal minimal de $\mathfrak{M}P$ (cf. théorème énoncé dans la démonstration du corollaire 1.9), A est un idéal à droite minimal de $\mathfrak{M}P$ ([2], théorème 2.35). D'après le lemme 1.7, A est aussi un idéal à droite minimal de P . Si $0 .^{\cdot} A \neq (0)$, alors $0 .^{\cdot} A$ est un idéal bilatère de P , donc $K \subseteq 0 .^{\cdot} A$, d'où $AK = 0$ et $A^2 = 0$, ce qui n'est pas ; donc $0 .^{\cdot} A = 0$.

THÉORÈME 4.3 (6). - Soit P un anneau. $\mathfrak{M}P$ est complètement 0-simple si, et seulement si, P est un corps.

Démonstration. - Si $\mathfrak{M}P$ est complètement 0-simple, d'après le théorème 4.2, il existe un isomorphisme θ de P sur un anneau $\mathfrak{P}(F , A , A_1^*)$ et

$$(\mathfrak{M}P)\theta = (F , A , A_1^*) = R(I) \qquad \text{avec } A^*(I) = IF = A_1^* \quad \text{(cf. paragraphe 2)} .$$

Démontrons que l'ensemble I est réduit à un seul élément. A étant un espace vectoriel sur F , soit $\{x_1 , x_2 , \ldots , x_\nu , \ldots\}$ une base de A . Si A est de dimension 1 , (F , A , A^*) est un groupe avec zéro et P est un corps. Sinon il existe $x_1 = \alpha e_\lambda$ et $x_2 = \beta e_\mu$ linéairement indépendants. Supposons qu'il existe $i \neq j$, i et j dans I .

$$(\alpha ; i , \lambda) + (\beta ; j , \mu) \in \mathfrak{P}(F , A , A_1^*) = P\theta = \mathfrak{M}(P\theta) = (F , A , A_1^*) .$$

---

(6) Ce théorème donne la solution d'un problème posé par Mlle N. CHAPTAL dans une note récente aux Compte-Rendus à l'Académie des Sciences (t. 260, 1965, p. 27-29).

Donc :

$$(\alpha\ ;\ i\ ,\ \lambda) + (\beta\ ;\ j\ ,\ \mu) = (\gamma\ ;\ k\ ,\ \nu) \qquad \text{avec} \quad k \in I\ ,$$

et pour tout $x \in A$:

$$(xf_i)\alpha e_\lambda + (xf_j)\beta e_\mu = (xf_k)\gamma e_\nu = (xf_k)\gamma(\sum_{p=1}^{n} \delta_p x_p) \ .$$

Compte tenu du fait que $x_1 = \alpha e_\lambda$, $x_2 = \beta e_\mu$, et de l'indépendance linéaire de $\{x_1 , \dots , x_\nu , \dots\}$, il en résulte :

$$xf_i = (xf_k)\gamma\delta_1 \ , \qquad xf_j = xf_k\,\gamma\delta_2 \qquad \text{et} \qquad \delta_p = 0 \quad \text{pour} \quad p \neq 1 \quad \text{et} \quad p \neq 2 \ .$$

On en déduit $f_i = f_k\,\gamma\delta_1$ et $f_j = f_k\,\gamma\delta_2$. Par suite de la définition des formes f_i , f_j , f_k (voir théorème 2.1), $i = j = k$. C'est en contradiction avec l'hypothèse $i \neq j$. L'ensemble I est donc réduit à un seul élément ; la matrice de Rees de (F , A , A_1^*) est une matrice colonne, donc dans (F , A , A_1^*) (et aussi dans P), le zéro est complètement premier ($ab = 0 \Longrightarrow a = 0$ ou $b = 0$). $\mathfrak{M}(P\backslash 0)$ est alors un demi-groupe complètement simple simplifiable, c'est-à-dire un groupe.

<u>Soit $\mathcal{K}_1$ la classe des anneaux simples avec un idéal à droite minimal</u> (ou un idéal à gauche minimal, cf. corollaire 1.9).

THÉORÈME 4.4. - $P \in \mathcal{K}_1$ <u>si, et seulement si,</u> P <u>est isomorphe à un anneau</u> $\mathfrak{P}(F , A , A_1^*)$.

$\mathfrak{P}(F , A , A_1^*) \in \mathcal{K}_1$, d'après le théorème 2.11. Réciproquement, si $P \in \mathcal{K}_1$, soit L un idéal à gauche minimal de P . $K = LP$ est un idéal complètement 0-simple de $\mathfrak{M}P$, et $P = \mathfrak{P}K$. D'après le théorème 4.2, P est isomorphe à $\mathfrak{P}(F , A , A_1^*)$.

Le théorème suivant donne une caractérisation de l'anneau des endomorphismes de rang fini :

THÉORÈME 4.5. - <u>Un anneau</u> P <u>est isomorphe à</u> $P_0(F , A)$ <u>si, et seulement si,</u> $P \in \mathcal{K}_1$, <u>et</u> P <u>n'est isomorphe à aucun idéal à droite propre d'un anneau simple</u> P' .

<u>Démonstration</u>. - Soit $P \in \mathcal{K}_1$. D'après le théorème 4.4, P est isomorphe à $\mathfrak{P}(F , A , A_1^*)$. Si A_1^* est un t-sous-espace propre de A^* , $\mathfrak{P}(F , A , A_1^*)$ est un idéal à droite propre de l'anneau simple $P_0(F , A)$ (théorème 2.11). Par conséquent, un anneau P , vérifiant les conditions de l'énoncé, est isomorphe à $P_0(F , A)$.

Réciproquement, $P_0(F , A) = \mathfrak{P}(F , A , A^*)$, donc d'après le théorème 4.4, $P_0(F , A) \in \mathcal{K}_1$. Supposons qu'il existe un isomorphisme φ de $P_0(F , A)$ sur un idéal à droite P'' d'un anneau simple P' . Soit R un idéal à droite minimal de $P_0(F , A)$; $R\varphi$ est un idéal à droite minimal de P'' . Montrons que $R\varphi$ est aussi un idéal à droite (donc minimal) de P' : soit $b \in P'$; $R\varphi.b \subseteq P''.P' \subseteq P''$; comme R est un idéal à droite minimal du demi-groupe complètement 0-simple (F , A , A^*) (lemme 1.7), il existe un idempotent non nul $e \in R$ tel que $eR = R$; par conséquent,

$$R\varphi.b = (eR)\varphi.b = (e\varphi)R\varphi.b \quad ;$$

mais $R\varphi.b \subseteq P''$ et $e\varphi \in R\varphi$, donc $R\varphi.b \subset R\varphi$, et $R\varphi$ est un idéal à droite minimal de P' . D'après le théorème 4.2, il existe un isomorphisme θ de P' sur un anneau $\mathfrak{P}(H , B , B_1^*)$; $\varphi\theta$ est alors un isomorphisme de $P_0(F , A)$ sur un idéal à droite de $\mathfrak{P}(H , B , B_1^*)$; d'après le lemme 2.10 et le théorème 2.11, un idéal à droite de $\mathfrak{P}(H , B , B_1^*)$ est de la forme $\mathfrak{P}(H , B , B_2^*)$, où B_2^* est un t-sous-espace de B_1^* ; en appliquant le théorème 4.2, on a alors :

$$(F , A , A^*)\varphi\theta = (H , B , B_2^*) \quad ;$$

le lemme 3.3 indique alors que $B_2^* = B^*$ et $P_0(F , A)\varphi\theta = P_0(H , B)$; d'un autre côté $B_1^* = B^*$, donc $P'\theta = P_0(H , B)$. En définitive :

$$P_0(F , A)\varphi\theta = P'\theta , \qquad \text{d'où} \qquad P_0(F , A)\varphi = P' \qquad \text{et} \qquad P'' = P' \quad .$$

Pour obtenir une caractérisation de l'anneau $P(F , A)$ de tous les endomorphismes, nous utilisons la notion d'immersion dense [9]. Signalons en passant que d'autres caractérisations de $P_0(F , A)$ et de $P(F , A)$ sont données dans [10].

DÉFINITION 4.6. - <u>Un idéal bilatère</u> K <u>d'un demi-groupe</u> D <u>est dit immergé de façon dense</u> (nous dirons plus brièvement "<u>immergé</u>") <u>si</u> :

1° <u>tout homomorphisme propre</u> (i. e. non isomorphisme) <u>de</u> D <u>induit un homomorphisme propre sur</u> K ;

2° <u>pour tout sur-demi-groupe</u> Δ <u>de</u> D , <u>tel que</u> K <u>soit aussi un idéal de</u> Δ , <u>il existe un homomorphisme propre de</u> Δ <u>induisant un isomorphisme sur</u> K .

Soit alors $\mathcal{K}_2$ <u>la classe des anneaux</u> P <u>tels que</u> $\mathfrak{M}P$ <u>contienne un idéal bilatère complètement</u> 0-<u>simple immergé</u> $K(P)$.

THÉORÈME 4.7. - <u>Un anneau</u> P <u>est dans</u> $\mathcal{K}_2$ <u>si, et seulement si,</u> P <u>est isomorphe à un anneau</u> $P(F , A , A_1^*)$ (cf. théorème 2.12).

On vérifie sans difficulté que (F , A , A_1^*) est un idéal complètement 0-

simple immergé dans $P(F, A, A_1^*)$; donc $P(F, A, A_1^*) \in \mathcal{K}_2$. Supposons que le demi-groupe $\mathfrak{D}P$ de l'anneau P contienne K comme idéal complètement 0-simple immergé. Si, pour un idéal bilatère C de $\mathfrak{D}P$, on a $C \cap K = (0)$, l'homomorphisme φ de $\mathfrak{D}P$ sur le demi-groupe quotient de Rees ([2], p. 17) $\mathfrak{D}P/C$ est un homomorphisme propre de $\mathfrak{D}P$ induisant un isomorphisme sur K : c'est impossible (définition 4.6, 1°). Donc tout idéal bilatère C de $\mathfrak{D}P$ est tel que $C \cap K \neq (0)$. D'après le théorème 4.2, il existe un homomorphisme Ψ de P dans un anneau $P(F, A, A_1^*)$, et $K\Psi = (F, A, A_1^*)$. Dans [3] est démontré le résultat suivant: soient K un sous-demi-groupe transitif de $\mathfrak{D}P(F, A)$, et S_K le sous-demi-groupe maximal de $\mathfrak{D}P(F, A)$ ayant K comme idéal bilatère ; un demi-groupe S est isomorphe à S_K si, et seulement si, S contient un idéal immergé isomorphe à K. $K\Psi$ est immergé dans $(\mathfrak{D}P)\Psi$ et dans $P(F, A, A_1^*)$, donc il existe un isomorphisme θ de $(\mathfrak{D}P)\Psi$ sur $\mathfrak{D}P(F, A, A_1^*)$, et θ est tel que

$$(F, A, A_1^*)\theta = (F, A, A_1^*) .$$

D'après le théorème 3.4, θ est induit par une bijection semi-linéaire de A ; θ est donc un isomorphisme de l'anneau $P\Psi$ sur $P(F, A, A_1)$.

THÉORÈME 4.8. - Un anneau P est isomorphe à un anneau $P(F, A)$ si, et seulement si :

1° $P \in \mathcal{K}_2$,

2° $K(P)$ n'est isomorphe à aucun idéal à droite propre du demi-groupe $K(P')$ associé à un anneau $P' \in \mathcal{K}_2$.

Démonstration. - D'après le théorème 4.7, $P(F, A) \in \mathcal{K}_2$. Soit φ un isomorphisme de (F, A, A^*) sur un idéal à droite de $K(P')$, où $P' \in \mathcal{K}_2$. Il existe un isomorphisme θ de P' sur un anneau $P(H, B, B_1^*)$ (théorème 4.7), et $K(P')\theta = (H, B, B_1^*)$ (théorème 4.2). Donc $(F, A, A^*)\varphi\theta$ est un idéal à droite de (H, B, B^*), et d'après le lemme 3.3,

$$(F, A, A^*)\varphi\theta = (H, B, B^*) = K(P')\theta , \qquad \text{d'où} \quad (F, A, A^*)\varphi = K(P') .$$

Réciproquement, soit P un anneau vérifiant 1° et 2°. D'après le théorème 4.7, P est isomorphe à un anneau $P(F, A, A_1^*)$. Si A_1^* était un t-sous-espace propre de A^*, $K(P)$ serait isomorphe à l'idéal à droite propre (F, A, A_1^*) de F, A, A^* : c'est contraire à 2°. Donc $A_1^* = A^*$, et P est isomorphe à $P(F, A)$.

DÉFINITION 4.9. - Un anneau P est dit à addition unique [7] si tout isomorphisme de $\mathfrak{D}P$ sur $\mathfrak{D}P'$ est un isomorphisme de P sur P'.

Soit $\mathcal{K}_3$ la classe des anneaux P tels que $\mathfrak{D}P$ contient un idéal complètement

0-*simple* propre K , *contenu dans tous les idéaux non nuls de* P .

THÉORÈME 4.10. - *Si* P *est un anneau de la classe* $\mathcal{K}_3$, *alors* P *est à addition unique*.

Soit φ un isomorphisme de $\mathfrak{D}P$ sur le demi-groupe $\mathfrak{D}P'$ d'un anneau P' . Alors $K\varphi$ est un idéal complètement 0-simple propre de $\mathfrak{D}P'$ contenu dans tous les idéaux non nuls de $\mathfrak{D}P'$. D'après le théorème 4.2, il existe des isomorphismes θ et θ' de P et P' dans $P(F , A , A_1^*)$ et $P(H , B , B_1^*)$ respectivement avec $K\theta = (F , A , A_1^*)$ et $K\varphi\theta' = (H , B , B_1^*)$. Il en résulte que $\theta^{-1}\varphi\theta = \varphi_1$ est un isomorphisme de $(\mathfrak{D}P)\theta \subseteq P(F , A , A_1^*)$ sur $(\mathfrak{D}P')\theta' \subseteq P(H , B , B_1^*)$ avec $(F , A , A_1^*)\varphi_1 = (H , B , B_1^*)$. Si A est de dimension 1 , $P(F , A , A_1^*) = (F , A , A_1^*)$, $P\theta = K\theta$ et $P = K$: c'est contradictoire avec le fait que K est un idéal propre. Donc A (et B pour la même raison) est de dimension $\geqslant 2$. D'après le théorème 3.4, φ_1 est induit par une bijection semi-linéaire de A sur B : φ_1 est donc un isomorphisme de l'anneau $P\theta$ sur l'anneau $P\theta'$, et $\varphi = \theta\varphi_1\theta'^{-1}$ est un isomorphisme de P sur P' .

COROLLAIRE 4.11. - *Si la dimension de* A *est supérieure ou égale à* 2 , *les anneaux* $P(F , A , A_1^*)$ *et* $\mathfrak{P}(F , A , A_1^*)$ (et en particulier $P(F , A)$ et $P_0(F , A)$) *sont des anneaux à addition unique*.

Pour terminer cet exposé, signalons que GLUSKIN a également étudié plus particulièrement des demi-groupes et anneaux d'endomorphismes, transitifs. Un sous-ensemble N de $P(F , A)$ est dit n-transitif [6] si, pour tout $x_1 , x_2 , \dots , x_n$ linéairement indépendants dans A et pour tout $y_1 , y_2 , \dots , y_n \in A$, il existe un endomorphisme $a \in N$ tel que $x_i\, a = y_i$ pour $i = 1 , 2 , \dots , n$. On démontre alors que si $\dim A \geqslant 2$, $\mathfrak{P}(F , A , A_1^*)$ est n-transitif pour tout $n \leqslant \dim A$, que les sous-anneaux P de $P_0(F , A)$ bitransitifs coïncident avec les anneaux de type $\mathfrak{P}(F , A , A_1^*)$ (ils sont par conséquent simples avec des idéaux à droite et à gauche minimaux ; réciproquement, un anneau simple avec des idéaux d'un côté minimaux, est isomorphe à un sous-anneau bitransitif de $P_0(F , A)$; cf. [6]). De plus, chaque sous-anneau transitif de $P_0(F , A)$ est isomorphe à un certain anneau $\mathfrak{P}(H , B , B_1^*)$, donc est simple avec un idéal à droite (à gauche) minimal.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI (N.). - Algèbre, Chap. 2 : Algèbre linéaire, 3e éd. - Paris, Hermann, 1962 (Act. scient. et ind., 1236 ; Bourbaki, 6).

[2] CLIFFORD (A. H.) and PRESTON (G. B.). - The algebraic theory of semigroups, Vol. 1. - Providence, American mathematical Society, 1961 (Mathematical Surveys, 7).

[3] GLUSKIN (L. M.). - Idéaux de demi-groupes de transformations [en russe], Mat. Sbornik, t. 47, 1959, p. 111-130.

[4] GLUSKIN (L. M.). - Demi-groupes et anneaux d'endomorphismes d'un espace vectoriel [en russe], Izv. Akad. Nauk SSSR, t. 23, 1959, p. 841-870.

[5] GLUSKIN (L. M.). - Demi-groupes et anneaux d'endomorphismes d'un espace vectoriel, II. [en russe], Izv. Akad. Nauk SSSR, t. 25, 1961, p. 809-814.

[6] JACOBSON (N.). - Structure theory of simple rings without finiteness assumptions, Trans. Amer. math. Soc., t. 57, 1945, p. 228-245.

[7] JOHNSON (R. E.). - Rings with unique addition, Proc. Amer. math. Soc., t. 9, 1958, p. 57-61.

[8] LALLEMENT (G.). - Homomorphismes d'un demi-groupe sur un demi-groupe complètement 0-simple, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et théorie des nombres, 17e année, 1963/64, n° 14, 22 p.

[9] LJAPIN (E. S.). - Demi-groupes [en russe]. - Moscou, 1960.
[Cf. aussi la traduction anglaise : Semigroups. - Providence, American mathematical Society, 1963 (Translations of mathematical Monographs, 3).]

[10] WOLFSON (K. G.). - An ideal theoretic characterization of the ring of all linear transformations, Amer. J. of Math., t. 75, 1953, p. 358-386.