Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Marie-Paule Brameret
Michel Enguehard
Guy Renault

Étude élémentaire des catégories

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 18, nº 2 (1964-1965), exp. nº 27, p. 1-46
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1964-1965__18_2_A7_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
18e année, 1964/65, n° 27

ÉTUDE ÉLÉMENTAIRE DES CATÉGORIES (*)

par Mlle Marie-Paule BRAMERET, Michel ENGUEHARD et Guy RENAULT

Table des matières

(*) Ces exposés ont été faits au Groupe d'études d'Algèbre dirigé par P. DUBREIL.

1. Catégories.

1.1. Définitions des catégories.

1.1.1. Définition. - Une catégorie C peut être décrite comme étant la donnée d'une "classe" d'objets telle qu'à chaque couple ordonné A , B d'objets de C soit associé un ensemble, noté $\mathrm{Hom}(A , B)$ ou $\mathrm{Hom}_C(A , B)$. Pour deux couples d'objets distincts (A , B) et (A' , B') , les ensembles $\mathrm{Hom}(A , B)$ et $\mathrm{Hom}(A' , B')$ sont supposés disjoints. Les éléments de $\mathrm{Hom}(A , B)$ sont les morphismes de A vers B . On écrit $f : A \to B$ si $f \in \mathrm{Hom}(A , B)$; l'objet A, appelé source de f , est noté $S(f)$; l'objet B , appelé but de f , est noté $B(f)$. D'autre part, il existe une loi de composition entre les morphismes de telle sorte que si f et g sont deux morphismes et si $B(f) = S(g)$, il existe un morphisme unique de $S(f)$ vers $B(g)$, noté gf . Cette loi de composition est assujettie aux axiomes suivants :

(C_1) Elle est associative : i. e. si $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$, alors $h(gf) = (hf)g$.

(C_2) Pour tout objet A , il existe un morphisme, dit morphisme identité ou identique : $1_A : A \to A$, tel que si $f : A \to B$ et $g : C \to A$, alors $f1_A = f$ et $1_A g = g$.

L'unicité, pour chaque objet, du morphisme identique, résulte de l'associativité.

1.1.2. Exemples.

1° La catégorie Ens des ensembles a pour objets tous les ensembles et pour morphismes toutes les applications avec la composition habituelle.

2° La catégorie Gr des groupes a comme objets tous les groupes et comme morphismes tous les homomorphismes de groupes.

3° La catégorie Ab des groupes abéliens a comme objets tous les groupes abéliens et comme morphismes tous les homomorphismes de groupes.

4° Si A est un anneau, la catégorie A-$\underset{\sim}{\text{Mod}}_g$ a pour objets tous les A-modules à gauche et pour morphismes toutes les applications A-linéaires.

5° La catégorie $\underset{\sim}{\text{Top}}$ des espaces topologiques a pour objets tous les espaces topologiques et pour morphismes toutes les applications continues.

Dans la définition 1, le mot "classe" est pris au sens de la théorie des ensembles de Gödel-Bernays [7] ; cette théorie permet de former la classe de tous les ensembles ; on évite ainsi les difficultés qu'il y aurait à parler de "l'ensemble de tous les ensembles". Si la classe des objets de $\mathcal{C}$ est un ensemble, on dit que $\mathcal{C}$ est une petite catégorie. Dans le cadre de la théorie de Gödel-Bernays, on peut parler de la catégorie de toutes les petites catégories, mais non de la catégorie de toutes les catégories. Pour pallier à ce genre de difficultés, différentes solutions ont été proposées, par exemple l'utilisation des catégories localement petites ([6]) et l'utilisation des univers de Grothendieck ([3]). Un univers est un ensemble d'ensembles suffisamment grand de sorte que l'on puisse, sans en sortir, y effectuer toutes les constructions classiques de la théorie des ensembles. De façon précise :

1.1.3. Définition. - Un univers $\mathcal{U}$ est un ensemble qui satisfait aux axiomes suivants :

$(\mathcal{U}_1)$ Si $(X_i)_{i\in I}$ est une famille d'ensembles appartenant à $\mathcal{U}$, indexée par un élément I de $\mathcal{U}$, la réunion $\bigcup_{i\in I} X_i$ est un élément de $\mathcal{U}$.

$(\mathcal{U}_2)$ Si x est un élément de $\mathcal{U}$, l'ensemble $\{x\}$, dont le seul élément est x, appartient à $\mathcal{U}$.

$(\mathcal{U}_3)$ Si x appartient à un ensemble X, et si X est un élément de $\mathcal{U}$, alors x est un élément de $\mathcal{U}$.

$(\mathcal{U}_4)$ Si un ensemble X appartient à $\mathcal{U}$, l'ensemble $\mathcal{P}(X)$ des parties de X appartient à $\mathcal{U}$.

$(\mathcal{U}_5)$ Le couple (x, y) appartient à $\mathcal{U}$ si et seulement si x et y appartiennent à $\mathcal{U}$.

De l'axiome $(\mathcal{U}_5)$ résulte que le seul univers fini est l'ensemble vide. Des axiomes $(\mathcal{U}_3)$ et $(\mathcal{U}_4)$, il résulte que toute partie Y d'un ensemble X appartenant à $\mathcal{U}$ appartient à $\mathcal{U}$.

Si X et Y sont deux ensembles de $\mathcal{U}$, alors $X \cup Y$ appartient à $\mathcal{U}$: d'après $(\mathcal{U}_1)$, il suffit de remarquer que $\mathcal{U}$ contient un ensemble à deux éléments. Or, si $x \in \mathcal{U}$, alors $\{x\} \in \mathcal{U}$; d'où $\mathcal{P}(\{x\}) \in \mathcal{U}$ et $\mathcal{P}(\{x\}) = \{\emptyset, x\}$.

Si x et $y \in \mathcal{U}$, alors $\{x , y\}$ $(= \{x\} \cup \{y\})$ appartient à $\mathcal{U}$. Si X et Y sont deux ensembles de $\mathcal{U}$, alors $X \times Y$, qui est égale à $\bigcup_{y \in Y} (\bigcup_{x \in X} (x , y))$, appartient à $\mathcal{U}$.

Si $(X_i)_{i \in I}$ est une famille d'ensembles appartenant à $\mathcal{U}$ et si I appartient à $\mathcal{U}$, alors le produit $\prod_{i \in I} X_i$ appartient à $\mathcal{U}$. Par définition, $\prod_{i \in I} X_i$ est en effet une partie de $\mathcal{P}(I \times A)$, où $A = \bigcup_{i \in I} X_i$.

Si X et Y sont deux ensembles appartenant à $\mathcal{U}$, l'ensemble E des applications f de X dans Y appartient à $\mathcal{U}$. En effet, toute application f de X dans Y étant représentée par son graphe, E est une partie de $X \times Y$.

Si X est un ensemble appartenant à un univers $\mathcal{U}$, alors $\operatorname{Card} X < \operatorname{Card} \mathcal{U}$; en effet, puisqu'il n'existe pas de $y \in X$ tel que $y = X$, l'application injective $x \in X \to x \in \mathcal{U}$ n'est pas surjective.

Par suite, un univers n'appartient pas à lui-même.

Enfin, il convient d'adjoindre aux axiomes de la théorie des ensembles, l'axiome suivant :

(Axiome de Tarski) Tout ensemble appartient à un univers au moins.

Dans toute la suite, les catégories seront relatives à un certain univers. Précisément, les objets d'une catégorie $\mathcal{C}$ seront les éléments d'un ensemble, noté $\operatorname{Ob}(\mathcal{C})$, appartenant à un univers $\mathcal{U}$. Si X et $Y \in \operatorname{Ob}(\mathcal{C})$, l'ensemble $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X , Y)$ appartiendra à $\mathcal{U}$. On notera $\operatorname{Fl}(\mathcal{C})$ la somme des ensembles $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X , Y)$, i. e. l'ensemble des morphismes ou des flèches de la catégorie $\mathcal{C}$.

Lorsqu'on se restreint aux $\mathcal{U}$-catégories, la catégorie des ensembles a pour objets les ensembles de $\mathcal{U}$. Puisqu'un univers n'appartient pas à lui-même, l'ensemble des ensembles de $\mathcal{U}$, étant une réunion d'ensembles indexés par $\mathcal{U}$, n'appartient pas à $\mathcal{U}$, mais il appartient à tout univers $\mathcal{V}$ tel que $\mathcal{U}$ appartienne à $\mathcal{V}$. Par suite, la catégorie des ensembles est une $\mathcal{V}$-catégorie. De même sont des $\mathcal{V}$-catégories toutes celles des exemples 1.1.2, où les ensembles sous-jacents des objets appartiennent à un univers $\mathcal{U}$.

Dans la suite, nous n'introduirons pas explicitement les univers. Chaque fois qu'on considérera simultanément plusieurs catégories, on pourra les supposer relatives à un même univers ; il suffit, pour cela, de remarquer que si $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ sont deux univers tels que $\mathcal{U}$ appartienne à $\mathcal{V}$, alors toute $\mathcal{U}$-catégorie est une $\mathcal{V}$-catégorie.

Entre les objets d'une catégorie $\mathcal{C}$ et les morphismes identités, il existe une application bijective permettant d'éliminer la notion d'objets de la définition des catégories.

1.1.4. Définition. - Une catégorie $\mathcal{C}$ est un ensemble d'éléments, appelés morphismes, muni d'une loi de composition non partout définie. Un morphisme u est une identité de $\mathcal{C}$ si $uf = f$ dès que uf est défini, et $gu = g$ dès que gu est défini. Les axiomes sont les suivants :

1° Si dans $\mathcal{C}$ l'une des expressions $(fg)h$ ou $f(gh)$ est définie, l'autre l'est, et elles sont égales. On notera alors fgh ce produit.

2° Si les produits fg et gh sont définis, alors fgh l'est aussi.

3° Pour chaque morphisme f, il existe deux identités u'_f et u''_f telles que $u'_f\, f$ et $f u''_f$ sont définies.

Pour f donné, il y a, d'après l'axiome 1°, unicité du morphisme identité à droite (resp. à gauche) qui lui est associé par l'axiome 3°.

Il est facile de vérifier l'équivalence des deux définitions 1.1.1 et 1.1.4. Pour passer de 1.1.1 à 1.1.4, on associe à chaque objet A son morphisme identité 1_A. Pour passer de 1.1.4 à 1.1.1, on considère l'ensemble des morphismes identités comme l'ensemble des objets d'une catégorie. A chaque couple u', u'' d'identités, on associe l'ensemble des morphismes f qui vérifient : $u'_f = u'$ et $u''_f = u''$. Enfin, on utilise la proposition suivante, dont la démonstration ne présente pas de difficultés :

PROPOSITION. - Le produit fg est défini si et seulement si le morphisme identité à gauche de f coïncide avec le morphisme identité à droite de g.

1.2. Quelques types de morphismes.

Définition. - Etant donnée une catégorie $\mathcal{C}$, un morphisme $f : X \to Y$ de $\mathcal{C}$ est dit inversible à gauche (resp. à droite) s'il existe un morphisme $g : Y \to X$ (resp. $h : Y \to X$) tel que $gf = 1_X$ (resp. $fh = 1_Y$). Un morphisme f est dit inversible, s'il est inversible à droite et à gauche ; on dit aussi que f est un isomorphisme ou que f est une équivalence.

Si le morphisme $f : X \to Y$ est inversible, il existe, d'après l'associativité de la loi de composition de $\mathrm{Fl}(\mathcal{C})$, un morphisme unique $k : Y \to X$ tel que $kf = 1_X$ et $fk = 1_Y$. Le morphisme k est appelé l'inverse de f.

Deux objets de $\mathcal{C}$ sont dits isomorphes s'il existe un isomorphisme de l'un vers l'autre. L'isomorphisme est une relation d'équivalence dans $\mathcal{C}$.

Une catégorie dans laquelle chaque morphisme est inversible est un groupoïde (de Brandt). Un groupoïde avec un seul objet est un groupe.

1.2.1. Définition. - Soient $\mathcal{C}$ une catégorie, et $f : A \to B$ un morphisme de $\mathcal{C}$. On dit que f est un monomorphisme ou que f est injectif, si lorsque $fg = fg'$, où g et g' sont deux morphismes de $\mathcal{C}$ dont le but est A, alors $g = g'$. On dit que f est surjectif ou que f est un épimorphisme, si lorsque $hf = h'f$, où h et h' sont deux morphismes de $\mathcal{C}$ dont la source est B, alors $h = h'$. On dit que f est bijectif s'il est à la fois injectif et surjectif.

Tout isomorphisme est bijectif ; la réciproque est en général inexacte. Par exemple, dans la catégorie des espaces topologiques, on sait qu'une fonction continue biunivoque et surjective n'est pas un isomorphisme (i. e. un homéomorphisme).

1.3. Construction sur les catégories.

1.3.1. Définition. - Etant donnée une catégorie $\mathcal{C}$, on appelle catégorie duale de $\mathcal{C}$, et l'on note $\mathcal{C}^o$, la catégorie suivante :

1° Les objets de $\mathcal{C}^o$ sont les objets de $\mathcal{C}$;

2° Les morphismes $f^o : B \to A$ de $\mathcal{C}^o$ sont en correspondance biunivoque avec les morphismes de $f : A \to B$ de $\mathcal{C}$, et ils sont obtenus en renversant les flèches ;

3° Le composé $f^o g^o = (gf)^o$ est défini dans $\mathcal{C}^o$ si et seulement si gf est défini dans $\mathcal{C}$.

Par suite, un morphisme f^o de $\mathcal{C}^o$ est un monomorphisme si et seulement si f est un épimorphisme. De façon générale, toute définition ou toute propriété des catégories donne, par application à la catégorie duale, une définition ou une propriété duale.

Remarquons que la catégorie biduale $\mathcal{C}^{oo}$ est la catégorie $\mathcal{C}$.

La définition de $\mathcal{C}^o$ montre que les morphismes d'une catégorie ne sont pas nécessairement des applications au sens de la théorie des ensembles.

1.3.2. Définition. - Soit $(\mathcal{C}_i)_{i \in I}$ une famille de catégories, relatives à un même univers $\mathcal{U}$, indexée par un élément I de $\mathcal{U}$. On appelle catégorie produit des catégories $\mathcal{C}_i$, et on note $\prod_{i\in I} \mathcal{C}_i$, la catégorie définie de la manière suivante :

1° L'ensemble des objets est l'ensemble $\prod_{i\in I} \mathrm{Ob}(\mathcal{C}_i)$;

2° Si $(X_i)_{i\in I}$ et $(Y_i)_{i\in I}$ sont deux objets du produit, un morphisme du premier vers le second est une famille $(f_i)_{i\in I}$ de morphismes $f_i : X_i \to Y_i$ dans $\mathcal{C}_i$.

3° La loi de composition des morphismes est définie de la manière suivante : si

$$(f_i)_{i\in I} : (X_i)_{i\in I} \to (Y_i)_{i\in I} \quad \text{et} \quad (g_i)_{i\in I} : (Y_i)_{i\in I} \to (Z_i)_{i\in I} ,$$

alors

$$(g_i)_{i\in I} \circ (f_i)_{i\in I} = (g_i \circ f_i)_{i\in I} .$$

1.3.3. <u>Définition</u>. - Etant donnée une catégorie $\mathcal{C}$, une <u>sous-catégorie</u> $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$ est une catégorie qui vérifie les conditions suivantes :

1° Tout objet de $\mathcal{C}'$ est un objet de $\mathcal{C}$;

2° Si (X , Y) est un couple d'objets de $\mathcal{C}'$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(X , Y)$ est un sous-ensemble de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X , Y)$;

3° La loi de composition des morphismes de $\mathcal{C}'$ est la loi induite par celle de $\mathcal{C}$;

4° Le morphisme identité, dans $\mathcal{C}$, d'un objet de $\mathcal{C}'$ est un morphisme de $\mathcal{C}$.

Par exemple, la catégorie $\underset{\sim}{\mathrm{Ab}}$ est une sous-catégorie de $\underset{\sim}{\mathrm{Ens}}$.

1.3.4. <u>Définition</u>. - Une sous-catégorie $\mathcal{C}'$ d'une catégorie $\mathcal{C}$ est dite <u>pleine</u> si :

1° Pour tout couple (X , Y) d'objets de $\mathcal{C}'$, on a

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(X , Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X , Y) .$$

2° Si X est un objet de $\mathcal{C}'$, tout objet Y de $\mathcal{C}$, isomorphe à X , est un objet de $\mathcal{C}'$.

Par exemple, la catégorie $\underset{\sim}{\mathrm{Ab}}$ est une sous-catégorie pleine de $\underset{\sim}{\mathrm{Gr}}$.

Soient $\mathcal{C}$ une catégorie, et A un objet de $\mathcal{C}$. Considérons la catégorie $\mathcal{C}/A_m$ dont les objets sont les monomorphismes de $\mathcal{C}$ ayant A pour but, et dans laquelle un morphisme $\alpha : k \to k'$, où $k : K \to A$ et $k' : K' \to A$, est un morphisme $\alpha : K \to K'$ de $\mathcal{C}$ tel que $k = k'\alpha$.

1.3.5. Définition. - Un sous-objet de A est une classe d'équivalence des objets de la catégorie $\mathcal{C}/A_m$.

Ainsi, un sous-objet de A est le couple formé d'un objet B de $\mathcal{C}$ muni d'un monomorphisme $u : B \to A$ appelé injection canonique de B dans A . Par abus de langage, on désigne un sous-objet d'un objet A de $\mathcal{C}$ par l'objet B de $\mathcal{C}$ correspondant. L'ensemble des sous-objets de A est muni de façon évidente d'une relation d'ordre que nous noterons $<$.

Un procédé dual du précédent permet de définir les objets quotients d'un objet d'une catégorie.

2. Foncteurs.

2.1. Définition des foncteurs.

2.1.1. Définition. - Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux catégories. Un foncteur covariant F de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}'$ est constitué par la donnée :

1° d'une application, notée F , de $Ob(\mathcal{C})$ dans $Ob(\mathcal{C}')$;

2° pour tout couple d'objets X , Y de $\mathcal{C}$ et tout morphisme $f : X \to Y$, d'un morphisme $F(f) : F(X) \to F(Y)$;

de telle sorte que :

(F_1) Si $X \in Ob(\mathcal{C})$, on ait $F(1_X) = 1_{F(X)}$.

(F_2) Si X , Y et $Z \in Ob(\mathcal{C})$ et si $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ dans $\mathcal{C}$, alors $F(g)\,F(f) = F(gf)$.

2.1.2. Exemples.

1° En associant à tout groupe abélien son ensemble sous-jacent, on obtient un foncteur covariant de **Ab** dans **Ens** appelé foncteur "ensemble sous-jacent".

2° Soit $\mathcal{D}$ une sous-catégorie d'une catégorie $\mathcal{C}$. Le foncteur F , défini par $F(M) = M$ si $M \in Ob(\mathcal{C})$, et $F(f) = f$ si $f \in Fl(\mathcal{C})$, est appelé foncteur canonique de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{C}$. En particulier, on note $1_{\mathcal{C}}$ le foncteur identique de $\mathcal{C}$, i. e. le foncteur canonique de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}$.

3° On obtient un foncteur covariant de **Gr** dans **Ab** en faisant correspondre à chaque groupe G , le groupe G/G' , où G' est le sous-groupe des commutateurs de G .

4° Soit $F(S)$ le groupe libre engendré par un ensemble S . Chaque application $f : S \to S'$ peut être étendue en un unique homomorphisme de groupes $F(f) : F(S) \to F(S')$. On obtient ainsi un foncteur covariant de Ens dans Gr .

5° On obtient un foncteur covariant, en associant à chaque groupe de Lie son algèbre de Lie.

2.1.3. Définition. - Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux catégories. Un foncteur contravariant de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}'$ est un foncteur covariant de la catégorie $\mathcal{C}^o$ dans $\mathcal{C}'$.

Dans la suite, sauf mention du contraire, tous les foncteurs considérés seront covariants.

2.1.4. Définition. - Soient $\mathcal{C}_1 , \mathcal{C}_2 , \dots , \mathcal{C}_n$ et $\mathcal{C}$ des catégories. Un multifoncteur de $\mathcal{C}_1 , \dots , \mathcal{C}_n$ dans $\mathcal{C}$, covariant en $\mathcal{C}_{i_1} , \mathcal{C}_{i_2} , \dots , \mathcal{C}_{i_s}$ $(s \leqslant n)$ et contravariant en $\mathcal{C}_j$ $(j \neq i_k)$, est un foncteur de $\prod_{i=1}^{n} \overline{\mathcal{C}_i}$ dans $\mathcal{C}$, où $\overline{\mathcal{C}_i} = \mathcal{C}_i$ si $i = i_1 , \dots , i_s$ et $\overline{\mathcal{C}_i} = \mathcal{C}_i^o$ si $i \neq i_1 , \dots , i_s$.

2.2. Quelques types de foncteurs.

2.2.1. Définition. - Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories. Un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est dit constant s'il existe $B \in Ob(\mathcal{D})$ tel que :

1° Quel que soit $X \in Ob(\mathcal{C})$, on ait $FX = B$.

2° Quel que soit $u \in Fl(\mathcal{C})$, on ait $Fu = 1_B$.

2.2.2. Définition. - Un foncteur F d'une catégorie $\mathcal{C}$ dans une catégorie $\mathcal{C}'$ est dit fidèle (resp. pleinement fidèle) si, pour tout couple (X , Y) d'objets de $\mathcal{C}$, l'application de $Hom_{\mathcal{C}}(X , Y)$ dans $Hom_{\mathcal{C}'}(FX , FY)$, définie par F , est injective (resp. bijective).

2.2.3. Exemples.

1° Si $\mathcal{C}'$ est une sous-catégorie de $\mathcal{C}$, le foncteur canonique de $\mathcal{C}'$ dans $\mathcal{C}$ est fidèle.

2° Si $\mathcal{C}'$ est une sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}$, le foncteur canonique de $\mathcal{C}'$ dans $\mathcal{C}$ est pleinement fidèle.

3° Les foncteurs "ensembles sous-jacents" sont fidèles, mais non pleinement fidèles.

2.2.4. Définition. - Un foncteur F d'une catégorie $\mathcal{C}$ dans une catégorie $\mathcal{C}'$ est dit *génériquement surjectif* si, pour tout objet Y' de $\mathcal{C}'$, il existe au moins un objet X de $\mathcal{C}$ tel que $F(X)$ et Y' soient isomorphes.

2.2.5. Exemple. - Soient K un corps, et $\mathbf{Vect}_K$ la catégorie des K-espaces vectoriels. Si X est un ensemble, soit $V(X)$ l'espace vectoriel sur K de base X. Toute application $f : X \to Y$ induit une application K-linéaire $V(f) : V(X) \to V(Y)$. On obtient ainsi un foncteur $V : \mathbf{Ens} \to \mathbf{Vect}_K$ qui est génériquement surjectif.

2.2.6. Définition. - Soient $\mathcal{C}$ une catégorie, et X un objet de $\mathcal{C}$. On note $\mathrm{Hom}(X , .)$ [resp. $\mathrm{Hom}(. , X)$] le foncteur covariant [resp. contravariant] de $\mathcal{C}$ dans $\mathbf{Ens}$ défini de la manière suivante :

1° A chaque objet Y de $\mathcal{C}$, il fait correspondre l'ensemble $\mathrm{Hom}(X , Y)$ [resp. $\mathrm{Hom}(Y , X)$].

2° A chaque morphisme $f : Y \to Y'$ de $\mathcal{C}$, il fait correspondre l'application $u \to fu$ [resp. $u \to uf$] de $\mathrm{Hom}(X , Y)$ dans $\mathrm{Hom}(X , Y')$ [resp. de $\mathrm{Hom}(Y' , X)$ dans $\mathrm{Hom}(Y , X)$].

On note $\mathrm{Hom}(. , .)$ le bifoncteur de $\mathcal{C}$ dans $\mathbf{Ens}$ qui, à chaque couple X , Y d'objets de $\mathcal{C}$ associe l'ensemble $\mathrm{Hom}(X , Y)$, et à chaque couple de morphismes $f : X' \to X$ et $g : Y \to Y'$ fait correspondre l'application $u \to y \circ u \circ f$ de $\mathrm{Hom}(X , Y)$ dans $\mathrm{Hom}(X' , Y')$.

2.3. Catégorie des foncteurs.

2.3.1. Définition. - Etant donnés deux foncteurs (covariants) F et G d'une catégorie $\mathcal{C}$ dans une catégorie $\mathcal{C}'$, un *morphisme fonctoriel* u *de* F *vers* G est constitué par la donnée, pour tout objet X de $\mathcal{C}$, d'un morphisme $u(X) : F(X) \to G(X)$ dans $\mathcal{C}'$, de telle sorte que la condition suivante soit réalisée :

Pour tout morphisme $f : X \to Y$ de $\mathcal{C}$, le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, dashed, "u(X)"] \arrow[d, "F(g)"'] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(Y) \arrow[r, dashed, "u(Y)"'] & G(Y) \end{tikzcd}$$

On définit de façon duale un morphisme fonctoriel entre deux foncteurs contravariants. Il suffit de renverser le sens des flèches verticales du diagramme précédent.

2.3.2. Définition. - Etant données deux catégories $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, on définit la catégorie $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ des foncteurs covariants de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}'$ comme étant celle dont les objets sont les foncteurs covariants de φ dans $\mathcal{C}'$ et dont les morphismes sont les morphismes fonctoriels. Si F est un foncteur : $\mathcal{C} \mapsto \mathcal{C}'$, le morphisme $1_F : F \to F$ est défini par $1_F(X) = 1_{F(X)}$ quel que soit $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. Les morphismes se composent de la manière suivante : si $\varphi : F \to G$ et $\psi : G \to H$ sont deux morphismes fonctoriels, le composé $\psi \circ \varphi$ est donné par la formule : $(\psi \circ \varphi)(X) = \psi(X)\ \varphi(X)$.

Alors, $\psi \circ \varphi$ est un morphisme fonctoriel, et les axiomes des catégories sont vérifiés.

La catégorie des foncteurs contravariants de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}'$ est la catégorie des foncteurs covariants de $\mathcal{C}^o$ dans $\mathcal{C}'$. On la note $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{C}^o, \mathcal{C}')$.

Deux morphismes F et G sont isomorphes s'il existe un morphisme fonctoriel inversible u de F vers G.

2.3.3. PROPOSITION. - Pour qu'un morphisme $u : F \to G$ soit inversible, il faut et il suffit que, pour tout objet X de $\mathcal{C}$, $u(X)$ soit un isomorphisme de $F(X)$ vers $G(X)$.

Démonstration. - La condition est évidemment nécessaire. Elle est suffisante. Soit, pour $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $v(X)$ l'inverse de $u(X)$. On vérifie sans peine que v est un morphisme fonctoriel de G vers F et que v est l'inverse de u dans la catégorie $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$.

3. Catégories des catégories.

3.1. Catégorie Cat [8].

3.1.1. Définition. - On note $\underline{\mathrm{Cat}}$ la catégorie dont les objets sont les $\mathcal{U}$-catégories (catégories relatives à un même univers $\mathcal{U}$), dont les morphismes sont les foncteurs covariants, et dont la loi de composition est évidente.

Si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont deux catégories, on note $\mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{Cat}}}(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ l'ensemble des foncteurs covariants de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}'$.

Deux catégories isomorphes en tant qu'objets de $\mathbf{Cat}$ sont dites *isomorphes*.

Remarquons que les $\mathcal{U}$-catégories forment un ensemble qui n'appartient pas à $\mathcal{U}$ mais qui appartient à tout univers $\mathcal{V}$ tel que $\mathcal{U}$ appartienne à $\mathcal{V}$. Comme les ensembles $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ appartiennent aussi à $\mathcal{V}$, la catégorie $\mathbf{Cat}$ est une $\mathcal{V}$-catégorie. Pour les mêmes raisons, la catégorie suivante est une $\mathcal{V}$-catégorie.

3.2. *Catégorie* $\mathbf{Cat}_{eq}$ [8].

3.2.1. *Définition*. – On note $\mathbf{Cat}_{eq}$ la catégorie dont les objets sont les $\mathcal{U}$-catégories, dont les morphismes d'une catégorie $\mathcal{C}$ dans une catégorie $\mathcal{C}'$ sont les classes d'équivalence de foncteurs covariants de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}'$, pour la relation d'isomorphisme dans $\mathbf{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$.

Cette relation, étant compatible avec la loi de composition des foncteurs covariants, on déduit de celle-ci, par passage au quotient, une loi de composition des morphismes de $\mathbf{Cat}_{eq}$. Les axiomes des catégories sont trivialement vérifiés.

Deux catégories isomorphes en tant qu'objets de $\mathbf{Cat}_{eq}$ sont dites *équivalentes*.

Donc, pour que deux catégories $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ soient équivalentes, il faut et il suffit qu'il existe un foncteur covariant $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ et un foncteur covariant $G : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ de telle sorte que $G \circ F$ soit isomorphe au foncteur identique $1_{\mathcal{C}}$ de $\mathcal{C}$ et que $F \circ G$ soit isomorphe au foncteur identique $1_{\mathcal{C}'}$ de $\mathcal{C}'$.

3.2.2. PROPOSITION. – *Pour que deux catégories* $\mathcal{C}$ *et* $\mathcal{C}'$ *soient équivalentes, il faut et il suffit qu'il existe un foncteur covariant* F *de* $\mathcal{C}$ *dans* $\mathcal{C}'$ *pleinement fidèle et génériquement surjectif*.

Démonstration. – Si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont équivalentes, soient $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ et $G : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ deux foncteurs tels que $F \circ G$ soit isomorphe à $1_{\mathcal{C}'}$ et $G \circ F$ soit isomorphe à $1_{\mathcal{C}}$. Puisque $F \circ G$ est isomorphe au foncteur identique de $\mathcal{C}'$, le foncteur F est génériquement surjectif. Soient φ un isomorphisme de $1_{\mathcal{C}}$ vers $G \circ F$, et ψ un isomorphisme de $1_{\mathcal{C}'}$ vers $F \circ G$. Si, pour deux morphismes $f : A \to B$ et $g : A \to B$ de $\mathcal{C}$, on a $F(f) = F(g)$, alors

$$G \circ F(f) = G \circ F(g) \quad .$$

Puisque les diagrammes suivants sont commutatifs :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi(A)"] \arrow[d, "f"'] & G \circ F(A) \arrow[d, "G \circ F(f)"] \\ B \arrow[r, "\varphi(B)"'] & G \circ F(B) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi(A)"] \arrow[d, "g"'] & G \circ F(A) \arrow[d, "G \circ F(g)"] \\ B \arrow[r, "\varphi(B)"'] & G \circ F(B) \end{tikzcd} \quad ,$$

on a $\varphi(B)\, f = \varphi(B)\, g$. D'où $f = g$, et F est fidèle.

Soit $g : A' \to B'$ un morphisme de $\mathcal{C}'$. Posons

$$h = \psi(B')^{-1}\, g\, \psi(A') : A' \to B' .$$

Alors, puisque le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "\psi(A')"] \arrow[d, "h"'] & F \circ G(A') \arrow[d, "F \circ G(h)"] \\ B' \arrow[r, "\psi(B')"'] & F \circ G(B') \end{tikzcd} ,$$

on a $(F \circ G)(h) = \psi(B')\, h\, \psi(A')^{-1} = g$, et F est pleinement fidèle.

Inversement, soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un foncteur covariant pleinement fidèle, génériquement surjectif. Si $X' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}')$, on choisit un élément X , et un seul, de $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ tel que $F(X)$ soit isomorphe à X' . Posons $G(X') = X$. D'autre part, soit $u(X)$ un isomorphisme de $F(X)$ vers X' . Alors, si $f' : X' \to Y'$ est un morphisme de $\mathcal{C}'$, $u(Y)^{-1} f'\, u(X) : F(X) \to F(Y)$ est un morphisme de $\mathcal{C}'$. Puisque F est pleinement fidèle, il existe un morphisme $g : X \to Y$, et un seul, de $\mathcal{C}$ tel que $F(g) = u(Y)^{-1} f'\, u(X)$. Posons $G(f') = g$. On vérifie aisément que G est un foncteur covariant de $\mathcal{C}'$ dans $\mathcal{C}$, que $F \circ G$ est isomorphe à $1_{\mathcal{C}'}$ et que $G \circ F$ est isomorphe à $1_{\mathcal{C}}$.

4. Foncteurs représentables et foncteurs adjoints.

4.1. Objet initial. Objet final. Objet nul.

4.1.1. Définition. - Un objet 0_1 d'une catégorie $\mathcal{C}$ est dit initial si, pour tout objet A de $\mathcal{C}$, il existe un morphisme et un seul $0_1 \to A$. Si 0_1 est initial, le seul morphisme $0_1 \to 0_1$ est l'identité, et deux objets initiaux de $\mathcal{C}$ sont équivalents.

Dualement, un objet 0_2 de $\mathcal{C}$ est dit final si, pour chaque objet A de $\mathcal{C}$, il existe un morphisme et un seul : $A \to 0_2$.

Un objet 0 de $\mathcal{C}$ est dit objet nul s'il est à la fois initial et final. On identifiera, s'il en existe, les objets nuls à un seul et même objet de $\mathcal{C}$.

4.1.2. Exemples.

1° Dans la catégorie Ens , l'ensemble vide est initial ; chaque ensemble à un élément est final.

2° Dans la catégorie $\underset{\sim}{Gr}$, le groupe à un élément est objet nul.

4.2. Foncteurs représentables.

4.2.1. Définition. - Un foncteur F d'une catégorie $\mathcal{C}$ dans la catégorie $\underset{\sim}{Ens}$ est dit représentable s'il existe un objet X de $\mathcal{C}$ tel que F soit isomorphe au foncteur $\mathrm{Hom}(X , .)$. Un tel objet X est appelé un représentant de F . Si Φ est un isomorphisme de F vers $\mathrm{Hom}(X , .)$, le couple (X , Φ) est appelé une représentation de F .

4.2.2. Exemple. - Soit $N : \underset{\sim}{Gr} \to \underset{\sim}{Ens}$ le foncteur "ensemble sous-jacent". Le foncteur N est représentable, le groupe des entiers $\underset{\sim}{Z}$ en est un représentant. Si G est un groupe, l'application $\psi(G)$, qui à $f \in \mathrm{Hom}_{\underset{\sim}{Gr}}(\underset{\sim}{Z} , G)$ fait correspondre $f(1) \in N(G)$, est bijective, et ψ est un isomorphisme fonctoriel de $\mathrm{Hom}_{\underset{\sim}{Gr}}(\underset{\sim}{Z} , .)$ vers N .

4.2.3. Définition. - Soient $\mathcal{C}$ une catégorie, et $F : \mathcal{C} \to \underset{\sim}{Ens}$ un foncteur. On appelle catégorie des objets F-pointés de $\mathcal{C}$, la catégorie $\mathcal{C}_{F*}$ dont les objets sont les couples (A , x) où $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ et où $x \in F(A)$. Un morphisme $f : (A , x) \to (B , y)$ de $\mathcal{C}_{F*}$ est un morphisme $f : A \to B$ de $\mathcal{C}$ tel que $F(f)x = y$. On appelle point universel du foncteur F , un objet (X , u) de la catégorie $\mathcal{C}_{F*}$ qui est initial dans cette catégorie.

4.2.4. THÉORÈME. - Soit $F : \mathcal{C} \to \underset{\sim}{Ens}$ un foncteur. Il existe une correspondance bijective entre les représentations (X , Φ) et les points universels (X , u) de F donnés par les formules :

$$u = (\Phi X)(1_X) \ ; \qquad (\Phi A)h = (Fh)u \quad \text{pour tout} \quad h : X \to A \ .$$

Preuve. - Soit (X , Φ) une représentation de F . Puisque Φ est un isomorphisme fonctoriel, le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(X , X) \arrow[r, "\Phi(X)"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}(X , .)h"'] & F(X) \arrow[d, "F(h)"] \\
\mathrm{Hom}(X , A) \arrow[r, "\Phi(A)"'] & F(A)
\end{tikzcd}$$

est commutatif pour chaque $h : X \to A$. Posons $u = (\Phi X)(1_X)$. D'après la commutativité du diagramme précédent, on a :

$$(\Phi A)(h) = (Fh)u \ .$$

Puisque $\Phi(A)$ est inversible, tout élément de $F(A)$ s'écrit, d'une façon unique, sous la forme $F(h)u$; donc, (X , u) est un point universel pour F.

Inversement, soit (X , u) un point universel pour F. Définissons Φ par la formule :

$$(\Phi A)h = (Fh)u \quad .$$

Puisque (X , u) est un point universel, $\Phi(A) : \mathrm{Hom}(X , A) \to F(A)$ est une bijection. Par définition, Φ est un morphisme fonctoriel. Donc, (X , Φ) est une représentation de F.

Puisque deux objets initiaux d'une catégorie sont équivalents, on a :

4.2.5. COROLLAIRE. - Deux représentants d'un foncteur $F : \mathcal{C} \mapsto \underline{\mathrm{Ens}}$ sont équivalents.

4.3. Foncteurs adjoints.

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux catégories, et $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $S : \mathcal{B} \mapsto \mathcal{A}$, deux foncteurs.

4.3.1. Définition. - On dit que S est un foncteur adjoint à T s'il existe un isomorphisme fonctoriel du foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(. , S.)$ vers le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(T. , .)$, où $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(. , S.)$ et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(T. , .)$ sont les foncteurs de $\mathcal{A}^{o} \times \mathcal{B}$ dans $\underline{\mathrm{Ens}}$ définis de la manière suivante :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(. , S.) : (A , B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A , SB)$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(T. , .) : (A , B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(TA , B) \quad .$$

4.3.2. Exemple. - Soit Y un objet fixé de la catégorie $\underline{\mathrm{Ens}}$, et soient S et T les foncteurs : $\underline{\mathrm{Ens}} \to \underline{\mathrm{Ens}}$ définis par

$$S(X) = \mathrm{Hom}(Y , X)$$

$$T(Z) = Z \times Y \qquad \text{(produit cartésien)} .$$

Alors pour chaque couple d'ensembles (Z , X), on définit un isomorphisme : $\psi(Z , X) : \mathrm{Hom}(T(Z) , X) \to \mathrm{Hom}(Z , S(X))$ en associant à une fonction $h : Z \times Y \to X$, la fonction $\psi(Z , X)\, h$ définie dans Z et dont les valeurs sont des fonctions définies dans X. Alors ψ est un isomorphisme fonctoriel, et S est adjoint à T.

En conservant les notations précédentes, on a la proposition suivante :

4.3.3. PROPOSITION. - *Si* T *est un foncteur d'une catégorie* $\mathcal{A}$ *dans une catégorie* $\mathcal{B}$, *les conditions suivantes sont équivalentes* :

(i) *Il existe un foncteur de* B *dans* $\mathcal{A}$, *adjoint à* T ;

(ii) *Pour tout objet* B *de* $\mathcal{B}$, *le foncteur* :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(T.\ ,\ B)\ :\ A \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(TA\ ,\ B)$$

de $\mathcal{A}$ *dans* Ens *est représentable*.

Démonstration. - (i) $\Longrightarrow$ (ii). Soient S un foncteur adjoint à T , et B un objet de $\mathcal{B}$. Les foncteurs $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(T.\ ,\ B)$ et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(.\ ,\ SB)$ sont, alors, isomorphes. Donc, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(T.\ ,\ B)$ est représentable.

(ii) $\Longrightarrow$ (i). On choisit, pour chaque objet B de $\mathcal{B}$, un représentant, que l'on note SB , du foncteur :

$$A \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(TA\ ,\ B)\quad ,$$

et un isomorphisme fonctoriel :

$$\varphi(B)\ :\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(.\ ,\ SB) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(T.\ ,\ B)\quad .$$

Si $f\ :\ B \to B'$ est un morphisme de la catégorie $\mathcal{B}$, il existe alors un et un seul morphisme $Sf\ :\ SB \to SB'$ rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(.\ ,\ SB) \arrow[r, "\varphi(B)"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(.\ ,\ Sf)"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(T.\ ,\ B) \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(T.\ ,\ f)"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(.\ ,\ SB') \arrow[r, "\varphi(B')"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(T.\ ,\ B')
\end{tikzcd}\quad .$$

Le foncteur $S\ :\ \mathcal{B} \mapsto A$ ainsi défini est un foncteur adjoint à T . En effet, il résulte de l'existence de l'isomorphisme fonctoriel $\varphi(B)$ que, pour tout objet $(A\ ,\ B)$ de la catégorie $\mathcal{A}^{o}\ \Pi\ \mathcal{B}$, les ensembles $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A\ ,\ SB)$ et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(TA\ ,\ B)$ sont isomorphes, et, pour deux morphismes $f : B \to B'$, dans $\mathcal{B}$, et $g : A' \to A$, dans $\mathcal{A}$, les diagrammes suivants sont commutatifs :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A\ ,\ SB) \arrow[r, "\varphi(B).A"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A\ ,\ Sf)"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(TA\ ,\ B) \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(TA\ ,\ f)"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A\ ,\ SB') \arrow[r, "\varphi(B').A"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(g\ ,\ SB')"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(TA\ ,\ B') \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(Tg\ ,\ B')"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A'\ ,\ SB') \arrow[r, "\varphi(B').A'"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(TA'\ ,\ B')
\end{tikzcd}\quad .$$

4.3.4. COROLLAIRE.

1° Si S et S' sont deux foncteurs adjoints à T, il existe un isomorphisme fonctoriel de S vers S'.

2° Si un foncteur S est adjoint à deux foncteurs T et T', il existe un isomorphisme fonctoriel de T vers T'.

Démonstration. - La première partie résulte de la proposition 4.3.3 et de la construction d'un foncteur adjoint à T. La seconde se déduit de la première ; en effet, si $S : \mathcal{B} \mapsto \mathcal{A}$ est adjoint à $T : \mathcal{A} \mapsto \mathcal{B}$, alors le foncteur $T^o : \mathcal{A}^o \mapsto \mathcal{B}^o$, déduit de T, est adjoint à $S^o : \mathcal{B}^o \mapsto \mathcal{A}^o$.

4.3.5. Exemple. - Soit S le foncteur canonique de $\underset{\sim}{Ab}$ dans $\underset{\sim}{Gr}$. Soit T le foncteur : $\underset{\sim}{Gr} \mapsto \underset{\sim}{Ab}$ qui à chaque groupe G fait correspondre le groupe abélien G/G', où G' est le groupe des commutateurs de G. Puisque chaque homomorphisme de G dans un groupe abélien A se factorise avec unicité à travers l'homomorphisme canonique $G \to G/G'$, les ensembles : $\mathrm{Hom}_{\underset{\sim}{Ab}}(TG , A)$ et $\mathrm{Hom}_{\underset{\sim}{Gr}}(G , SA)$ sont isomorphes, et S est un foncteur adjoint à T.

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux catégories, $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ et $S : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ deux foncteurs. Soit :

$$\varphi : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(. , S.) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(T. , .)$$

un morphisme fonctoriel que l'on ne suppose pas, pour l'instant, être un isomorphisme. Alors, pour tout objet B de $\mathcal{B}$,

$$\Phi(B) = \varphi(SB , B)(1_{SB}) : TSB \to B$$

est un morphisme de $\mathcal{B}$. Symétriquement, si

$$\psi : \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(T. , .) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(. , S.)$$

est un morphisme fonctoriel, pour tout objet A de $\mathcal{A}$,

$$\Psi(A) = \psi(A , TA)(1_{TA}) : A \to STA$$

est un morphisme de $\mathcal{A}$.

On a le lemme suivant et son dual.

4.3.6. LEMME. - Les morphismes $\Phi(B)$ définissent un morphisme fonctoriel Φ du foncteur TS vers le foncteur identique de $\mathcal{B}$. L'application $\varphi \to \Phi$, de l'ensemble des morphismes fonctoriels de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(. , S.)$ vers $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(T. , .)$, dans l'ensemble des morphismes fonctoriels de TS vers $1_{\mathcal{B}}$, est bijective.

4.3.7. LEMME. - Les morphismes $\Psi(A)$ définissent un morphisme fonctoriel Ψ du foncteur identique de $\mathfrak{A}$ vers le foncteur ST . L'application $\psi \to \Psi$, de l'ensemble des morphismes fonctoriels de $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{B}}(T. , .)$ vers $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(. , S.)$, dans l'ensemble des morphismes fonctoriels de $1_{\mathfrak{A}}$ vers ST , est bijective.

Démonstration du lemme 4.3.6. - Soit $f : B \to B'$ un morphisme de la catégorie $\mathfrak{B}$. Alors, les diagrammes suivants, I et II, sont commutatifs.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(SB , SB) \arrow[r, "\varphi(SB , B)"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(SB , Sf)"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{I}"] & \mathrm{Hom}_{\mathfrak{B}}(TSB , B) \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathfrak{B}}(TSB , f)"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(SB , SB') \arrow[r, "\varphi(SB , B')"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{II}"] & \mathrm{Hom}_{\mathfrak{B}}(TSB , B') \\
\mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(SB' , SB') \arrow[r, "\varphi(SB' , B')"'] \arrow[u, "\mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(Sf , SB')"] & \mathrm{Hom}_{\mathfrak{B}}(TSB' , B') \arrow[u, "\mathrm{Hom}_{\mathfrak{B}}(TSf , B')"']
\end{tikzcd} \quad .$$

La commutativité du diagramme I entraîne

$$f \circ \varphi(SB , B)(1_{SB}) = \varphi(SB , B')(Sf) \quad .$$

Comme on a $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(Sf , SB')(1_{SB'}) = Sf$, la commutativité du diagramme II entraîne

$$f \circ \varphi(SB , B)(1_{SB}) = \varphi(SB' , B')(1_{SB'}) \circ TSf \quad ,$$

c'est-à-dire que

$$\Phi(B') \circ TSf = f \circ \Phi(B) \quad ,$$

et le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
TSB \arrow[r, "\Phi(B)"] \arrow[d, "TSf"'] & B \arrow[d, "f"] \\
TSB' \arrow[r, "\Phi(B')"'] & B'
\end{tikzcd} \quad .$$

Par conséquent, les $\Phi(B)$ définissent un morphisme fonctoriel $\Phi : TS \mapsto 1_{\mathfrak{B}}$, et l'application $\varphi \to \Phi$ est injective. Réciproquement, soit $\Phi : TS \mapsto 1_{\mathfrak{B}}$ un morphisme fonctoriel. Si $f : A \to SB$ est un morphisme de $\mathfrak{A}$, soit g le composé des morphismes suivants de $\mathfrak{B}$:

$$TA \xrightarrow{Tf} TSB \xrightarrow{\Phi(B)} B \quad .$$

On pose $g = \varphi(f)$. On définit ainsi, pour tout élément (A , B) de $\mathfrak{A}^{o} \sqcap \mathfrak{B}$, une application

$$\varphi(A , B) : \mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(A , SB) \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{B}}(TA , B) \quad .$$

Pour prouver que $\varphi : \mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(\cdot\,,\, S\cdot) \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{B}}(T\cdot\,,\,\cdot)$ est un morphisme fonctoriel, il suffit de vérifier que, si $f : A' \to A$ et $h : B \to B'$, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(A\,,\,SB) \arrow[r, "\varphi(A\,,\,B)"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(f\,,\,Sh)"'] & \mathrm{Hom}_{\mathfrak{B}}(TA\,,\,B) \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathfrak{B}}(Tf\,,\,h)"] \\ \mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(A'\,,\,SB') \arrow[r, "\varphi(A'\,,\,B')"'] & \mathrm{Hom}_{\mathfrak{B}}(TA'\,,\,B') \end{tikzcd} .$$

Si $g \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(A\,,\,SB)$, on a

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{B}}(Tf\,,\,h)\,\varphi(A\,,\,B)(g) = h \circ \Phi(B) \circ Tg \circ Tf$$

et

$$\varphi(A'\,,\,B')\,\mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(f\,,\,Sh)(g) = \Phi(B') \circ TSh \circ Tg \circ Tf \quad .$$

De la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} TSB \arrow[r, "\Phi(B)"] \arrow[d, "TSh"'] & B \arrow[d, "h"] \\ TSB' \arrow[r, "\Phi(B')"'] & B' \end{tikzcd} ,$$

résulte alors que

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{B}}(Tf\,,\,h)\,\varphi(A\,,\,B)g = \varphi(A'\,,\,B')\,\mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(f\,,\,Sh)g \quad ,$$

et l'application $\varphi \to \Phi$ est bijective.

Les notations étant les mêmes que précédemment, les propositions suivantes, duales l'une de l'autre, donnent une condition nécessaire et suffisante, pour que le foncteur S soit adjoint au foncteur T.

4.3.8. PROPOSITION. - Pour que le morphisme fonctoriel composé $\psi \circ \varphi$ soit le morphisme identique du foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(\cdot\,,\,S\cdot)$, il faut et il suffit que le morphisme composé

$$S \xrightarrow{\Psi S} STS \xrightarrow{S\Phi} S$$

soit le morphisme identique du foncteur S.

4.3.9. PROPOSITION. - Pour que le morphisme fonctoriel composé $\varphi \circ \psi$ soit le morphisme identique du foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{B}}(T\cdot\,,\,\cdot)$, il faut et il suffit que le morphisme composé $T \xrightarrow{T\Psi} TST \xrightarrow{\Phi T} T$ soit le morphisme identique du foncteur T.

Démonstration de la proposition 4.3.8. - Soit $f : A \to SB$ un morphisme de $\mathcal{A}$. D'après le lemme 4.3.6, $\varphi(f)$ est le morphisme de $\mathcal{B}$, composé des morphismes

$$TA \xrightarrow{Tf} TSB \xrightarrow{\Phi B} B .$$

D'après le lemme 4.3.6, $\psi\varphi(f)$ est le morphisme de $\mathcal{A}$ composé des morphismes

$$A \xrightarrow{\Psi(A)} STA \xrightarrow{S\varphi(f)} SB ,$$

c'est-à-dire que $\psi \circ \varphi(f)$ est le composé de

(*) $$A \xrightarrow{\Psi(A)} STA \xrightarrow{STf} STSB \xrightarrow{S\Phi B} SB .$$

Si l'on a $\psi\varphi(f) = f$ pour tout morphisme f de $\mathcal{A}$, alors, en particulier, $\psi\varphi(1_{SB}) = 1_{SB}$. D'où, le composé

$$SB \xrightarrow{\Psi(SB)} STSB \xrightarrow{S\Phi B} SB$$

est l'identité de SB, et $S\Phi \circ \psi S = 1_S$. Inversement, si $S\Phi \circ \psi S = 1_S$, on a, en utilisant la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\Psi(A)"] \arrow[d, "f"'] & STA \arrow[d, "STf"] \\ SB \arrow[r, "\Psi SB"'] & STSB \end{tikzcd} ,$$

l'égalité $f = S\Phi B \circ STf \circ \psi(A)$. Donc, le composé des morphismes de la suite (*) est l'identité.

5. Limites projectives et limites inductives dans les catégories.

5.1. Définitions des limites projectives et injectives.

Soient I et $\mathcal{C}$ deux $\mathcal{U}$-catégories, où $\mathcal{U}$ est un univers, et F un foncteur de I dans $\mathcal{C}$.

5.1.1. Définition. - Soit $x \in Ob(\mathcal{C})$. On appelle système projectif de source x, la donnée, pour chaque $i \in Ob(I)$, d'une flèche $\alpha_i : x \to F(i)$, de telle sorte que si $\omega : i \to j$ est un morphisme de I, le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[dl, "\alpha_i"'] \arrow[dr, "\alpha_j"] & \\ F(i) \arrow[rr, "F(\omega)"'] & & F(j) \end{tikzcd} .$$

Si l'on désigne par $\tilde{x}$ le foncteur constant $I \to \mathcal{C}$, défini par x, l'ensemble $(\alpha_i)_{i\in Ob(I)}$ définit un morphisme fonctoriel de $\tilde{x}$ vers F.

5.1.2. *Définition*. - On dit que le foncteur $F : I \to \mathcal{C}$ admet une limite projective si les conditions suivantes sont réalisées :

(a) Il existe $x_o \in Ob(\mathcal{C})$ et un système projectif de source x_o ; soit (ξ_i) un tel système.

(b) Pour tout système projectif de source $x \in Ob(\mathcal{C})$, il existe un morphisme unique $\alpha : x \to x_o$ tel que, quel que soit $i \in Ob(I)$, le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\alpha_i"'] & x_o \arrow[dl, "\xi_i"] \\ F(i) & \end{tikzcd} .$$

$(x_o , (\xi_i)_{i\in Ob(I)})$ est appelé *une limite projective du foncteur* F, et est notée $\varprojlim F$.

Cette définition équivaut à dire que F admet une limite projective si le foncteur $x \mapsto Hom(\tilde{x} , F)$ de $\mathcal{C}$ dans *Ens* est représentable, et un représentant de ce dernier foncteur est une limite projective de F. Par suite, deux limites projectives de F sont isomorphes.

La notion de *limite inductive* d'un foncteur F de I dans $\mathcal{C}$ est duale de la précédente. Il suffit donc de renverser les flèches dans les précédentes définitions.

5.2. *Produits et sommes directs*.

5.2.1. *Définition*. - Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments d'une catégorie $\mathcal{C}$ indexée par un ensemble I. Considérons I comme une catégorie *discrète* (i. e. une catégorie dans laquelle les seuls morphismes sont les morphismes identiques). Si elle existe, la limite projective du foncteur $F : I \to \mathcal{C}$, défini par $F(i) = X_i$, est appelée le *produit direct* des objets X_i, et est notée $\prod_{i\in I} X_i$.
Si elle existe, la limite inductive du foncteur F est appelée la *somme directe* des objets X_i, et est notée $\bigoplus_{i\in I} X_i$.

On dit qu'une catégorie $\mathcal{C}$ est une *catégorie avec produits* (resp. *sommes*) si le produit (resp. la somme) de deux objets de $\mathcal{C}$ existe toujours. On dit que

$\mathcal{C}$ est *une catégorie avec produits infinis* (resp. *sommes infinies*) si le produit (resp. la somme) d'une famille non vide d'objets de $\mathcal{C}$, indexée par un ensemble de l'univers relatif à $\mathcal{C}$, existe toujours.

5.3. Conditions d'existence des limites.

5.3.1. *Définition.* - Soit I la catégorie formée de deux objets i et j et de deux morphismes non identiques $\alpha : i \to j$, $\beta : i \to j$. Soit F un foncteur de I dans $\mathcal{C}$. Posons

$$F(i) = X \, , \quad F(j) = Y \, , \quad F(\alpha) = f \, , \quad F(\beta) = g \quad .$$

Si elle existe, la limite projective du foncteur F s'appelle le *noyau de la double flèche* (f , g) ; si elle existe, la limite inductive du foncteur F s'appelle le *conoyau de la double flèche* (f , g) .

Par conséquent, le noyau de (f , g) est une flèche $\omega : X_o \to X$ telle que $f \circ \omega = g \circ \omega$ et telle que, pour toute flèche $k : Z \to X$ vérifiant $fk = gk$, il existe une flèche unique $h : Z \to X_o$ telle que $k = \omega \circ h$:

$$\begin{tikzcd}
X_o \arrow[r, "\omega"] & X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \\
Z \arrow[u, "h"] \arrow[ur, "k"'] & &
\end{tikzcd} \quad .$$

Le conoyau de (f , g) est une flèche $\lambda : Y \to Y_o$ telle que $\lambda f = \lambda g$ et telle que, pour toute flèche $k : Y \to Z$ vérifiant $kf = kg$, il existe une flèche unique $h : Y_o \to Z$ telle que $h\lambda = k$:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \arrow[r, "\lambda"] \arrow[dr, "k"'] & Y_o \arrow[d, "h"] \\
& & Z
\end{tikzcd} \quad .$$

Par exemple, dans la catégorie des ensembles, le noyau d'une double flèche $X \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Y$ est l'injection canonique $\omega : X_o \to X$ de la partie X_o de X formée des éléments $x \in X$ tels que $f(x) = g(x)$.

5.3.2. THÉORÈME. - *Soit* $\mathcal{C}$ *une catégorie avec produits infinis et noyaux de double flèche ; alors, tout foncteur admet une limite projective.*

<u>Démonstration</u>. - Soient I une catégorie, et F un foncteur de I dans $\mathcal{C}$. Considérons les objets

$$P = \prod_{i \in Ob(I)} F(i) \qquad \text{et} \qquad Q = \prod_{\omega \in Fl(I)} F(\underset{\sim}{B}\omega)$$

de $\mathcal{C}$ (Rappelons que l'on désigne par $\underset{\sim}{B}(\omega)$ et $\underset{\sim}{S}(\omega)$ respectivement le but et la source d'une flèche ω de I). Nous désignerons par α_i la projection canonique de P sur le facteur $F(i)$. Nous allons définir deux flèches de P vers Q, et nous montrerons que le noyau de cette double flèche est la limite projective de F. Définir une flèche de P vers Q revient à définir une flèche de P vers chacun des facteurs $F(\underset{\sim}{B}\omega)$ de Q. Soit donc f la flèche de P vers Q qui provient des flèches

$$\alpha_{\underset{\sim}{B}(\omega)} : P \to F(\underset{\sim}{B}(\omega)) \quad ;$$

soit g la flèche de P vers Q qui provient des flèches

$$F(\omega) \circ \alpha_{\underset{\sim}{S}(\omega)} : P \to F(\underset{\sim}{B}(\omega)) \quad .$$

Soit $\alpha : N \to P$ le noyau de (f , g). Alors, N est la source du système projectif $(\alpha_i \circ \alpha)_{i \in Ob(I)}$, puisque tous les diagrammes suivants sont commutatifs :

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\alpha_i \circ \alpha"'] & P \arrow[d, "\alpha_i"'] \arrow[dr, "\alpha_j"] & \\
& F(i) \arrow[r, "F(\omega)"'] & F(j)
\end{tikzcd} \quad .$$

S'il existe un système projectif $(\xi_i)_{i \in Ob(I)}$ de source $X \in Ob(\mathcal{C})$, alors, par définition de P, il existe une flèche unique $k : X \to P$ telle que $\alpha_i k = \xi_i$ pour tout $i \in Ob(I)$. Donc, $fk = gk$. Et, par définition de N, il existe une flèche unique $\alpha_o : X \to N$ telle que $\alpha . \alpha_o = k$. D'où $(\alpha_i \alpha)\alpha_o = \xi_i$ pour tout $i \in Ob(I)$.

On établit dualement le théorème suivant :

5.3.3. THÉORÈME. - <u>Soit $\mathcal{C}$ une catégorie avec sommes directes infinies et conoyaux de doubles flèches ; alors tout foncteur admet une limite inductive</u>.

5.4. <u>Limites dans la catégorie des ensembles</u>.

Nous allons montrer que les limites projectives et inductives existent dans les catégories d'ensembles. Pour les limites projectives, nous ferons un calcul direct. Pour les limites inductives, nous utiliserons le théorème 5.3.3.

Soient F un foncteur de I dans $\underset{\sim}{\mathrm{Ens}}$, et $P = \prod\limits_{i\in \mathrm{Ob}(I)}$. On notera π_i les projections canoniques. Soit L la partie de P formée des systèmes $(u_i)_{i\in\mathrm{Ob}(I)}$ tels que, pour toute flèche $\omega : i \to j$, on ait $u_j = F(\omega)\, u_i$. Par construction, $(L\ ,\ (\pi_i)_{i\in\mathrm{Ob}(I)})$ est un système projectif de source L . Soit : $(X\ ,\ (\xi_i)_{i\in\mathrm{Ob}(I)})$ un second système projectif de source $X \in \mathrm{Ob}(\underset{\sim}{\mathrm{Ens}})$. Si à chaque $x \in X$ on fait correspondre l'élément $\check{x} \in L$, défini par

$$\check{x} = \{\xi_i(x)\}_{i\in\mathrm{Ob}(I)} \ ,$$

il est clair que l'on détermine un morphisme $h : X \to L$ tel que $\pi_i\, h = \xi_i$ pour tout $i \in \mathrm{Ob}(I)$, et qui est unique. Par suite, $(L\ ,\ (\pi_i)_{i\in\mathrm{Ob}(I)})$ est une limite projective de F .

La catégorie $\underset{\sim}{\mathrm{Ens}}$ étant une catégorie avec sommes infinies, pour prouver l'existence de $\varinjlim F$, il suffit de prouver l'existence de conoyaux de doubles flèches. Soit $A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$ une double flèche. Dans la réunion ensembliste $S = A \,\Sigma\, B$, considérons la relation binaire $\mathcal{R}$, définie par :

$x\,\mathcal{R}\,y\ ,\quad x\ ,\ y \in S \rightleftarrows$ l'une des conditions (I) , (II) , (III) suivantes est réalisée :

(I) x et $y \in A$ ou x et $y \in B$, et $x = y$;

(II) $x \in A$, $y \in B$, et $y = f(x)$ ou $y = g(x)$;

(III) $x \in B$, $y \in A$, et $x = f(y)$ ou $y = g(x)$.

La relation $\mathcal{R}$ est symétrique et réflexive. Prenons sa fermeture transitive $\overline{\mathcal{R}}$. Alors, $\overline{\mathcal{R}}$ est une relation d'équivalence dans S . Rappelons que $\overline{\mathcal{R}}$ est définie par :

$x\,\overline{\mathcal{R}}\,y \rightleftarrows$ il existe un entier $n \geqslant 0$ et des éléments $x_0\ ,\ x_1\ ,\ \dots\ ,\ x_n$ de S tels que $x_0 = x$, $x_n = y$, et $x_k\,\mathcal{R}\,x_{k+1}$ pour $k = 0\ ,\ 1\ ,\ \dots\ ,\ n+1$.

Alors, l'ensemble $S/\overline{\mathcal{R}}$ est le conoyau de la double flèche ; l'application : $B \to S/\overline{\mathcal{R}}$ étant obtenue en composant l'injection canonique $B \to S$ et l'épimorphisme $S \to S/\overline{\mathcal{R}}$.

5.5. Sommes amalgamées et produits fibrés.

5.5.1. Définition. - Soit I la catégorie à trois objets i , j et k , dont les morphismes non identiques sont les suivants :

$$\begin{tikzcd} i \arrow[dr, "\alpha"] & \\ & j \\ k \arrow[ur, "\beta"'] & \end{tikzcd} \ .$$

Soit F un foncteur de I dans $\mathcal{C}$. Posons

$$X = F(j) \ , \quad Y = F(i) \ , \quad Z = F(k) \ , \quad f = F(\alpha) \ , \quad \text{et} \quad g = F(\beta) \quad .$$

Si elle existe, la limite projective de F est appelée le produit fibré de Y et de Z au-dessus de X , et est notée $Y \times_X Z$.

Par exemple, dans la catégorie des ensembles, le produit fibré $Y \times_X Z$ est la partie du produit cartésien $Y \times Z$ formée des couples (y , z) tels que $f(y) = g(z)$.

5.5.2. Définition. - Soit I la catégorie suivante :

$$\begin{tikzcd} & j \\ i \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dr, "\beta"'] & \\ & k \end{tikzcd} \quad .$$

Soit F un foncteur de I dans une catégorie $\mathcal{C}$. Posons

$$X = F(i) \ , \quad Y = F(j) \ , \quad Z = F(k) \ , \quad f = F(\alpha) \ , \quad \text{et} \quad g = F(\beta) \quad .$$

Si elle existe, la limite inductive P du foncteur F s'appelle la somme amalgamée (ou fibrée) de Y et Z au-dessous de X .

Par exemple, dans la catégorie des ensembles, la somme amalgamée de Y et Z au-dessous de X s'obtient en identifiant dans la réunion ensembliste de Y et Z , pour chaque élément $x \in X$, les éléments $f(x)$ et $g(x)$.

6. Catégories additives.

6.1. Définition et propriétés élémentaires des catégories pré-additives.

6.1.1. Définition. - Une catégorie $\mathcal{C}$ est dite pré-additive si elle vérifie les trois axiomes suivants :

(Ad_1) Quels que soient A et $B \in Ob(\mathcal{C})$, l'ensemble $Hom_{\mathcal{C}}(A , B)$ est muni d'une structure de groupe abélien ;

(Ad_2) La catégorie $\mathcal{C}$ a un objet nul ;

(Ad_3) Les applications canoniques $Hom_{\mathcal{C}}(A , B) \times Hom_{\mathcal{C}}(B , C) \to Hom_{\mathcal{C}}(A , C)$ sont bilinéaires ; i. e. on a :

$$f(g_1 + g_2) = fg_1 + fg_2$$

$$(g_1 + g_2)f = g_1 f + g_2 f \quad .$$

La catégorie duale d'une catégorie pré-additive est pré-additive. Si $\mathcal{C}$ est une catégorie pré-additive, l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A , A)$ est muni, pour tout objet A de $\mathcal{C}$, d'une structure d'anneau unitaire.

6.1.2. PROPOSITION. - Soit $f : A \to B$ un morphisme d'une catégorie pré-additive $\mathcal{C}$. Alors, f est un monomorphisme (resp. un épimorphisme) si et seulement si l'application $\mathrm{Hom}(X , A) \to \mathrm{Hom}(X , B)$ (resp. $\mathrm{Hom}(B , X) \to \mathrm{Hom}(A , X)$), déduite de f , est injective (resp. surjective) pour tout $x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.

Démonstration. - Dire que f est un monomorphisme équivaut à dire que f est simplifiable à gauche ; i. e. que l'application $\xi \to f \circ \xi$ de $\mathrm{Hom}(X , A)$ dans $\mathrm{Hom}(X , B)$ est injective.

6.1.3. Définition. - Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux catégories pré-additives, et T un foncteur de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}'$. Alors T sera dit additif s'il induit un homomorphisme de groupe de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A , B)$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(TA , TB)$ quels que soient A et $B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.

L'image par T de l'objet nul de $\mathcal{C}$ est l'objet nul de $\mathcal{C}'$.

6.2. Produits et sommes directs finis dans les catégories pré-additives. Catégories additives.

6.2.1. PROPOSITION. - Soient, dans une catégorie pré-additive $\mathcal{C}$, les objets A , A_i $(i = 1 , 2 , \ldots , n)$ et les morphismes $\varphi_i : A \to A_i$ $(i = 1 , 2 , \ldots , n)$. Alors, A est produit direct des A_i par les flèches φ_i si et seulement s'il existe des morphismes $\psi_i : A_i \to A$ $(i = 1 , \ldots , n)$ tels que :

1° $\varphi_j \circ \psi_i = \delta_i^j \, 1_{A_i}$, $i , j = 1 , 2 , \ldots , n$ (δ_i^j étant le symbole de Kronecker) ;

2° $\sum_{i=1}^{n} \psi_i \circ \varphi_i = 1_A$.

Les morphismes ψ_i sont alors uniques et ce sont des monomorphismes.

Démonstration. - La démonstration n'utilise que la structure de monoïde abélien des ensembles $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X , Y)$. La condition est nécessaire ; en effet, les flèches :

$$1_{A_i} : A_i \to A_i$$

$$0 : A_i \to A_j , \quad j \neq i$$

forment un système projectif de source A_i . Il existe donc un morphisme $\psi_i : A_i \to A$ unique tel que :

$$\varphi_i \psi_i = 1_{A_i}$$

$$\varphi_j \psi_i = 0 , \quad \text{si} \quad j \neq i ,$$

et ceci pour $i = 1 , 2 , \dots , n$. Le morphisme ψ_i , étant inversible à gauche, est un monomorphisme. Soit $\xi = \sum_{i=1}^{n} \psi_i \varphi_i : A \to A$. Quel que soit $i = 1, 2, \dots, n$, on a

$$\varphi_i \xi = \sum_{j=1}^{n} \varphi_i \psi_j \varphi_j = \varphi_i = \varphi_i \circ 1_A .$$

D'où $\xi = 1_A$. La condition est suffisante ; en effet, si $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, et si $\xi_i : X \to A_i$, le morphisme $\xi = \sum_{i=1}^{n} \psi_i \xi_i$ est tel que

$$\varphi_i \xi = \varphi_i (\sum_{j=1}^{n} \psi_j \xi_j) = \xi_i .$$

Cette factorisation est unique, car les égalités $\varphi_i \xi = \xi_i$, $i = 1 , \dots , n$, entraînent

$$\sum_{i=1}^{n} \psi_i \circ \varphi_i \circ \xi = 1_A \xi = \sum_{i=1}^{n} \psi_i \xi_i .$$

Donc, $\xi = \sum_{i=1}^{n} \psi_i \xi_i$. Par suite, A est produit direct des A_i par les φ_i .

On démontre dualement la proposition suivante :

6.2.2. PROPOSITION. - Soient, dans une catégorie pré-additive $\mathcal{C}$, les objets A , A_i $(i = 1 , 2 , \dots , n)$ et les morphismes $\psi_i : A_i \to A$ $(i = 1 , 2, \dots, n)$. Alors, A est somme directe des A_i par les ψ_i s'il existe des morphismes $\varphi_i : A \to A_i$ $(i = 1 , 2 , \dots , n)$ tels que :

1° $\varphi_j \psi_i = \delta_i^j 1_{A_i}$, $i , j = 1 , 2 , \dots , n$.

2° $\sum_{i=1}^{n} \psi_i \varphi_i = 1_A$.

6.2.3. COROLLAIRE. - Soit $\mathcal{C}$ une catégorie pré-additive. Alors $\mathcal{C}$ est une catégorie avec produits directs finis si et seulement si c'est une catégorie avec sommes directes finies.

6.2.4. Définition. - Une catégorie $\mathcal{C}$ est dite additive si elle est pré-additive, et si c'est une catégorie avec produits directs finis.

Il résulte de la proposition 6.2.1, le résultat suivant :

6.2.5. PROPOSITION. - <u>Soient</u> $\mathcal{C}$ <u>et</u> $\mathcal{C}'$ <u>deux catégories pré-additives, et</u> $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ <u>un foncteur (covariant) additif. Si</u> $A \in Ob(\mathcal{C})$ <u>est produit direct des</u> A_i <u>par les morphismes</u> $\varphi_i : A \to A_i$, <u>alors</u> $T(A)$ <u>est produit direct des</u> $T(A_i)$ <u>par les morphismes</u> $T(\varphi_i)$.

On énoncera la proposition duale à l'aide de foncteur contravariant et de sommes directes finies.

6.3. Noyau, conoyau, décomposition d'un morphisme dans une catégorie pré-additive.

6.3.1. <u>Définition</u>. - Soit $f : A \to B$ un morphisme d'une catégorie pré-additive $\mathcal{C}$. On appellera <u>noyau de</u> f tout conoyau de la double flèche $A \overset{f}{\underset{0}{\rightrightarrows}} B$.

Donc, un noyau $\xi : A' \to A$ de f est un morphisme de $\mathcal{C}$ tel que $f\xi = 0$ et tel que toute flèche $\xi : X \to A$, vérifiant $f\xi = 0$, se factorise d'une seule façon à travers ξ . Cette factorisation étant unique, tout noyau est un monomorphisme. Si f admet un noyau, il existe un sous-objet de A (cf. 1.3.5), et un seul, qui soit noyau de f . On le note $\operatorname{Ker} f$.

6.3.2. PROPOSITION. - <u>Soit</u> $f : A \to B$ <u>un morphisme d'une catégorie pré-additive</u> $\mathcal{C}$. <u>Alors,</u> $i : C \to A$ <u>est noyau de</u> f <u>si et seulement si la suite de groupes abéliens</u>

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}(X , C) \xrightarrow{\bar{i}} \operatorname{Hom}(X , A) \xrightarrow{\bar{f}} \operatorname{Hom}(X , B) ,$$

<u>induite par</u> $C \xrightarrow{i} A \xrightarrow{f} B$ <u>est exacte pour tout objet</u> X <u>de</u> $\mathcal{C}$.

<u>Démonstration</u>. - L'exactitude en $\operatorname{Hom}(X , C)$ signifie que i est un monomorphisme, d'après 6.1.2. On a $\bar{f}\,\bar{i} = 0$ si et seulement si $fi = 0$. La suite est alors exacte en $\operatorname{Hom}(X , A)$ si et seulement si, quel que soit $g : X \to A$ tel que $fg = 0$, il existe $h : X \to C$ pour lequel $g = ih$; un tel morphisme h est unique puisque i est un monomorphisme.

Remarquons également :

6.3.3. PROPOSITION. - <u>Si un morphisme</u> i <u>est noyau d'un morphisme</u> $f : A \to B$ <u>dans une catégorie pré-additive</u> $\mathcal{C}$, <u>on a</u> : $\underset{\sim}{S}(i) = 0$ <u>si et seulement si</u> f <u>est un monomorphisme</u>.

Démonstration. - Dire que $\underset{\sim}{S}(i) = 0$ équivaut à dire que $\mathrm{Hom}(X, \underset{\sim}{S}(i)) = 0$ pour tout $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, ou encore, d'après 6.3.2, que la suite de groupes abéliens :

$$0 \to \mathrm{Hom}(X, A) \to \mathrm{Hom}(X, B)$$

est exacte pour tout $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, i. e. que f est un monomorphisme.

On a les définitions et les propriétés duales suivantes :

6.3.4. *Définition*. - On appelle *conoyau* d'un morphisme $f : A \to B$ d'une catégorie pré-additive $\mathcal{C}$, un conoyau de la double flèche $A \overset{f}{\underset{0}{\rightrightarrows}} B$.

S'il existe un conoyau de f, alors il existe un objet quotient, et un seul, de B qui soit conoyau de f. On le note $\mathrm{Coker}\, f$.

6.3.5. PROPOSITION. - *Soit* $\mathcal{C}$ *une catégorie pré-additive. Une flèche* p *est un conoyau de* $f : A \to B$ *si et seulement si la suite de groupes abéliens*

$$0 \to \mathrm{Hom}(D, X) \to \mathrm{Hom}(B, X) \to \mathrm{Hom}(A, X),$$

déduite de $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{p} D$, *est exacte quel que soit* $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.

6.3.6. PROPOSITION. - *Soit* p *un conoyau de* $f : A \to B$. *Alors,* $\underset{\sim}{B}(p) = 0$ *si et seulement si* f *est un épimorphisme*.

6.3.7. *Définition*. - Soit $f : A \to B$ un morphisme d'une catégorie pré-additive. S'ils existent, nous appellerons *image de* f le noyau du conoyau de f, et *co-image* de f le conoyau du noyau de f. En notation, on a donc

$$\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Ker}(\mathrm{Coker}\, f) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Coim}\, f = \mathrm{Coker}(\mathrm{Ker}\, f) .$$

6.3.8. THÉORÈME. - *Si un morphisme* $f : A \to B$ *d'une catégorie pré-additive* $\mathcal{C}$ *admet un noyau, un conoyau, une image et une co-image, alors* f *se décompose avec unicité selon* :

$$A \xrightarrow{q} \mathrm{Coim}\, f \xrightarrow{f'} \mathrm{Im}\, f \xrightarrow{j} B,$$

où q *et* j *sont respectivement l'épimorphisme et le monomorphisme canoniques*.

Démonstration. - Soit $i : \mathrm{Ker}\, f \to A$. Puisque $fi = 0$, f se factorise de façon unique à travers $\mathrm{Coker}\, i = \mathrm{Coim}\, f$. Soit

$$A \xrightarrow{q} \mathrm{Coim}\, f \xrightarrow{f_1} B \qquad \text{avec} \quad f = f_1\, q$$

cette factorisation. Soit $p : B \to \mathrm{Coker}\, f$. Alors q étant un épimorphisme, l'égalité $pf_1\,q = 0$ entraîne $pf_1 = 0$. Par suite, f_1 se factorise avec unicité à travers $\mathrm{Ker}(\mathrm{Coker}\ f) = \mathrm{Im}\ f$; i. e. on a

$$\mathrm{Coim}\ f \xrightarrow{f'} \mathrm{Im}\ f \xrightarrow{j} B \qquad \text{avec} \quad jf' = f_1 \ .$$

6.3.9. THÉORÈME. - <u>Si, dans une catégorie pré-additive</u> $\mathcal{C}$, <u>le diagramme suivant est commutatif</u> :

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "u"'] & B_1 \arrow[d, "v"] \\ A_2 \arrow[r, "f_2"'] & B_2 \end{tikzcd} ,$$

<u>et si</u> f_1 <u>et</u> f_2 <u>admettent un noyau, un conoyau, une image et une co-image, il existe un diagramme commutatif unique</u> :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ker}\ f_1 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "\sigma"'] & A_1 \arrow[r, "q_1"] \arrow[d, "u"'] & \mathrm{Coim}\ f_1 \arrow[r, "f_1'"] \arrow[d, "\mu"'] & \mathrm{Im}\ f_1 \arrow[r, "j_1"] \arrow[d, "\nu"'] & B_1 \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "v"'] & \mathrm{Coker}\ f_1 \arrow[d, "\rho"'] \\ \mathrm{Ker}\ f_2 \arrow[r, "i_2"'] & A_2 \arrow[r, "q_2"'] & \mathrm{Coim}\ f_2 \arrow[r, "f_2'"'] & \mathrm{Im}\ f_2 \arrow[r, "j_2"'] & B_2 \arrow[r, "p_2"'] & \mathrm{Coker}\ f_2 \end{tikzcd} ,$$

<u>où</u> q_i <u>et</u> j_i $(i = 1 , 2)$ <u>sont l'épimorphisme et le monomorphisme canoniques relatifs à</u> f_i .

<u>Démonstration</u>. - Puisque $f_2\,ui_1 = v\,f_1\,i_1 = 0$, le morphisme ui_1 se factorise à travers i_2 par un morphisme σ unique tel que $i_2\,\sigma = ui_1$. On prouve dualement l'existence et l'unicité de ρ . En considérant les carrés extrêmes, on déduit l'existence et l'unicité de μ et ν . Enfin, le carré central est commutatif, car $v \circ f_1 = v \circ j_1 \circ f_1' \circ q_1$; i. e. puisque $vj_1 = j_2\,\nu$,

$$v \circ f_1 = j_2 \circ \nu \circ f_1' \circ q_1 \ .$$

Comme $v \circ f_1 = f_2 \circ u$, que $f_2 \circ u = j_2 \circ f_2' \circ q_2 \circ u$, et que $q_2 \circ u = \mu \circ q_1$, on a

$$j_2 \circ \nu \circ f_1' \circ q_1 = j_2 \circ f_2' \circ \mu \circ q_1 \ .$$

Mais q_1 est un épimorphisme et j_2 un monomorphisme. Donc, $\nu f_1' = f_2'\,\mu$.

7. Catégories abéliennes

7.1. Définition des catégories abéliennes.

7.1.1. Définition. - Une catégorie $\mathcal{C}$ est dite abélienne si elle est additive et si elle satisfait aux axiomes suivants :

(Ab_1) Tout morphisme de $\mathcal{C}$ admet un noyau et un conoyau.

(Ab_2) Si f est un morphisme de $\mathcal{C}$, le morphisme f' déduit de la décomposition canonique de f à travers $\mathrm{Coim}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ (cf. 6.3.8) est toujours un isomorphisme.

La catégorie duale d'une catégorie abélienne est abélienne.

Par exemple, la catégorie des modules à gauche sur un anneau A est abélienne.

Rappelons (cf. 1.3.5) que l'ensemble des sous-objets et l'ensemble des objets quotients d'un objet d'une catégorie sont munis de relations d'ordre que nous notons $<$.

7.1.2. LEMME. - Soit, dans une catégorie abélienne $\mathcal{C}$, la suite des morphismes :

$$A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C .$$

On a alors les inégalités suivantes :

(7.1.2.1) $\mathrm{Ker}\, vu > \mathrm{Ker}\, u$.

(7.1.2.2) $\mathrm{Coker}\, vu > \mathrm{Coker}\, v$.

(7.1.2.3) $\mathrm{Im}\, vu < \mathrm{Im}\, v$.

(7.1.2.4) $\mathrm{Coim}\, vu < \mathrm{Coim}\, u$.

Démonstration. - Soit $i : \mathrm{Ker}\, u \to A$ le morphisme canonique. On a $ui = 0$. D'où $(vu)i = 0$; par suite, si $i' : \mathrm{Ker}\, vu \to A$ est le morphisme canonique, alors i se factorise à travers i' ; i. e. il existe $k : \mathrm{Ker}\, u \to \mathrm{Ker}\, vu$ unique tel que $i = i'k$. Par suite, $\mathrm{Ker}\, u < \mathrm{Ker}\, vu$, et (7.1.2.1) est démontrée. La même démonstration faite dans $\mathcal{C}^o$ prouve (7.1.2.2). Puisque $i = i'k$, il résulte de la démonstration de (7.1.2.2) que $\mathrm{Coker}\, i > \mathrm{Coker}\, i'$, i. e. que $\mathrm{Coim}\, u > \mathrm{Coim}\, vu$. On prouve dualement que $\mathrm{Im}\, vu < \mathrm{Im}\, v$.

On a, en conservant les hypothèses et les notations de 7.1.2 :

7.1.3. COROLLAIRE.

1° Si v est injectif, on a : $\mathrm{Ker}\ vu = \mathrm{Ker}\ u$ et $\mathrm{Coim}\ vu = \mathrm{Coim}\ u$.

2° Si u est surjectif, on a : $\mathrm{Im}\ vu = \mathrm{Im}\ v$ et $\mathrm{Coker}\ vu = \mathrm{Coker}\ v$.

Démonstration. - Les deux parties du corollaire étant duales l'une de l'autre, nous démontrerons la première. On a $vui' = 0$, où $i' : \mathrm{Ker}\ vu \to A$. Puisque v est injectif, on a $ui' = 0$. D'où $\mathrm{Ker}\ vu < \mathrm{Ker}\ u$ et, d'après (7.1.2.1), $\mathrm{Ker}\ vu = \mathrm{Ker}\ u$. D'autre part,

$$\mathrm{Coim}\ vu = \mathrm{Coker}(\mathrm{Ker}\ vu) = \mathrm{Coker}(\mathrm{Ker}\ u) = \mathrm{Coim}\ u \quad .$$

7.1.4. LEMME. - Soit, dans une catégorie abélienne $\mathcal{C}$, la suite des morphismes

$$A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \quad .$$

Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :

1° $vu = 0$.

2° $\mathrm{Im}\ u < \mathrm{Ker}\ v$.

3° $\mathrm{Coim}\ v < \mathrm{Coker}\ u$.

Démonstration. - Les inégalités 2° et 3° sont duales l'une de l'autre, et $vu=0$ s'écrit $uv = 0$ dans $\mathcal{C}^o$. Prouvons l'équivalence 1° $\rightleftarrows$ 2° . Soit

$$A \xrightarrow{q} \mathrm{Coim}\ u \xrightarrow{u'} \mathrm{Im}\ u \xrightarrow{j} B$$

la décomposition canonique de u . Puisque q est un épimorphisme et que u' est un isomorphisme, on a : $vu = 0$ si et seulement si $vj = 0$. Puisque j est un monomorphisme, on a: $vj = 0$ si et seulement si $\mathrm{Im}\ u < \mathrm{Ker}\ v$.

7.1.5. LEMME. - Dans une catégorie abélienne $\mathcal{C}$, soient A un objet, A' un sous-objet de A , A'' un objet quotient de A , et $i : A' \to A$, $p : A \to A''$ les morphismes canoniques. On a alors :

(7.1.5.1) $\mathrm{Im}\ i = i$.

(7.1.5.2) $\mathrm{Coim}\ p = p$.

Démonstration. - Les deux égalités sont duales l'une de l'autre. Démontrons la première. On a la décomposition de i :

$$A' \xrightarrow{f} \mathrm{Coim}\ i \xrightarrow{i'} \mathrm{Im}\ i \xrightarrow{j} A \quad ,$$

où i' est un isomorphisme, f un épimorphisme, et j un monomorphisme. Puisque

i est un monomorphisme, f est aussi un monomorphisme. C'est donc un isomorphisme, et $(\mathrm{Im}\ i, j)$ définit le même sous-objet de A que (A', i).

7.2. Treillis des sous-objets et treillis des objets quotients d'un objet d'une catégorie abélienne.

Le lemme 7.1.5 prouve que les relations $i = \mathrm{Ker}\ p$ et $p = \mathrm{Coker}\ i$, où i et p sont respectivement sous-objet et objet-quotient de A, définissent deux correspondances bijectives réciproques l'une de l'autre entre l'ensemble des objets quotients et l'ensemble des sous-objets de A. D'après le lemme 7.1.2, ces correspondances sont anti-isotones. Par exemple, si $i_1 : A'_1 \to A$, $i_2 : A'_2 \to A$ sont des sous-objets de A et si $i_1 < i_2$, alors il existe $k : A'_1 \to A_2$ tel que $i_1 = i_2 k$. Alors, d'après (7.1.2.2), $\mathrm{Coker}\ i_1 > \mathrm{Coker}\ i_2$.

7.2.1. THÉORÈME. - <u>Soit</u> A <u>un objet d'une catégorie abélienne</u> $\mathcal{C}$. <u>L'ensemble ordonné des sous-objets</u> i <u>de</u> A <u>et l'ensemble ordonné des objets quotients</u> p <u>de</u> A <u>sont anti-isomorphes par les relations</u> : $i = \mathrm{Ker}\ p$ <u>et</u> $p = \mathrm{Coker}\ i$. <u>De plus, ces deux ensembles sont des treillis</u>.

<u>Démonstration</u>. - Seule reste à prouver la dernière assertion. Soient $i_j : B_j \to A$, $j = 1, 2$, deux sous-objets de A. Posons $p_j = \mathrm{Coker}\ i_j$ et $C_j = \underset{\sim}{B}(p_j)$, $j = 1, 2$. Si $C_1 \amalg C_2$ est le produit direct de C_1 et C_2 par les projections canoniques $\pi_j : C_1 \amalg C_2 \to C_j$, $j = 1, 2$, il existe un morphisme unique $q : A \to C_1 \amalg C_2$ tel que $\pi_j q = p_j$ $(j = 1, 2)$. Nous allons prouver que $i = \mathrm{Ker}\ q$ est la borne inférieure de i_1 et i_2. Nous poserons alors $i = i_1 \wedge i_2$. Puisque $i = \mathrm{Ker}\ q : B \to A$, on a $qi = 0$; d'où $\pi_j qi = 0$; i. e. $p_j i = 0$ pour $j = 1, 2$. Par conséquent, $i < i_j$ $(j = 1, 2)$. Supposons que $i' : B' \to A$ soit un sous-objet de A tel que $i' < i_j$ $(j = 1, 2)$. On a donc $p_j i' = 0$. Puisque le système projectif $0 : B' \to C_j$ $(j = 1, 2)$ se factorise, avec unicité, à travers $C_1 \amalg C_2$, il ne peut se factoriser qu'à travers la flèche $0 : B' \to C_1 \amalg C_2$. Mais comme $qi' : B' \to C_1 \amalg C_2$ est une autre factorisation du système projectif $0 : B' \to C_j$, on a nécessairement $qi' = 0$. D'où $i' < \mathrm{Ker}\ q = \mathrm{Im}\ i = i$. On construit dualement la borne supérieure $i_1 \vee i_2$ comme image du morphisme $B_1 \oplus B_2 \xrightarrow{i} A$ déduit du système inductif $i_j : B_j \to A$, $j = 1, 2$.

S'il existe dans $\mathcal{C}$ des produits et des sommes infinis, la borne supérieure et la borne inférieure d'une famille d'objets de $\mathcal{C}$ indexée par un ensemble de l'univers relatif à $\mathcal{C}$, existent toujours.

Si dans une catégorie abélienne $\mathcal{C}$, $i : A' \to A$ est un sous-objet de A, nous noterons $\mathrm{Coker}\ i$ par A/A'.

7.2.2. Définition. - Dans une catégorie abélienne, une suite $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C$ est dite exacte si $\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Ker}\, v$. Une suite

$$\cdots A_p \xrightarrow{u_p} A_{p+1} \xrightarrow{u_{p+1}} A_{p+2} \xrightarrow{u_{p+2}} A_{p+3} \longrightarrow \cdots$$

est exacte si la suite $A_p \xrightarrow{u_p} A_{p+1} \xrightarrow{u_{p+1}} A_{p+2}$ est exacte quel que soit p .

Par exemple, si $i : A' \to A$ est sous-objet de A , la suite

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{i} A \xrightarrow{p} A/A' = \mathrm{Coker}\, i \longrightarrow 0$$

est exacte.

7.2.3. Définition. - Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux catégories abéliennes. Un foncteur $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ est dit semi-exact si, pour toute suite exacte de $\mathcal{C}$:

(1) $$0 \to A' \to A \to A'' \to 0 ,$$

la suite $T(A') \to T(A) \to T(A'')$ est exacte. Le foncteur T est dit exact à droite (resp. à gauche) si, pour toute suite exacte (1), la suite

$$T(A') \to T(A) \to T(A'') \to 0$$

(resp. $0 \to T(A') \to T(A) \to T(A'')$) est exacte. Un foncteur exact à droite et à gauche est dit exact.

7.3. Images directes et images inverses.

7.3.1. Définition. - Soient, dans une catégorie abélienne $\mathcal{C}$, un morphisme $u : A \to B$ et un sous-objet $i : A' \to A$. Nous appellerons image directe de A' , et nous noterons $u(A')$, l'image de ui . Nous appellerons image directe de A/A' , et nous noterons $u(A/A')$, le conoyau de ui .

Donc, $u(A')$ (= Ker(Coker ui)) est sous-objet de B , et $u(A/A')$ est objet quotient de B .

Par définition, il existe un épimorphisme canonique $A' \to u(A')$, déduit de la décomposition de $ui : A' \to B$.

7.3.2. Définition. - Soient, dans une catégorie abélienne $\mathcal{C}$, un morphisme $u : A \to B$ et un sous-objet $j : B' \to B$ de B . Soit $q : B \to B/B'$, le conoyau de j . Le noyau de $qu : A \to B/B'$ est un sous-objet de A que nous appellerons image inverse de B' , et que nous noterons $u^{-1}(B')$. La co-image de qu est un objet quotient de A que nous appellerons <u>image inverse de</u> B/B' et que nous noterons $u^{-1}(B/B')$.

Des égalités $A = A/(0)$ et $0 = A/A$, on déduit les résultats suivants :

$$u(0) = 0 \qquad u^{-1}(0) = \operatorname{Ker} u$$

$$u(A) = \operatorname{Im} u \qquad u^{-1}(B) = A$$

pour tout morphisme $u : A \to B$.

D'autre part, d'après le lemme 7.1.2, $u(A')$ croît avec A' et $u^{-1}(B')$ croît avec B' .

7.3.3. PROPOSITION. - <u>Soient, dans une catégorie abélienne, un morphisme</u> $u : A \to B$, <u>un sous-objet</u> $i : A' \to A$ <u>de</u> A , <u>et un sous-objet</u> $j : B' \to B$. <u>On a alors les relations suivantes</u> :

(7.3.3.1) $A' < u^{-1}(u(A'))$.

(7.3.3.2) $B' < u(u^{-1}(B'))$.

(7.3.3.3) $u(A') = u[u^{-1}(u(A'))]$.

<u>Démonstration</u> de (7.3.3.1). - Soit $A' \longrightarrow \operatorname{Coim} ui \longrightarrow \operatorname{Im} ui \xrightarrow{j} B$ la décomposition du morphisme $ui : A' \to B$, dans laquelle j est un monomorphisme. Soit $p : A' \to \operatorname{Im} ui$, le composé des deux premières flèches. Soit

$$q : B \to B/u(A')$$

le conoyau de $j : u(A') = \operatorname{Im} ui \to B$. Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & A' \arrow[r, "p"] \arrow[d, "i"] & u(A') = \operatorname{Im} ui \arrow[d, "j"] & \\
u^{-1}(u(A')) = \operatorname{Ker} qu \arrow[r, "i_1"] & A \arrow[r, "u"'] & B \arrow[r, "q"'] & B/u(A')
\end{tikzcd} .$$

Puisque $q = \operatorname{Coker} j$, on a $qj = 0$. Donc $(qj)p = 0$ et $q(ui) = 0$. Par suite, $A' < \operatorname{Ker} qu = u^{-1}(u(A'))$.

On prouverait de même (7.3.3.2). Nous avons, en posant $B' = u(A')$ dans (7.3.3.2), l'inégalité $u(A') < u[u^{-1}(u(A'))]$. Considérons la décomposition de

$$ui_1 : u^{-1}(u(A')) \to B \quad .$$

On a

$$u^{-1}[u(A')] \longrightarrow \operatorname{Coim}(ui_1) \longrightarrow \operatorname{Im}(ui_1) = u[u^{-1}(u(A'))] \xrightarrow{j_1} B \quad .$$

On a $qui = 0$ et $qui = qj_1 \alpha$, où $\alpha : A' \twoheadrightarrow \mathrm{Im}(ui_1)$ est un épimorphisme. Donc $qj_1 = 0$ et $\mathrm{Im}(ui_1) < u(A')$, i. e. $u[u^{-1}(u(A'))] < u(A')$. D'où l'égalité (7.3.3.3).

7.3.4. PROPOSITION. - *Soient, dans une catégorie abélienne, les morphismes* $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C$. *Alors on a, quels que soient les sous-objets* A' *de* A *et* C' *de* C , *les égalités suivantes* :

(7.3.4.1) $(vu)(A') = v[u(A')]$.

(7.3.4.2) $u^{-1}[v^{-1}(A')] = (vu)^{-1}(C')$.

Démonstration. - Prouvons par exemple (7.3.4.1). Soient $i : A' \to A$ et $j : u(A') \to B$ les morphismes canoniques. Le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{array}{ccccc} A' & \xrightarrow{p} & u(A') = \mathrm{Im}\, ui & \longrightarrow & \mathrm{Im}\, vj = v[u(A')] \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j} & & \downarrow \\ A & \xrightarrow[u]{} & B & \xrightarrow[v]{} & C \end{array} ,$$

et p provient de la composition des deux premières flèches de la décomposition de ui à travers $\mathrm{Coim}(ui)$ et $\mathrm{Im}\, ui$. Donc, p est surjectif. On a

$$v[u(A')] = \mathrm{Im}\, vj \qquad \text{et} \quad (vu)(A') = \mathrm{Im}(vui) \quad .$$

Mais $v(ui) = (vj)p$. Donc, puisque p est surjectif, $\mathrm{Im}(vui) = \mathrm{Im}(vj)$.

7.4. Les théorèmes d'isomorphisme.

7.4.1. THÉORÈME. - *Soient* $\mathcal{C}$ *une catégorie abélienne,* A *un objet de* $\mathcal{C}$, A_1 *et* A_2 *deux sous-objets de* A *tels que* $A_1 < A_2$; *alors, la suite canonique* :

(7.4.1.1) $$0 \to A_1 \to A_2 \to A/A_1 \to A/A_2 \to 0$$

est exacte.

Démonstration. - Soit $A_2 \to A/A_1$ la flèche composée des flèches canoniques $A_2 \xrightarrow{i_2} A \xrightarrow{p_1} A/A_1$, où $p_1 = \mathrm{Coker}\, i_1$ et où i_1 est le composé des flèches canoniques $A_1 \xrightarrow{\xi} A_2 \xrightarrow{i_2} A$. Puisque i_1 est noyau de p_1 et que i_2 est un monomorphisme, le morphisme ζ est noyau de $p_1 \circ i_2$. La suite (7.4.1.1) est donc exacte en A_2 . Dualement elle l'est en A/A_1 . Elle l'est trivialement en A_1 et en A/A_2 .

Supposons que A_1 soit aussi sous-objet de A_2 (il est de toute façon isomorphe canoniquement à un sous-objet de A_2). On pourra donc écrire :

$$A_2/A_1 = \mathrm{Coim}\ (A_2 \to A/A_1) \simeq \mathrm{Im}\ (A_2 \to A/A_1) = \mathrm{Ker}\ (A/A_1 \to A/A_2) \ .$$

On a donc une suite exacte déduite de la suite (7.4.1.1) :

$$(7.4.1.2) \qquad 0 \to A_2/A_1 \to A/A_1 \to A/A_2 \to 0 \ .$$

On sait qu'aux sous-objets de A contenant A_1 correspondent biunivoquement les objets quotients de A contenu dans A/A_1 , i. e. les objets quotients de A/A_1 . Le théorème 7.4.1 détermine l'isomorphisme entre les sous-objets de A/A_1 et les objets quotients du type A_2/A_1 , où A_2 parcourt les sous-objets de A contenant A_1 , ce que l'on écrira $A_2/A_1 < A/A_1$. En résumé, si $A_1 < A_2 < A$, alors

$$A_2/A_1 < A/A_1 \qquad \text{et} \qquad (A/A_1)/(A_2/A_1) \simeq A/A_2 \ .$$

7.4.2. THÉORÈME. - Soit, dans une catégorie abélienne $\mathcal{C}$, la suite

$$A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \ .$$

On a alors les égalités :

1° $\mathrm{Ker}\ u \wedge \mathrm{Ker}\ v = u(\mathrm{Ker}\ vu)$.

2° $\mathrm{Coim}\ u \wedge \mathrm{Coker}\ v = v^{-1}(\mathrm{Coker}\ vu)$.

3° $\mathrm{Coker}\ u \vee \mathrm{Coim}\ v = u(\mathrm{Coim}\ vu)$.

4° $\mathrm{Ker}\ v \vee \mathrm{Im}\ u = v^{-1}(\mathrm{Im}\ vu)$.

Démonstration.

1° Soit $i : \mathrm{Ker}\ vu \to A$ le morphisme canonique. On a $u(\mathrm{Ker}\ vu) = \mathrm{Im}\, ui < \mathrm{Im}\, u$. Le diagramme suivant étant commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}\ vu \arrow[r, "i"] \arrow[d, "p"'] & A \arrow[d, "u"] & \\
\mathrm{Im}\ ui \arrow[r, "j"'] & B \arrow[r, "v"] & C
\end{tikzcd} ,$$

on a $vjp = vui = 0$. D'où, puisque p est un épimorphisme, $vj = 0$ et $\mathrm{Im}\ ui < \mathrm{Ker}\ v$. Pour prouver que $\mathrm{Ker}\ v \wedge \mathrm{Im}\ u < u(\mathrm{Ker}\ vu)$, remarquons d'abord que, dans la décomposition de v à travers sa co-image,

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "v'"] \arrow[dr, "v"'] & \mathrm{Coim}\, v \arrow[d, "i'"] \\ & C \end{tikzcd},$$

i' est un monomorphisme et que, par suite, $\mathrm{Ker}\, v = \mathrm{Ker}\, v'$, $\mathrm{Ker}\, vu = \mathrm{Ker}\, v'u$. On peut donc supposer que $C = B/\mathrm{Ker}\, v$. Soit

$$\omega : B \to B/\mathrm{Ker}\, v \times B/\mathrm{Im}\, u \quad ,$$

le morphisme déduit du système projectif :

$$v : B \to B/\mathrm{Ker}\, v \qquad p : B \to B/\mathrm{Im}\, u \quad .$$

On a, par définition, $\mathrm{Im}\, u \wedge \mathrm{Ker}\, v = \mathrm{Ker}\, \omega$. Comme $pu = 0$, on a $pui = 0$. D'autre part, $vui = 0$. Donc, p et v se factorisent à travers $\mathrm{Coker}\, ui$. Donc, ω se factorise à travers $\mathrm{Coker}\, ui$. D'où $\mathrm{Ker}[\mathrm{Coker}\, ui] > \mathrm{Ker}\, \omega$, i. e. $u[\mathrm{Ker}\, vu] > \mathrm{Ker}\, v \wedge \mathrm{Im}\, u$.

Il suffit d'appliquer 1° à $\mathcal{C}^{o}$, pour prouver 2°.

Enfin 3° se déduit de 1°, et 4° se déduit de 2° par passage aux quotients.

7.4.3. COROLLAIRE. - Si M et N sont deux sous-objets de A et si $u : A \to B$, alors on a les isomorphismes :

1° $u(M) \simeq \dfrac{M \vee \mathrm{Ker}\, u}{\mathrm{Ker}\, u}$.

2° $u(M) \simeq M/M \wedge \mathrm{Ker}\, u$.

3° $M/M \wedge N \simeq \dfrac{M \vee N}{N}$.

Démonstration. - On obtient l'isomorphisme 3° en appliquant 1° au morphisme $A \to A/N$. Démontrons 1°. D'après 7.4.2, 4°, on a $M \vee \mathrm{Ker}\, u = u^{-1}[u(M)]$. Donc, d'après 7.3.3.3, $u[M \vee \mathrm{Ker}\, u] = u(M)$. Puisque $\mathrm{Ker}\, u$ est un noyau de l'épimorphisme $M \vee \mathrm{Ker}\, u \to u(M)$, on a $\dfrac{M \vee \mathrm{Ker}\, u}{\mathrm{Ker}\, u} \simeq u(M)$.

8. Objets projectifs et objets injectifs dans les catégories abéliennes.

8.1. Générateurs et cogénérateurs.

8.1.1. Définition. - Soit $\mathcal{C}$ une catégorie relative à un univers $\mathcal{U}$, et soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'objets de $\mathcal{C}$ indexée par un ensemble I de $\mathcal{U}$. On dit que $(X_i)_{i\in I}$ est <u>une famille de générateurs de</u> $\mathcal{C}$ si, pour toute double flèche $X \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} Y$ de $\mathcal{C}$ telle que $f \neq g$, il existe $i \in I$ et $u_i : X_i \to X$ telle que $fu_i \neq gu_i$. Nous dirons qu'un objet X de $\mathcal{C}$ est <u>un générateur</u> si $\{X\}$ est une famille de générateurs de $\mathcal{C}$.

8.1.2. <u>Exemple</u>. - Dans la catégorie des modules à gauche sur un anneau A, A est un générateur. En effet, soient $f, g : M \to N$ deux flèches de cette catégorie. Si $f \neq g$, il existe $x \in M$ tel que $f(x) \neq g(x)$. Si $\theta : A \to M$ est le morphisme défini par $\theta(1) = x$, alors $f\theta \neq g\theta$.

8.1.3. PROPOSITION. - <u>Soit $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne. Alors, une famille $(X_i)_{i\in I}$ d'objets de $\mathcal{C}$ est une famille de générateurs de $\mathcal{C}$, si et seulement si pour tout objet X de $\mathcal{C}$ et tout sous-objet Y de X, $Y \neq X$, il existe $i \in I$ et $u_i : X_i \to X$ tel que $\operatorname{Im} u_i \not\leq Y$.</u>

<u>Démonstration</u>. - Si $(X_i)_{i\in I}$ est une famille de générateurs de $\mathcal{C}$, soient $X \in \operatorname{Ob}(\mathcal{C})$ et $Y < X$, $Y \neq X$. La flèche canonique $f : X \to X/Y$ et la flèche $0 : X \to X/Y$ étant distinctes, il existe $i \in I$ et $u_i : X_i \to X$ tel que $fu_i \neq 0$; donc $\operatorname{Im} u_i \not\leq Y$. Inversement, soient $X \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} Y$ deux flèches distinctes de $\mathcal{C}$. Alors, $\operatorname{Ker}(f - g) \neq X$. Donc, il existe $i \in I$ et $u_i : X_i \to X$ tels que $\operatorname{Im} u_i \not\leq \operatorname{Ker}(f - g)$. D'où $fu_i \neq gu_i$.

8.1.4. PROPOSITION. - <u>Soient $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne avec sommes directes infinies. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes</u> :

1° <u>$\mathcal{C}$ possède une famille de générateurs</u> ;

2° <u>Il existe une famille d'objets $(X_i)_{i\in I}$ telle que $X = \bigoplus_{i\in I} X_i$ soit un générateur de $\mathcal{C}$</u> ;

3° <u>Il existe un objet X de $\mathcal{C}$ tel que tout objet Y de $\mathcal{C}$ soit isomorphe au quotient d'une somme directe d'objets de $\mathcal{C}$, tous isomorphes à X</u>.

<u>Démonstration</u>. - $(1°) \rightleftarrows (2°)$. Cette équivalence résulte de la définition et du fait que si $X = \bigoplus_{i\in I} X_i$, on a, quel que soit $y \in \operatorname{Ob}(\mathcal{C})$, un isomorphisme entre $\operatorname{Hom}(X, Y)$ et $\prod_{i\in I} \operatorname{Hom}(X_i, Y)$.

$(2°) \Longrightarrow (3°)$. Soient X un générateur de $\mathcal{C}$, et $Y \in \operatorname{Ob}(\mathcal{C})$. Posons $I = \operatorname{Hom}(X, Y)$. On définit $\varphi : \bigoplus_I X \to Y$ par $\varphi = \{\{u\}_{u\in\operatorname{Hom}(X,Y)}\}$. Alors, $\operatorname{Im} \varphi = Y$.

(3°) $\Longrightarrow$ (1°) . Soient $\mathcal{U}$ l'univers relatif à $\mathcal{C}$, et $Y \in Ob(\mathcal{C})$. Il existe $X \in Ob(\mathcal{C})$ et $I \in \mathcal{U}$ tels que la suite $\bigoplus_I X \xrightarrow{\varphi} Y \longrightarrow 0$ est exacte. Soit Y' un sous-objet de Y , $Y' \neq Y$. Alors, il existe $i \in I$ tel que, si φ_i désigne la i-ième injection canonique de X dans $\bigoplus_I X$, on ait $\operatorname{Im} \varphi_i \not\leq Y'$. Donc, $\{X\}_I$ est un système de générateurs.

On a, dualement, la définition et les propositions suivantes :

8.1.5. Définition. - Soient $\mathcal{C}$ une $\mathcal{U}$-catégorie, et $(X_i)_{i\in I}$, où $I \in \mathcal{U}$, une famille d'objets de $\mathcal{C}$. On dit que $(X_i)_{i\in I}$ est une famille de cogénérateurs de $\mathcal{C}$, si, pour toute double flèche $X \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} Y$ de $\mathcal{C}$ telle que $f \neq g$, il existe $i \in I$ et $u_i : Y \to X_i$ telle que $fu_i \neq gu_i$.

Par exemple, le groupe $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est un cogénérateur de la catégorie $\mathbf{Ab}$.

8.1.6. PROPOSITION. - Soit $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne. Alors, une famille $(X_i)_{i\in I}$ d'objets de $\mathcal{C}$ est une famille de cogénérateurs de $\mathcal{C}$ si et seulement si, pour tout objet X de $\mathcal{C}$ et tout objet quotient X/X' de X , il existe $i \in I$ et $u_i : X \to X_i$ qui ne se factorise pas à travers X/X' .

Une famille $(X_i)_{i\in I}$ d'objets d'une catégorie abélienne $\mathcal{C}$, qui possède des produits directs infinis, est une famille de cogénérateurs, si et seulement si $X = \prod_{i\in I} X_i$ est un cogénérateur.

8.1.7. PROPOSITION. - Soit $\mathcal{C}$ une $\mathcal{U}$-catégorie abélienne avec sommes directes infinies et générateurs. Pour tout $Y \in Ob(\mathcal{C})$, il existe un ensemble E de $\mathcal{U}$ tel que l'ensemble des sous-objets de Y soit équipotent à E .

Démonstration. - D'après 8.1.4, $\mathcal{C}$ possède un générateur X . L'ensemble $Hom(X , Y)$ appartient à $\mathcal{U}$ pour tout $Y \in Ob(\mathcal{C})$. L'application qui, à un sous-objet Y' de Y , fait correspondre l'ensemble

$$E_{Y'} = \{f \mid f \in Hom(X , Y) , \operatorname{Im} f \subset Y'\} ,$$

est injective par définition de X . La proposition en résulte.

On a, par suite :

8.1.8. COROLLAIRE. - Soit $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne avec sommes directes infinies et générateurs. Alors, toute famille de sous-objets d'un objet Y de $\mathcal{C}$ admet une borne supérieure.

8.2. Limites inductives filtrantes.

Nous appellerons limite inductive filtrante dans une catégorie $\mathcal{C}$, la limite inductive d'un foncteur $F : I \to \mathcal{C}$ où I est un ensemble ordonné filtrant. En effet, tout ensemble ordonné I peut être considéré comme une catégorie dont les objets sont les éléments de I , et telle que $\mathrm{Hom}(i , j) = \emptyset$ si $i \not\leqslant j$, et $\mathrm{Hom}(i , j) = \{\leqslant\}$ si $i \leqslant j$. Posant $A_i = F(i)$ pour $i \in I$, nous noterons $\varinjlim F$ par $\varinjlim A_i$.

Des définitions et propriétés de $\varinjlim F$, où F est un foncteur d'une catégorie I dans une catégorie $\mathcal{C}$, il résulte que, si $\varinjlim F$ existe pour tout foncteur $F : I \mapsto \mathcal{C}$, alors $F \to \varinjlim F$ est un foncteur de $\mathrm{Hom}(I , \mathcal{C})$ dans $\mathcal{C}$. Nous dirons que, dans une catégorie $\mathcal{C}$, la limite inductive filtrante est exacte si, pour tout ensemble ordonné filtrant I , $\varinjlim$ est un foncteur exact.

8.2.1. PROPOSITION. - Soit $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne avec générateurs et sommes directes infinies. Si la limite inductive filtrante dans $\mathcal{C}$ est exacte, alors pour toute famille filtrante croissante de sous-objets $(P_i)_{i\in I}$ d'un objet P de $\mathcal{C}$, la borne supérieure $\bigvee_{i\in I} P_i$ est isomorphe à $\varinjlim P_i$. De plus, si S est un sous-objet quelconque de P , on a

$$(\bigvee_i P_i) \wedge S = \bigvee_i (P_i \wedge S) \quad .$$

Démonstration. - D'après 8.1.8, la borne supérieure des P_i existe. Posons $U = \bigvee_{i\in I} P_i$. Il suffit de prouver que $\varinjlim P_i$ s'injecte dans U . Puisque les suites suivantes sont exactes : $0 \to P_i \xrightarrow{\xi_i} U \to U/P_i \to 0$, la suite $0 \to \varinjlim P_i \to U$ est exacte. Par définition de $P_i \wedge S$, les suites suivantes sont exactes :

$$0 \to P_i \wedge S \to P \to P/P_i \oplus P/S \to 0 \quad .$$

Donc, la suite suivante est exacte :

$$0 \to \varinjlim(P_i \wedge S) \to P \to (\varinjlim P/P_i) \oplus (\varinjlim P/S) \to 0 \quad .$$

D'où, d'après la première partie de la démonstration, la suite

$$0 \to \bigvee_i (P_i \wedge S) \to P \to P/\vee P_i \oplus P/S \to 0$$

est exacte. D'où $\bigvee_i (P_i \wedge S) = (\bigvee_i P_i) \wedge S$.

La réciproque de 8.2.1, que nous ne démontrerons pas, est vraie.

8.3. Objets injectifs et objets projectifs.

8.3.1. Définition. - Soit $\mathcal{C}$ une catégorie ; un objet E sera dit injectif s'il vérifie la propriété suivante : si A et B sont deux objets de $\mathcal{C}$, si $i : A \to B$ est un monomorphisme, et si $f : A \to E$ est un morphisme, il existe un morphisme $g : B \to E$ tel que $gi = f$.

Si la catégorie $\mathcal{C}$ est abélienne, dire que E est injectif, c'est dire que le foncteur $\mathrm{Hom}(\cdot\, , E)$ est exact.

8.3.2. Définition. - Soit $\mathcal{C}$ une catégorie ; un objet P sera dit projectif s'il vérifie la propriété suivante : si A et B sont objets de $\mathcal{C}$, si $p : B \to A$ est un épimorphisme, et si $f : P \to A$ est un morphisme, il existe un morphisme $g : P \to B$ tel que $pg = f$.

8.3.3. PROPOSITION. - *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne. Un objet E de $\mathcal{C}$ est injectif si, et seulement si, il est facteur direct de toutes ses extensions.*

Démonstration. - La condition est nécessaire. En effet, soit $i : E \to A$ un monomorphisme. Alors, le morphisme $1_E : E \to E$ se prolonge en un morphisme $f : A \to E$ tel que $fi = 1_E$. D'où, E est facteur direct de A. La condition est suffisante. En effet, soient $i : A \to B$ un monomorphisme, et $f : A \to E$ un morphisme. Soit P la somme amalgamée de E et B au-dessous de A. On a donc le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & B \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h_1} \\ E & \xrightarrow[h_2]{} & P \end{array} ,$$

et A est un produit fibré de E et B au-dessus de P. Montrons que h_2 est un monomorphisme. Soit $\xi : X \to E$ un morphisme tel que $h_2 \xi = 0$. Alors, ξ se factorise à travers A ; i. e. il existe $g : X \to A$ tel que $\xi = f \circ g$. D'où, $i \circ g = 0$ et $g = 0$. Par suite, $\xi = 0$. Par hypothèse, E est facteur direct de P. D'où il existe $h : P \to E$ tel que $f_0 = h \circ h_1$ prolonge f.

8.3.4. Définition. - Une extension essentielle d'un objet A d'une catégorie abélienne $\mathcal{C}$ est un monomorphisme $i : A \to B$ tel que, pour tout monomorphisme $j : B' \to B$, $j \neq 0$, on ait

$$\mathrm{Im}(i) \wedge \mathrm{Im}(j) \neq 0 .$$

8.3.5. PROPOSITION. - *Soit* $\mathcal{C}$ *une catégorie abélienne avec limite inductive exacte et générateurs. Pour qu'un objet soit injectif, il faut et il suffit qu'il n'admette pas d'extension essentielle propre.*

Démonstration. - La condition est nécessaire, d'après 8.3.3. Elle est suffisante. Soit E un objet qui n'admette pas d'extension essentielle propre, et soit $i : E \to B$ un monomorphisme. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des sous-objets de B dont l'intersection avec $i(E) = E'$ soit nulle. La famille $\mathcal{F} = (B_j)_{j \in J}$ est inductive puisque $(\bigcup_{k \in L} B_k) \cap E' = \bigcup_k (B_k \wedge E')$, où $\bigcup_{k \in L} B_k$ est une sous-famille totalement ordonnée de $\mathcal{F}$. Soient B' un élément maximal de $\mathcal{F}$, et $B'' = B/B'$. Soit f le composé des flèches $E \to B$ et $B \to B''$. Alors, f est une extension essentielle $E \to B''$. D'où, E est isomorphe à B''. Par suite, E est facteur direct de toute extension, et E est injectif.

On prouve facilement les propriétés suivantes :

8.3.6. PROPOSITION. - *Soit* $\mathcal{C}$ *une catégorie abélienne avec limite inductive exacte et générateurs.*

(i) *Le composé* $i_2 \circ i_1$ *des flèches* $A \xrightarrow{i_1} B$ *et* $B \xrightarrow{i_2} C$ *est une extension essentielle si, et seulement si,* i_1 *et* i_2 *sont des extensions essentielles ;*

(ii) *Soit* $(E_i)_{i \in I}$ *un ensemble filtrant croissant d'extensions essentielles d'un objet* S *de* $\mathcal{C}$; *alors,* $\bigvee_{i \in I} E_i$ *est une extension essentielle de* S .

8.3.7. PROPOSITION. - *Soit* $\mathcal{C}$ *une catégorie abélienne avec générateurs et limite inductive exacte. Un objet* E *est injectif si et seulement si tout morphisme* $v : V \to E$, *où* V *est un sous-objet du générateur* U *de* $\mathcal{C}$, *se prolonge en un morphisme* $U \to E$.

Démonstration. - La condition est évidemment nécessaire. Elle est suffisante. En effet, soient $i : B \to A$ un monomorphisme, et $u : B \to E$ un morphisme. L'ensemble P des prolongements de u à des sous-objets de A contenant B est inductif. En effet, soit $(B_j)_{j \in I}$ une famille totalement ordonnée de sous-objets de A contenant B. Alors, $\bigcup_j B_j$ est un objet de A isomorphe à $\varinjlim B_j$.
La famille $\{B_j \, ; \, B_j \to E\}$ est un système inductif de but E. Donc, il existe $\tilde{u} : \bigcup_j B_j \to E$ qui rend commutatif tous les diagrammes. Par suite, l'ensemble P admet un élément maximal. On est ramené au cas où u est maximal, et il suffit de prouver que $B = A$. Supposons que $B \neq A$. Il existe alors un morphisme :

$j : U \to A$ tel que $j(U) \not\leq B$. Posons $B' = j(U) \vee B$. On a alors la suite exacte :

$$V \xrightarrow{\varphi'} U \times B \xrightarrow{\varphi} B' \longrightarrow 0 \ ,$$

où φ' provient des morphismes "injection canonique" $V \to U$ et $-j' : V \to B$, et où φ provient des morphismes "injection canonique" $B \to B'$ et $j : U \to B'$. Pour définir un morphisme $B' \to E$, il suffit de définir un morphisme $w : U \times B \to E$ tel que $w \circ \varphi' = 0$. Soit $k : U \to E$ une extension de $u \circ j' : V \to E$ à U . Soit $w : U \times B \to E$ le morphisme dont les composants sont $u : B \to E$ et $k : U \to E$. Alors, puisque $w\varphi' = 0$, w se factorise à travers B' . Par suite, le morphisme $v : B' \to E$ prolonge u , ce qui est impossible. Donc, $A = B$.

8.3.8. LEMME. - *Soit* $\mathcal{C}$ *une catégorie abélienne avec générateurs et limite inductive exacte. Soit* R *l'anneau des endomorphismes du générateur* G *de* $\mathcal{C}$ *, et soit* F *le foncteur de* $\mathcal{C}$ *dans la catégorie* Mod_R *des* R*-modules à gauche, qui à* $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ *associe* $\mathrm{Hom}(G , X)$. *Alors, si* $A \to E$ *est une extension essentielle dans* $\mathcal{C}$, $F(A) \to F(E)$ *est une extension essentielle dans* Mod_R .

Démonstration. - Soient M un sous-module non nul de $F(E)$, et $x \in M$, $x \neq 0$. Soit P le produit fibré de G et A au-dessus de E :

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "f"] \arrow[d] & E \arrow[d, "x"] \\ A \arrow[r] & E \end{tikzcd} .$$

Il existe un morphisme $h : G \to P$ tel que le composé des morphismes : $G \xrightarrow{h} P \xrightarrow{f} G \xrightarrow{x} E$ soit non nul. Donc, xfh est un élément non nul de M qui appartient à $\mathrm{Im}\, F(A \to E)$.

Nous admettrons que, dans la catégorie Mod_R des modules à gauche sur un anneau R , une extension essentielle maximale Q d'un objet M de Mod_R est un R-module injectif et que toute extension essentielle de M est isomorphe à un sous-module de Q .

8.3.9. THÉORÈME. - *Soit* $\mathcal{C}$ *une catégorie abélienne avec générateurs et limite inductive exacte. Alors, tout objet* A *de* $\mathcal{C}$ *se plonge dans un objet injectif* E .

Démonstration. - Conservons les notations de 8.3.8, et soit Q une extension essentielle maximale de $F(A)$. D'après 8.3.8, et d'après la remarque précédente, si $A \to B$ est une extension essentielle, alors $F(B)$ est isomorphe à un sous-module de Q . Si Ω est un ordinal de cardinal plus grand que celui de la famille des sous-objets de Q , alors toute suite d'extensions essentielles propres de A se termine avant Ω . Donc, il existe un objet C tel que $A \to C$ est essentiel, et C n'admet pas d'extension essentielle propre. Donc, C est injectif.

8.3.10. THÉORÈME. - Soient $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne avec générateurs et limite inductive exacte, et A un objet de $\mathcal{C}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Q est une extension essentielle maximale de A ;

(ii) Q est un objet injectif minimal contenant A .

Si deux objets Q et Q' vérifient les propriétés précédentes, ils sont isomorphes. Un tel objet Q est appelé l'enveloppe injective de A .

Démonstration.

(i) $\Longrightarrow$ (ii) . Si Q est une extension essentielle maximale de A , soit Q' un objet injectif de $\mathcal{C}$ tel que $A < Q' < Q$. Alors, Q' est facteur direct de Q . Donc $Q = Q'$, et Q est injectif.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) . Soit $A \xrightarrow{i_1} Q'$ une extension essentielle de A , et soit $i_2 : A \to Q$ l'injection canonique. Puisque Q est injectif, il existe $f : Q' \to Q$ tel que $fi_1 = i_2$. Donc, f est un monomorphisme.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BUCHSBAUM (David A.). - Exact categories and duality, Trans. Amer. math. Soc., t. 80, 1955, p. 1-34.

[2] CARTAN (H.) and EILENBERG (S.). - Homological algebra. - Princeton, Princeton University Press, 1956 (Princeton mathematical Series, 19).

[3] GABRIEL (Pierre). - Des catégories abéliennes, Bull. Soc. math. France, t.90, 1962, p. 323-448 (Thèse Sc. math. Paris, 1961).

[4] GROTHENDIECK (Alexander). - Sur quelques points d'algèbre homologique, Tôhoku math. J., Series 2, t. 9, 1957, p. 119-221.

[5] KUROŠ (A. G.), LIVŠIC (A. Kh.), ŠUL'GEJFER (E. G.) und CALENKO (M. S.). - Zur Theorie der Kategorien. - Berlin, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1963 (Mathematische Forschungsberichte, 15).

[6] MAC LANE (Saunders). - Locally small categories and the foundations of set theory, Infinistic methods, Proceedings of the Symposium on foundations of Mathematics [1959. Warszawa], p. 25-43. - Oxford, Pergamon Press, 1961.

[7] MAC LANE (Saunders). - Categorical algebra, Bull. Amer. math. Soc., t. 71, 1965, p. 40-106.

[8] SCHIFFMANN (Gérard). - Théorie élémentaire des catégories, Séminaire Banach, tenu à l'Ecole Normale Supérieure, année 1962/63, n° 1 et 2.

[9] Séminaire Grothendieck : Algèbre homologique. - Paris, Secrétariat mathématique, 1958.